Zum Unterschied von Verschränkung und (Anti-)Symmetrisierung der Wellenfunktion

H. D. Zeh (www.zeh-hd.de) - Mai 2014

Man findet nicht nur in Diskussionsforen, sondern auch unter professionellen Physikern und selbst Dozenten der Quantentheorie immer wieder eine Verwechslung dieser beiden Konzepte. Tatsächlich sieht etwa der antisymmetrisierte Zustand zweier Elektronen, $\varphi_a(1)\varphi_b(2)-\varphi_b(1)\varphi_a(2)$ wie ein verschränkter Zustand der beiden aus, da er kein Produkt ihrer Einteilchenzustände ist. Diese rein formale „Verschränkung" rührt jedoch allein daher, daß hier zunächst das EINE Teilchen (1) von dem ANDEREN (2) unterschieden wird, was aber keine physikalische Bedeutung hat und daher durch diese formale Prozedur der (Anti-)Symmetrisierung wieder aufgehoben werden muß. Es existiert also keine Verschränkung physikalischer Art.

Die redundante Unterscheidung der Teilchen (durch Nummern) läßt sich vermeiden, wenn man von vornherein in der Besetzungszahldarstellung argumentiert. Man spricht dann nur davon, daß z.B. ein Ort x *und* ein Ort y jeweils durch ein Elektron „besetzt" sind, und kann das im Dirac-Formalismus als $|x,y\rangle$ schreiben. Dieser Quantenzustand muß dann also nach Definition von „und" physikalisch dasselbe bedeuten wie $|y,x\rangle$. Man sollte also auch die formale Beziehung $|x,y\rangle = |y,x\rangle$ erwarten, jedoch ergibt sich für diesen Formalismus empirisch, daß das nur für Bosonen richtig ist, während für Fermionen die Beziehung $|x,y\rangle = -|y,x\rangle$ gelten muß, wenn x und y gegebenenfalls auch den Spin einschließen. Obwohl das zunächst nur ein rein formaler Unterschied ist, folgt daraus sogleich das Pauli-Prinzip in der Form $|x,x\rangle = 0$.

Allgemein kann man sich dann aber $|x,y\rangle$ stets durch $(|x,y\rangle \pm |y,x\rangle)/2$ mit dem entsprechenden Vorzeichen ersetzt denken. Ein beliebiger Zweiteilchenzustand ist dann durch die Superposition

$$|\psi\rangle = \int dxdy\; \psi(x,y)\; |x,y\rangle$$

gegeben. x und y sind hier keine Teilchennamen mehr, sondern nur Integrationsvariablen für die jeweils besetzten Orte und Spins. Offenbar trägt von $\psi(x,y)$ nun automatisch nur der (anti-)symmetrische Teil bei. Das gilt speziell auch für ein Produkt $\psi(x,y) =$

$\varphi_a(x)\varphi_b(y)$. Man kann bei einem solchen Produkt also auch sagen, daß jetzt die beliebigen Einteilchenwellenfunktionen φ_a und φ_b je einmal „besetzt“ sind, was *keiner* Verschränkung dieser beiden Einteilchenzustände (oder Feldmoden) entspricht.

Der Hintergrund dieser scheinbaren Spitzfindigkeit ist, daß ein Subsystem eines größeren Systems genau dann als *nicht* mit seinem Komplementärsystem (also dem Rest) verschränkt betrachtet wird, wenn beide in einem reinen Zustand sind – das Gesamtsystem also in deren direktem Produkt. Dabei definieren „Teilchen“ aber keine Subsysteme, da sie nicht zu unterscheiden und daher nicht als unterschiedliche „Systeme“ anzusehen sind. Wohl aber sind Einteilchenwellenfunktionen (genauer: dreidimensionale Feldmodi, also Eigenschwingungen des Feldes) unterscheidbare Subsysteme des Feldes. Man schreibt daher im Sinne eines direkten Produktes auch $|n_a,n_b,n_c,\ldots\rangle$ mit Besetzungszahlen n_i für ein vollständiges System von Feldmodi i als Basis für den allgemeinen Feldquantenzustand. Nur Feldmodi (oder ihre Zusammenfassungen etwa als vollständige Systeme für partielle Raumgebiete) können also *physikalisch* miteinander verschränkt sein – nicht aber ununterscheidbare „Teilchen“.

Sei noch angefügt, daß die (Anti-)Symmetrisierung trotzdem zu *räumlichen* Korrelationen führt, aber vornehmlich in der Umgebung von x=y. Dadurch unterscheidet sie sich auch in ihren Konsequenzen von der langreichweitigen echten Verschränkung, die etwa für die Verletzung der Bellschen Ungleichung und für Dekohärenz verantwortlich ist. Verschränkung ist, wie oben beschrieben, als eine Eigenschaft von *reinen* Gesamtzuständen definiert und kann in einem Ensemble von solchen (dargestellt durch eine Dichtematrix) also höchstens verschleiert oder „unbrauchbar“, nicht aber für die individuellen Ensemble-Mitglieder aufgehoben oder „zerstört“ werden, was bei der Definition von „Verschränkungsmaßen“ häufig mißverstanden wird.

Verständnisschwierigkeiten findet man besonders häufig bei Systemen mit Spin (wie etwa im Bellschen Experiment). Sei explizit geschrieben etwa ein Elektron im räumlichen Zustand φ_a mit Spin up (kurz φ_a^+), ein anderes in φ_b^-, so sind zwar Raumzustand und Spin korreliert, die beiden Elektronen aber nicht verschränkt, obwohl die sich ergebende Wellenfunktion antisymmetrisch ist. Das gilt auch, wenn die räumlichen Modi a und b gleich sind; in diesem Fall erhält man automatisch den Spin-Singulett-Zustand. Die Verschränkung von Raumzustand und Spin würde dagegen einen Zustand der Art $|\varphi_a^+\varphi_b^- > \pm |\varphi_a^-\varphi_b^+ >$ mit unterschiedlichen Raumfunktionen a und b verlangen. So führt etwa die *separate* (Anti-)Symmetrisierung von Spin und Raumwellenfunktionen bereits zu einer Verschränkung von Raum- und Spin-Zustand.

Die beiden Partnerteilchen in einem EPR-Gedankenexperiment sind bereits rein räumlich dadurch miteinander verschränkt, daß ihre Wellenfunktion in Schwerpunkts- und relative Koordinaten separiert, wobei die Schwerpunktswellenfunktion gewöhnlich als Delta-Funktion angenommen wird. (Spin spielt hier keine Rolle.) Dadurch können sich die beiden Partner nur in entgegengesetzten Abständen vom Ursprung befinden; man kann also den Ort des einen durch Messung am anderen bestimmen („ohne es zu stören"). Berücksichtigt man darüber hinaus auch ihre Spinzustände (wie beim Bellschen Experiment), so können die Gesamtspinzustände für sich betrachtet sowohl symmetrisch wie antisymmetrisch sein, was aber für sich betrachtet noch keine Verschränkung der Spins bedeutet. Unterscheidet man jedoch den Spin am gemessenen Ort x von dem des Partners am Ort $-x$ (anstatt durch bedeutungslose Teilchennummern), so sind auch die *dadurch spezifizierten* Spinzustände (also Spin am Ort x und Spin am Ort $-x$) verschränkt, was zur Verletzung der aus der Lokalitätsannahme resultierenden Bellschen Ungleichung führt.

Diese Situation ist ganz ähnlich im He-Atom mit seinen zwei Elektronen – nur daß deren verschränkte räumliche Wellenfunktion weit weniger trivial und darüber hinaus auch mit dem Atomkern verschränkt ist. Spin und Ort können hier auch nur insoweit als faktorisierend angenommen werden wie eine Spin-Bahn-Kopplung in der Dynamik vernachlässigbar ist (also in erster Ordnung Störungstheorie für die Energieeigenwerte). Dagegen sind Determinanten von N Einelektronenfunktionen (einschließlich Spin) *nicht* verschränkt. Für deren Verschränkung ist außer bei Entartung der Hartree-Fock-Lösung eine Aufweichung der Fermi-Kante durch die Restwechselwirkung (in der Atomphysik auch als Konfigurationsmischung bezeichnet) erforderlich.