

## 9. Übungsblatt zur Quantenphysik Sommersemester 2012

**Abgabe:** bis Mittwoch, 20. Juni 2012, 12:00 Uhr in der Holzbox vor dem Institut für Theoretische Physik

### Übung 23 (6 + 4 + 3 Punkte): Kugelflächenfunktionen

Wir betrachten die in der Vorlesung eingeführten Kugelflächenfunktionen  $Y_{\ell m}(\vartheta, \varphi)$ , welche ein vollständiges Orthonormalsystem von Eigenfunktionen zu den Operatoren  $\vec{L}^2$  und  $L_z$  bilden. Für  $\ell = 0, 1, 2$  und  $m = 0$  lauten sie:

$$Y_{00} = \frac{1}{\sqrt{4\pi}}, \quad Y_{10} = \sqrt{\frac{3}{4\pi}} \cos(\vartheta), \quad Y_{20} = \sqrt{\frac{5}{4\pi}} \left( \frac{3 \cos^2(\vartheta) - 1}{2} \right).$$

**23.1** Verwenden Sie den Aufsteigeoperator

$$L_+ = \hbar e^{i\varphi} \left( \frac{\partial}{\partial \vartheta} + i \cot(\vartheta) \frac{\partial}{\partial \varphi} \right),$$

um zu bestätigen, dass

$$Y_{11} = -\sqrt{\frac{3}{8\pi}} \sin(\vartheta) e^{i\varphi} \tag{1}$$

$$Y_{21} = -\sqrt{\frac{15}{8\pi}} \sin(\vartheta) \cos(\vartheta) e^{i\varphi}, \quad Y_{22} = \sqrt{\frac{15}{32\pi}} \sin^2(\vartheta) e^{2i\varphi}. \tag{2}$$

Überprüfen Sie auch  $L_+ Y_{00}$ ,  $L_+ Y_{11}$  und  $L_+ Y_{22}$ .

**23.2** Die Kugelflächenfunktionen sind orthonormiert. Zeigen Sie dies explizit für  $Y_{10}$  und  $Y_{11}$ .

**23.3** Skizzieren Sie  $|Y_{00}|^2$ ,  $|Y_{11}|^2$  und  $|Y_{20}|^2$  als Funktion von  $\vartheta$  im Zeigerdiagramm. Wählen Sie eine geeignete Projektionsebene.

### Übung 24 (3 + 4 Punkte): Hantelmolekül

Ein starres Hantelmolekül rotiere um den Koordinatenursprung im Raum mit zwei Freiheitsgraden, den Polarwinkeln  $\vartheta$  und  $\varphi$ . Es werde durch den Hamiltonoperator

$$H = \frac{1}{2\Theta} \vec{L}^2$$

beschrieben. Der reelle Parameter  $\Theta$  entspricht dem Trägheitsmoment der klassischen Mechanik.

**24.1** Berechnen Sie die Eigenwerte und Entartungsgrade und geben Sie die Eigenfunktionen an.

**24.2** Zu einem bestimmten Zeitpunkt befinde sich das Molekül im Zustand

$$\psi(\vartheta, \varphi) = a \left( \cos^2(\vartheta) + \sin^2(\vartheta) \cos(2\varphi) \right).$$

Stellen Sie diese Wellenfunktion durch Eigenfunktionen von  $H$  dar.

*Hinweis:* Verwenden Sie **Übung 23** sowie  $Y_{l,-m} = (-1)^m Y_{lm}^*$ .