Universität zu Köln
Institut für Theoretische Physik
Prof. Dr. Claus Kiefer
Manuel Krämer

23. Mai 2012

www.thp.uni-koeln.de/gravitation/courses/qm12.html

# 7. Übungsblatt zur Quantenphysik

Sommersemester 2012

**Abgabe:** bis Mittwoch, 6. Juni 2012, 12:00 Uhr in der Holzbox vor dem Institut für Theoretische Physik

## Übung 17 (3 + 3 Punkte): *Zur Unbestimmheitsrelation*

Betrachten Sie ein eindimensionales Quantensystem mit Ortsoperator $x$ und Impulsoperator $p$.

**17.1** Zeigen Sie, dass in der Unbestimmheitsrelation $\Delta x\, \Delta p = \frac{\hbar}{2}$ genau dann gilt, wenn die Wellenfunktion der Gleichung

$$\left(\frac{\hbar}{\mathrm{i}}\,\frac{\partial}{\partial x} - \langle p \rangle\right)\psi = \mathrm{i}\,\alpha\,(x - \langle x \rangle)\,\psi\,, \qquad \alpha \in R$$

genügt.

**17.2** Lösen Sie diese Gleichung und geben Sie die normierte Wellenfunktion an. Berechnen Sie hierfür $\langle x \rangle$ und $\langle p \rangle$.

## Übung 18 (3 + 4 Punkte): *Winkelvariable und Unbestimmheitsrelation*

Betrachten Sie eine Winkelvariable $\theta$ mit $0 \leq \theta \leq 2\pi$ und konjugiertem (d.h. dazugehörigem) Impulsoperator

$$p_\theta = \frac{\hbar}{\mathrm{i}}\,\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}\theta}\,.$$

**18.1** Zeigen Sie, dass $\theta$ und $p_\theta$ hermitesche Operatoren sind, wenn das Skalarprodukt als

$$(\psi, \varphi) := \int_0^{2\pi} \mathrm{d}\theta\; \psi^*(\theta)\,\varphi(\theta)$$

definiert ist und der Definitionsbereich von $p_\theta$ auf differenzierbare Funktionen mit $\psi(2\pi) = \psi(0)$ eingeschränkt wird.

**18.2** Berechnen Sie die Eigenfunktionen von $p_\theta$. Zeigen Sie, dass hierfür $\Delta p_\theta = 0$ und $\Delta\theta = \frac{\pi}{\sqrt{3}}$ gilt. Warum ist die Unbestimmheitsrelation $\Delta\theta\,\Delta p_\theta \geq \frac{\hbar}{2}$ verletzt?

*Hinweis:* Beachten Sie den Definitionsbereich von $p_\theta\,\theta$.

## Übung 19 (2 + 2 + 3 Punkte): *Translationsoperator*

Definieren Sie den Translationsoperator $T_{\vec{a}}$ im Raum der quadratintegrablen Funktionen auf dem $\mathbb{R}^3$ durch

$$T_{\vec{a}}\,\psi(\vec{x}) = \psi(\vec{x} + \vec{a})\,.$$

Hierbei ist $\vec{a}$ ein beliebiger konstanter Vektor.

**19.1** Zeigen Sie, dass $T_{\vec{a}}$ unitär ist, d.h. $T_{\vec{a}}^\dagger\, T_{\vec{a}} = T_{\vec{a}}\, T_{\vec{a}}^\dagger = \mathbb{1}$ erfüllt, und dass $T_{\vec{a}}^{-1} = T_{-\vec{a}}$ gilt.

**19.2** Zeigen Sie, dass

$$T_{\vec{a}} = \mathrm{e}^{\mathrm{i}\,\vec{a}\cdot\vec{P}/\hbar}\,,$$

wobei $\vec{P}$ den Impulsoperator bezeichnet. Wenden Sie hierzu beide Seiten dieser Gleichung auf eine analytische Funktion $f(\vec{x})$ an und benutzen Sie die Taylorreihe.

*Bitte wenden.*

**19.3** Es sei nun $\vec{Q}$ der Ortsoperator. Weisen Sie die Beziehung

$$\mathrm{e}^{\mathrm{i}\,\vec{a}\cdot\vec{P}/\hbar}\,\vec{Q}\,\mathrm{e}^{-\mathrm{i}\,\vec{a}\cdot\vec{P}/\hbar} = \vec{Q} + \vec{a}$$

nach.

*Hinweis:* Zeigen Sie zunächst, dass für zwei beliebige $A$ und $B$ mit $[A, [A, B]] = 0$ gilt:

$$\mathrm{e}^{A}\,B\,\mathrm{e}^{-A} = B + [A, B]\,.$$

(Vgl. mit **Übung 5**.)

---

# *Historische Zitate zu den Unbestimmheitsrelationen der Quantenmechanik*

Es ist immer dieselbe Sache: es gibt wegen Beugung keine beliebig dünnen Strahlen in der Wellenoptik des $\psi$-Feldes, und man darf nicht gleichzeitig den „$p$-Zahlen" und den „$q$-Zahlen" gewöhnliche „$c$-Zahlen" zuordnen. Man kann die Welt mit dem $p$-Auge und man kann sie mit dem $q$-Auge ansehen, aber wenn man beide Augen zugleich aufmachen will, dann wird man irre.

aus: Wolfgang Pauli, *Wissenschaftlicher Briefwechsel mit Bohr, Einstein, Heisenberg u.a.*, Band I, hrsg. von Armin Hermann, Karl von Meyenn und Victor F. Weisskopf, Springer 1979. (Brief an Werner Heisenberg vom 19. Oktober 1926)

Ähnlich steht es mit der Definition der Begriffe: „Elektronenort, Geschwindigkeit" in der Quantentheorie. Alle Experimente, die wir zur Definition dieser Worte verwenden können, enthalten notwendig die durch [die Unbestimmheitsrelationen] angegebene Ungenauigkeit, wenn sie auch den einzelnen Begriff $p$, $q$ exakt zu definieren gestatten. Gäbe es Experimente, die gleichzeitig eine „schärfere" Bestimmung von $p$ und $q$ ermöglichen, als es [den Unbestimmheitsrelationen] entspricht, so wäre die Quantenmechanik unmöglich. Diese Ungenauigkeit, die durch [die Unbestimmheitsrelationen] festgelegt ist, schafft also erst Raum für die Gültigkeit der Beziehungen, die in den quantenmechanischen Vertauschungsrelationen

$$\boldsymbol{p}\boldsymbol{q} - \boldsymbol{q}\boldsymbol{p} = \frac{h}{2\,\pi\,i}$$

ihren prägnanten Ausdruck finden; sie ermöglicht diese Gleichung, ohne daß der physikalische Sinn der Größen $p$ und $q$ geändert werden müßte.

aus: Werner Heisenberg, Über den anschaulichen Inhalt der quantentheoretischen Kinematik und Mechanik, *Zeitschrift für Physik* **43**, 172–198 (1927).