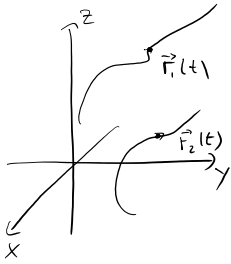


1.1 Modellannahmen

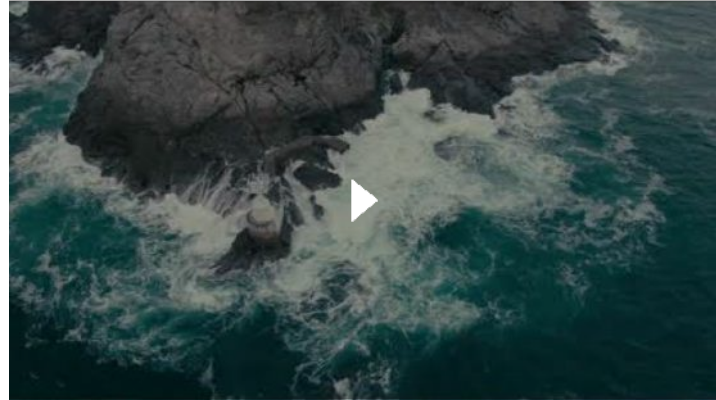
Modell: Punktteilchen im $\mathbb{R}^3$.



Das i -te Teilchen hat

- eine Masse m_i
- Ladung Q_i
- Zu jeder Zeit $t \in \mathbb{R}$ eine Position

$$\vec{r}_i(t) = \begin{pmatrix} x_i(t) \\ y_i(t) \\ z_i(t) \end{pmatrix}$$



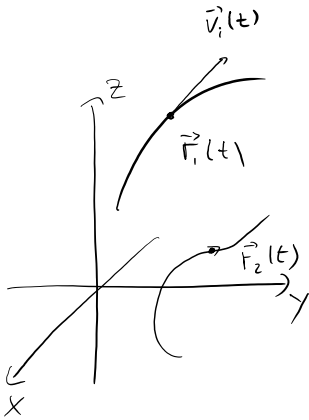
[Quelle: Free Stock Videos via YouTube, CC0]

Erfolge führten zum **mechanistischem Weltbild**: Wirklichkeit **ist** Mechanik.

Später wurden Limitierungen des Modells deutlich:

- Begriff des "Punktteilchens" problematisch. Tatsächliche Körper scheinen ausgedehnt. Punktteilchen mit elektrischer Ladung hätten unendliche Eigenenergie. (Modellbildung wird in der Theorie der starren Körper gerechtfertigt)
- SRT: Masse & Teilchenzahl nicht konstant. (Kann bei geringen Energien ignoriert werden)
- ART: euklidisches Modell keine korrekte Beschreibung der Geometrie des Raumes. (Aber auf kurzen Skalen eine gute Näherung)
- QM: Man kann Teilchen keinen definitiven Ort zuweisen. Physikalische Eigenschaften können nicht unabhängig von Beobachtern beschrieben werden! (Aber gute Näherung für große Teilchen die mit der Umgebung wechselwirken)

1.2 Bewegungsgleichungen



Dynamik $\vec{r}_i(t)$ durch Bewegungsgleichungen beschrieben.

BWG. stellen Bed. an Zeitableitungen der Bahnen:

$$\vec{v}_i(t) = \frac{d}{dt} \vec{r}_i(t)$$

(Momentan-) Geschwindigkeit

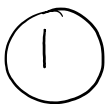
$$= \dot{\vec{r}}_i(t)$$

$$= \begin{bmatrix} \dot{x}_i(t) \\ \dot{y}_i(t) \\ \dot{z}_i(t) \end{bmatrix}$$

$$\vec{a}_i(t) = \ddot{\vec{r}}_i(t)$$

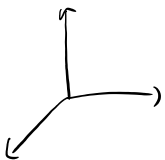
Beschleunigung

Zutaten:

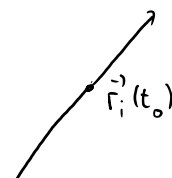


Ein *Bezugssystem* ist die Wahl eines orthonormalen Koordinatensystems im dreidimensionalen Raum.

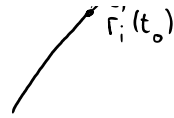
Ein Bezugssystem ist *inertial* wenn für die Bahnen von Teilchen, die unter keinem äußeren Einfluss stehen, die Beschleunigung verschwindet.



$$\ddot{\vec{r}}_i(t) = 0 \quad \Leftrightarrow \quad \vec{r}_i(t) = \underbrace{\vec{r}_i(t_0)}_{\text{Anfangsbed.}} + t \underbrace{\dot{\vec{r}}_i(t_0)}_{\text{Anfangsbed.}}$$



"geradlinig, gleichförmig"



Anmerkung:

Es ist nicht sehr klar, wie man feststellen soll, dass "kein äußerer Einfluss" wirkt. Die Definition ist daher nicht besonders befriedigend.

In der Praxis ist ein relativ zur Erdoberfläche fixiertes Koordinatensystem eine annehmbare Annäherung an ein Inertialsystem. Ein im luftleeren Raum frei fallendes System (z.B. im Orbit um die Erde) ist deutlich besser.

Fürs erste nehmen wir an, dass alle Koordinatensysteme mit denen wir arbeiten, inertial sind.

2

Beschleunigung ist proportional zu einer *Kraft*.

$$(\vec{F} = m \cdot \vec{a})$$

$$\ddot{\vec{r}}_i(t) = \frac{1}{m_i} \vec{F}_i(\vec{r}(t), \dot{\vec{r}}(t), t)$$

Anmerkungen:

- Kräfte hängen i.d.R. nur von den Orten, der Zeit und den Geschwindigkeiten ab.
- Die Formel $F = m \cdot a$ definiert erst mal nur eine neue Größe. Um Vorhersagen zu ermöglichen, braucht man eine weitere Zutat:

3

Regeln, um den Kraftvektor in physikalisch relevanten Situationen zu berechnen.

3.1

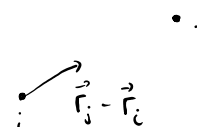
Eine Liste *fundamentaler Kraftgesetze*:

Bsp.: • Gravitation

$$\vec{F}_{ij} = m_i m_j G \frac{\vec{r}_j - \vec{r}_i}{\|\vec{r}_j - \vec{r}_i\|^3}$$

wirkt auf
i-tes Teilchen

durch j-tes
Teilchen



• Coulomb $\vec{F}_{ij} = - \frac{e_i e_j}{4\pi \epsilon_0} \frac{\vec{r}_j - \vec{r}_i}{\|\vec{r}_j - \vec{r}_i\|^3}$

⋮

• Alle fund. Kraftgesetze erfüllen $\vec{F}_{ij} = - \vec{F}_{ji}$

3.2 Superpositionsprinzip: Gesamtkraft ist die Summe aller individuellen Kräfte

$$\vec{F}_i = \sum_j \vec{F}_{ij}$$

Die drei "Zutaten" sind angelehnt an, aber nicht identisch mit, den "Drei Newtonschen Gesetzen".

Tatsächlich sind die "Gesetze" von Newton keine Gesetze im modernen Sinn. D.h. sie sind nicht ein vollständiges System von Axiomen, aus denen sich die Theorie ableiten lässt.

Das erste Gesetz "In Abwesenheit äußerer Einflüsse bewegen sich Teilchen geradlinig und gleichförmig" ist eher eine Definition (nämlich eines Inertialsystems) als ein Gesetz, und die "Abwesenheit von Einflüssen" ist schwer festzustellen.

Das zweite Gesetz " $F = m a$ " ist auch mehr Definition (der Kraft) als ein Gesetz, das Vorhersagen ermöglicht. Schließlich ist **jede** Bahn damit kompatibel - man setze einfach $F(t) := m a(t)$. Erst zusammen mit spezifischen Kraftgesetzen erhält man eine Theorie, die geprüft werden kann.

Das dritte Gesetz "Kraft = Gegenkraft" schränkt die möglichen Kraftgesetze ein wenig ein. Hieraus kann man schon erste Konsequenzen ableiten (z.B. Impulserhaltung -- dazu später mehr). Aber warum ausgerechnet dieser eine Aspekt fundamentaler Kräfte den Status eines Gesetzes erlangt hat, und deren anderen Eigenschaften nicht, ist nicht offenbar.

Man sieht hier einen Unterschied zwischen mathematischer und physikalischer Tradition.

Mathematiker sind "Geschichtsrevisionisten". Sie erforschen eine Theorie - und sobald sie gut verstanden ist, wird die

ursprüngliche Formulierung vergessen, und durch eine minimalistische, stringente Version ersetzt.

Physiker sind eher traditionsbewusst und wiederholen alten Konzepte, auch wenn sie aus moderner Sicht nicht mehr ideal sind.

(Philosophen sind natürlich noch um einiges extremer. Dort wird die Meinung der ursprünglichen Autoren so hoch geschätzt, dass man sogar Originalquellen liest... Abstrus, oder?)

1.3 Ziele der Mechanik

Gegeben Bewegungsgleichungen:

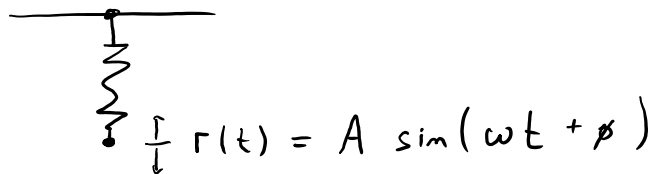
$$N = 3m \quad \left\{ \begin{array}{l} \ddot{\vec{r}}_1(t) = \frac{1}{m_1} \vec{F}_1(\vec{r}, \dot{\vec{r}}, t) \\ \vdots \\ \ddot{\vec{r}}_m(t) = \frac{1}{m_m} \vec{F}_m(\vec{r}, \dot{\vec{r}}, t) \end{array} \right.$$

Freiheits-
grade
(FHG)

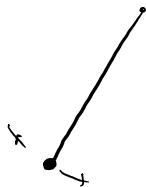
$$\vec{r} := \begin{pmatrix} r_1 \\ r_2 \\ r_3 \\ r_4 \\ \vdots \\ r_N \end{pmatrix} := \begin{pmatrix} x_1 \\ y_1 \\ z_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ z_m \end{pmatrix}$$

Mögliche Ziele:

- Explizite Lösung durch elementare Funktionen



- Explizite Lösung mit Funktionen, die durch eindimensionale Integrale definiert sind ("Quadraturen")



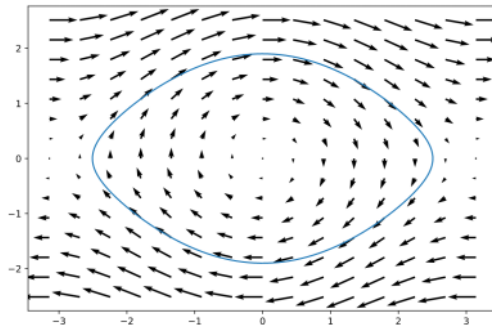
$$L(\phi) = \sqrt{\frac{m l^2}{2}} \int_0^\phi \frac{1}{\sqrt{E - 2mgl \sin^2 \frac{\phi'}{2}}} d\phi'$$

- Explizite Lösung vereinfachter, approximativer Bewegungsgleichungen

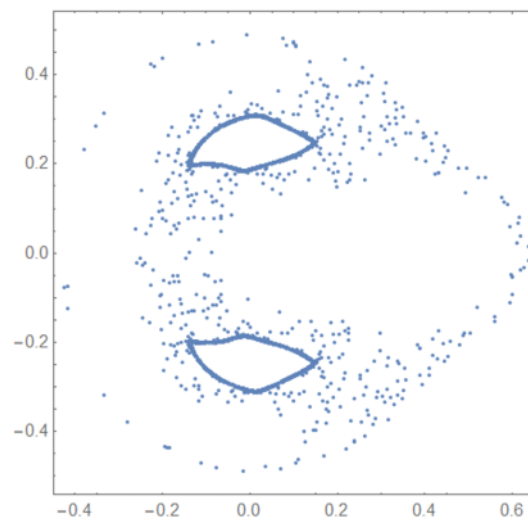
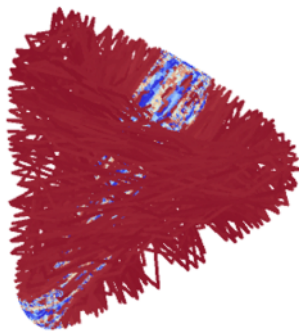
$$H \quad 0 \quad H$$

• — *mm* — • — *mm* — •

- Lösung durch numerische Integration



- Aussagen über qualitatives Verhalten
 - Ungebunden, gebunden, periodische Lösungen
 - Stabil vs. chaotisch



2. Newtonsche Mechanik am Beispiel von eindimensionalen Systemen

Zum Aufwärmen analysieren wir im Detail die Dynamik von Systemen mit einem Freiheitsgrad.

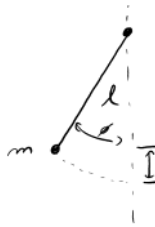
Ziele

Sie werden:

- ...lernen, Bewegungsgleichungen im Phasenraum zu formulieren und qualitative Eigenschaften dynamischer Systeme am Phasenraumportrait abzulesen;
- ...Bewegungsgleichungen numerisch lösen
- ...den Begriff der Energie einführen und sehen, wie man mit diesem Konzept eindimensionale Systeme mittels Quadraturen lösen kann,
- ...Kontakt mit speziellen Funktionen machen.

Beispiel

Unser Hauptbeispiel ist das *mathematische Pendel*:



ein Punktteilchen mit Masse m , das an einer starren Aufhängung der Länge l befestigt ist. Wenn man es aus der unteren Ruhelage um den Winkel ϕ auslenkt, wirkt eine Rückstellkraft mit dem Betrag

$$F(\phi) = -mg \sin(\phi)$$

Für kleine Auslenkungen, kann man den Sinus um 0 herum zur ersten Ordnung nach Taylor approximieren und erhält

$$F(\phi) \approx -mg \phi \quad (\phi \ll 1).$$

Dieses approximative Modell nennt man das *harmonische Pendel*.

(Es gibt auch das *physikalische Pendel*. Dort hat das Gewicht endliche Ausdehnung und wird nicht als Punktmasse modelliert).

Anwendungen

Die Resultate in diesem Kapitel haben verschiedene Anwendungen.

- Da der physikalische Raum drei Dimensionen hat, ist es erst mal nicht offensichtlich, dass Systeme mit nur einem Freiheitsgrad physikalisch sind. Wir werden später sehen, dass man Freiheitsgrade aus dem Modell eliminieren kann, wenn sie durch *Zwangskräfte* eingeschränkt sind. Im Fall des Pendels, z.B., kann man sich vorstellen, dass die Masse an einem stabilen Stab befestigt ist. Wenn man versucht, sie in Richtung Aufhängung zu bewegen, übt der Stab eine starke "Zwangskraft" in die Gegenrichtung aus. Die Details besprechen wir in der *Lagrangemechanik*.
- Im nächsten Kapitel - zum Zweikörperproblem - werden wir sehen, dass man z.B. die Bewegungsgleichungen von zwei Himmelskörpern auf ein eindimensionales Problem reduzieren kann.
- Viele der Begriffe aus diesem Kapitel werden Ihnen in den ersten Wochen der Quantenmechanik-Vorlesung wieder begegnen.

2.1 Dynmaik im Phasenraum

Newton'sche BW Gl.:

$$(N) \quad \ddot{\vec{r}}(t) = \frac{1}{m} \vec{F}(\vec{r}(t), \dot{\vec{r}}(t))$$

Schreibe um in 2 gekop. DGLn 1. Ordnung.

Dazu: $\vec{v}(t) = \dot{\vec{r}}(t)$

Dann:

$$(N) \Leftrightarrow \begin{cases} \dot{\vec{r}}(t) = \vec{v}(t) \\ \dot{\vec{v}}(t) = \frac{1}{m} \vec{F}(\vec{r}(t), \vec{v}(t)) \end{cases}$$

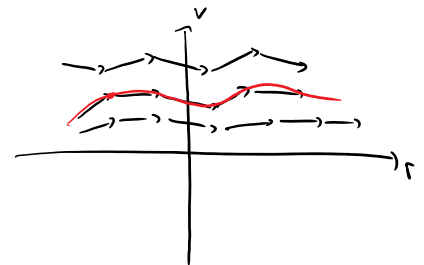
$$\vec{X}(t) = \begin{pmatrix} \vec{r}(t) \\ \vec{v}(t) \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^2$$

Phasenraum

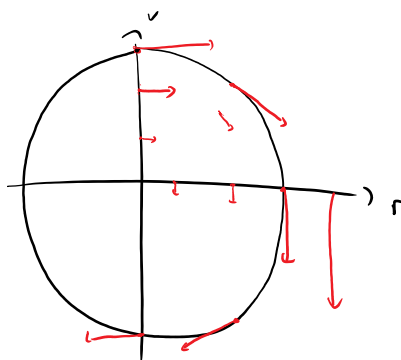
$$\vec{F}(\vec{x}) = \begin{pmatrix} v \\ \frac{1}{m} F(r, v) \end{pmatrix}$$

Vektorfeld (der Kraft $\vec{F}$).

$$(N) \Leftrightarrow \boxed{\frac{d}{dt} \vec{X}(t) = \vec{F}(\vec{X}(t))}$$



Bsp.: Harmon. Osz. $m=1, k=1. \leadsto \vec{F}(\vec{r}) = -\vec{r}$



$$\leadsto \vec{F}\left(\begin{pmatrix} r \\ v \end{pmatrix}\right) = \begin{pmatrix} v \\ -r \end{pmatrix}$$

Für $\vec{X}(t)$ rate:

$$\vec{X}(t) = \begin{pmatrix} a \sin t \\ a \cos t \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} r(t) \\ v(t) \end{pmatrix}$$

Test:

$$1 \quad \dots \quad (a \cos t) \quad \leadsto \quad \dots$$

Test :

$$\frac{d}{dt} \vec{x}(t) = \begin{pmatrix} a \cos t \\ -a \sin t \end{pmatrix} = \vec{F}(\vec{x}(t))$$

Gegeben ein V.F. $\vec{F}$. Eine Bahnkurve $\vec{x}(t)$ mit

$$\frac{d}{dt} \vec{x}(t) = \vec{F}(\vec{x}(t))$$

nennt man Integralkurve des V.F.

2.1.1 Computerimplementierung

<http://www.thp.uni-koeln.de/gross/tp1-blog/posts/pendel-phasenraum/>

Phasenraumfluss

Bewegungsgleichung für das mathematische Pendel:

$$\ddot{\phi}(t) = -\sin \phi(t). \quad (1)$$

Wir führen eine Variable $v(t)$ für die erste Zeitableitung ein

$$v(t) = \dot{\phi}(t).$$

Dann ist (1) äquivalent zu diesem System aus zwei gekoppelten DGL'en erster Ordnung

$$\begin{aligned} \dot{\phi}(t) &= v(t) \\ \dot{v}(t) &= -\sin \phi(t). \end{aligned} \quad (2)$$

```
import numpy as np
import matplotlib.pyplot as plt

# Erzeuge das Richtungsvektorfeld, dass durch die rechte Seite von (2) gegeben ist.

# Definitionsbereich: Ein Gitter von 15 x 15 Punkten im Bereich
# -2 pi ... 2 pi (für phi),
# - pi ... pi (für v).

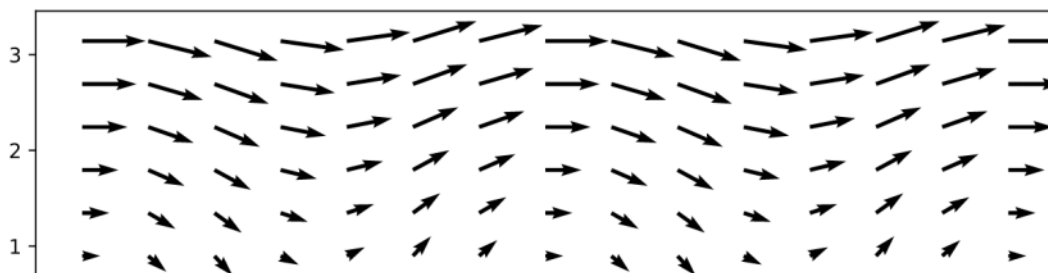
phi, v = np.meshgrid(np.linspace(-2*np.pi, 2*np.pi, 15), np.linspace(np.pi, -np.pi, 15))

# Berechne das Vektorfeld wie in Formel (2)

F_phi = v
F_v = -np.sin(phi)

# Matplotlib kann Vektorfelder mit einem "Quiver-Plot" visualisieren

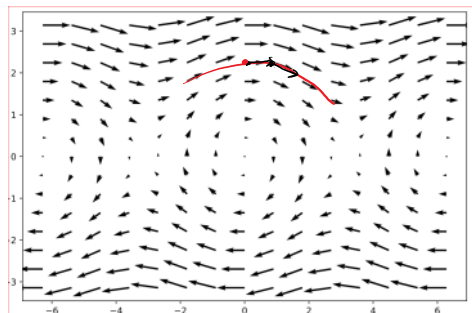
plt.quiver(phi, v, F_phi, F_v);
```



•
•
•

2.1.2 Euler-Verfahren

Gegeben Anfangsbedingung $\vec{x}(0) = \vec{y}$, finde $\vec{x}(t)$.



Euler:

- Wähle "kleines" Zeitintervall τ .

• Für

$$t = 0$$

$$t \in (0, \tau]$$

$$t \in [\tau, 2\tau]$$

⋮

Setze

$$\vec{x}(0) = \vec{y}$$

$$\vec{x}(t) = \vec{x}(0) + t \vec{f}(\vec{x}(0))$$

$$\Rightarrow \frac{d}{dt} \vec{x}(t) = \vec{f}(\vec{x}(0)) \approx \vec{f}(\vec{x}(t)) \quad (*)$$

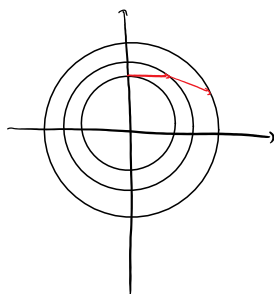
$$\vec{x}(t) = \vec{x}(\tau) + (t - \tau) \vec{f}(\vec{x}(\tau))$$

⋮

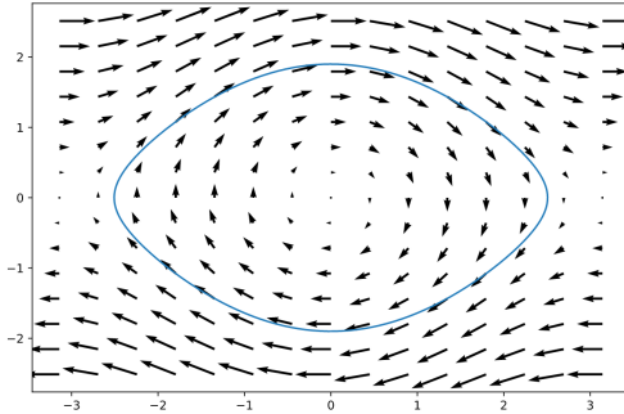
Wenn das Vektorfeld stetig ist, und τ klein im Vergleich zu den Skalen, auf denen sich das Vektorfeld ändert, dann ist der Approximationsfehler in (*) klein. Tatsächlich kann man zeigen, dass für feste Maximalzeit T und stetiges Vektorfeld, das Eulerverfahren im Limes $\tau \rightarrow 0$ exakt ist.

Allerdings konvergiert das Eulerverfahren sehr schlecht. In der Computerphysik werden Sie bessere Methoden kennenlernen.

Man kann leicht sehen, dass das Eulerverfahren für Probleme mit periodischen Lösungen dazu neigt, zu immer energiereicheren Lösungen zu springen. Vergl. VL.



2.1.3 Picard-Lindelöf: Existenz und Eindeutigkeit von Lösungen der Bewegungsgleichungen



Legen BW Gen die Zukunft eindeutig fest?

Also: hat

$$\frac{d}{dt} \vec{x}(t) = \vec{f}(\vec{x}(t)), \quad \vec{x}(t_0) = \vec{y}$$

immer eindeutige Lsg.?

Globale Version des Satzes von Picard-Lindelöf [\[Bearbeiten\]](#)

[Quelltext bearbeiten](#)

Es sei E ein Banachraum und $f: [a, b] \times E \rightarrow E$ eine stetige Funktion, die eine globale Lipschitz-Bedingung bezüglich der zweiten Variablen erfüllt. Dann gibt es zu jedem $y_0 \in E$ eine globale Lösung $y: [a, b] \rightarrow E$ des Anfangswertproblems

$$y' = f(\cdot, y), \quad y(a) = y_0.$$

Es gibt keine weiteren (lokalen) Lösungen.

Wörterbuch

Picard-Lind.	TP I
E	$\mathbb{R}^2, \quad \ \vec{x}\ = \sqrt{r^2 + v^2}$
y	$\vec{x}(t)$
$[a, b]$	Zeitintervall
$f(\cdot, y)$	$\vec{f}(t, \vec{x}(t))$
$y' = f(\cdot, y)$	$\frac{d}{dt} \vec{x}(t) = \vec{f}(t, \vec{x}(t))$

Lipschitz: $\left\| \vec{\nabla}_{\vec{x}} \vec{f} \right\| < C \quad \forall \vec{x}, t$

... $\Leftrightarrow |F'(r)| < C' \quad \forall r.$

• Mathemat. Pendel: $|F'(\varphi)| = |\cos \varphi| \leq 1.$ ✓

- Coulomb / Gravitation:



Also: Wenn das Vektorfeld hinreichend stetig ist, gibt es immer eine Lösung zu den Bewegungsgleichungen. Diese ist eindeutig.

Folgerung: Mechanische Systeme können Fixpunkte der Dynamik nie erreichen.

Warum?



2.2 Energiesatz

Von jetzt an:

$$\vec{F} = \vec{F}(r), \quad \text{nicht Fkt. von } \dot{r}, t.$$

Definieren:

- $T(v) = \frac{1}{2} m v^2$ Kinetische Energie

- Wähle ein $r_0 \in \mathbb{R}$,

$$U(r) = - \int_{r_0}^r \vec{F}(r') dr' \quad \text{Potentielle Energie}$$

- $H(r, v) = T(v) + U(r)$ Gesamtenergie

Energiesatz Sei $r(t)$ Lsg der BW Gl.:

$$\ddot{r}(t) = \frac{1}{m} \vec{F}(r(t))$$

Dann gilt:

$$\frac{d}{dt} H(r(t), \dot{r}(t)) = 0.$$

Also es gibt ein $E \in \mathbb{R}$ s.d. $H(r(t), \dot{r}(t)) = E \quad \forall t$.

Bew.:

$$\frac{d}{dt} T(\dot{r}(t)) = \frac{dT}{dv}(\dot{r}(t)) \ddot{r}(t) = m \dot{r}(t) \ddot{r}(t) = \dot{r}(t) \vec{F}(r(t))$$

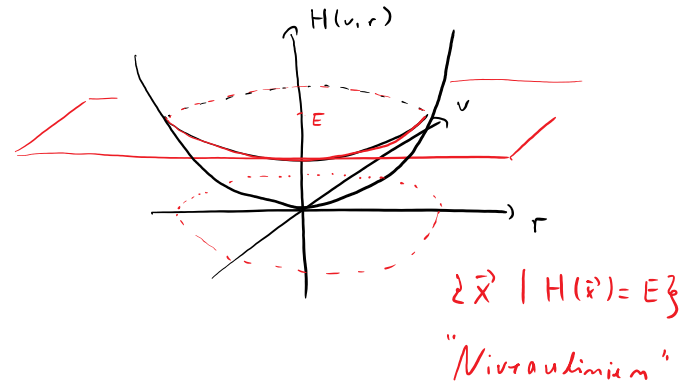
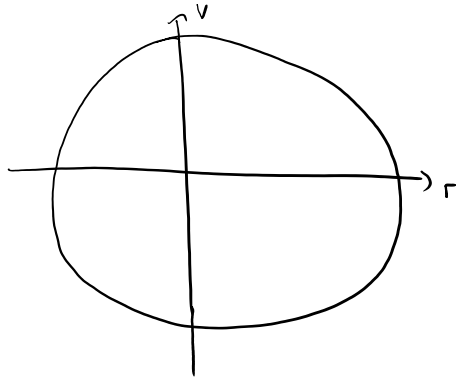
$$\frac{d}{dt} U(r(t)) = \frac{dU}{dr}(r(t)) \dot{r}(t) = - \vec{F}(r(t)) \dot{r}(t).$$

Bsp.: Harmon. Osz. $m = k = 1$.

$$\ddot{r} = -r \quad \Rightarrow \quad r(t) = A \cos(t) + B \sin(t) \quad \Rightarrow \quad \dot{r}(t) = -A \sin(t) + B \cos(t)$$

Bsp.: Harmon. Osz. $m = k = 1$.

$$T(v) = \frac{1}{2} m v^2, \quad U(r) = \frac{1}{2} r^2, \quad H(v, r) = \frac{1}{2} \|\vec{x}\|^2.$$



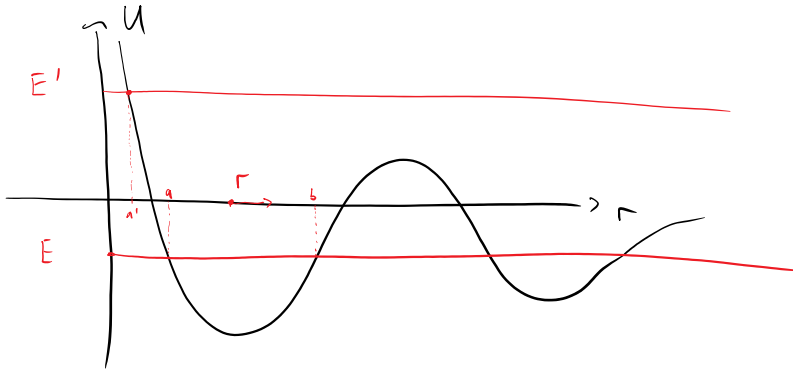
Bemerkung

Wir sind drei Objekten begegnet, die alle die Interpretation einer "Energie" haben, die aber als mathematische Objekte sehr unterschiedlich sind.

Bitte nicht verwirren lassen!

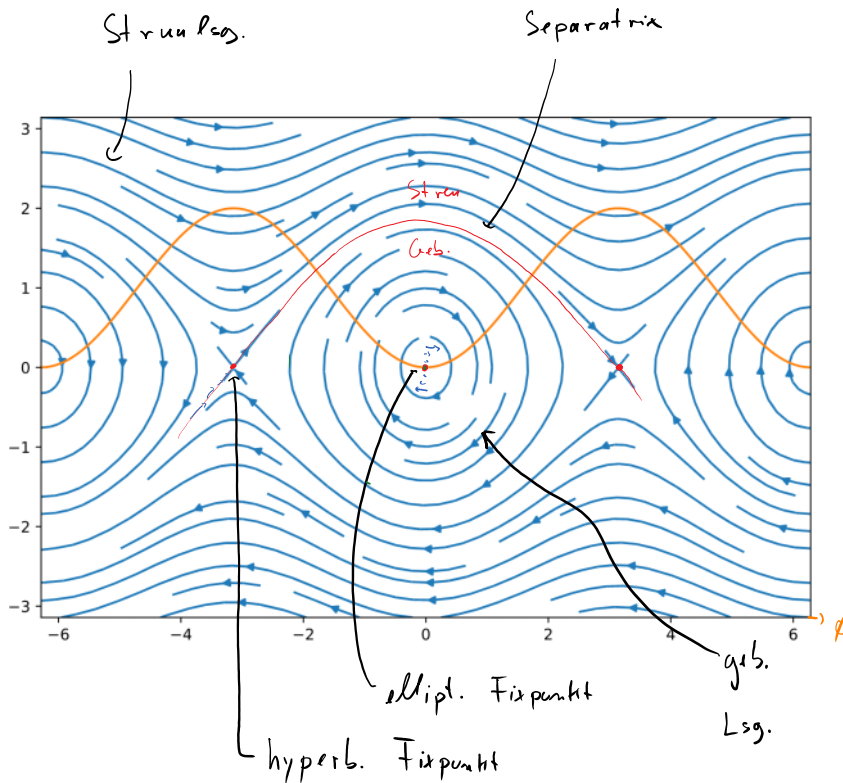
- $H: \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$ $\vec{x} \mapsto H(\vec{x})$
- Gegeben $r(t), \quad H(r(t), \dot{r}(t)) : \quad \underline{\mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}}$
- $E \in \mathbb{R}$ s.d. $H(r(t), \dot{r}(t)) = E$

2.3 Qualitative Analyse eindimensionaler Dynamik



Bahnen in 1-D sind auf Intervalle $[a, b]$ beschränkt.

- Wenn $a = -\infty$ oder $b = \infty$ dann: Streulösung.
 - Ansonsten: gebundene Lsg.
- Wendepkte: $U(a) = U(b) = E$.



— Potential $1 - \cos \phi$

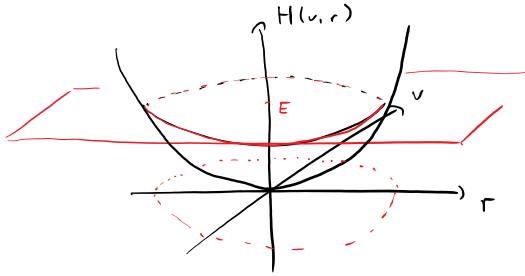


math. Pendel



Erlöse auf Wellblech.

2.4 Lösung durch Quadraturen



Idee: Benutze Energiesatz, um die Dimension des Problems von zwei auf eins zu reduzieren.

$$E = \frac{1}{2} m \dot{r}(t)^2 + U(r(t)) \Leftrightarrow \dot{r}(t) = \pm \sqrt{\frac{2}{m} (E - U(r(t)))}$$

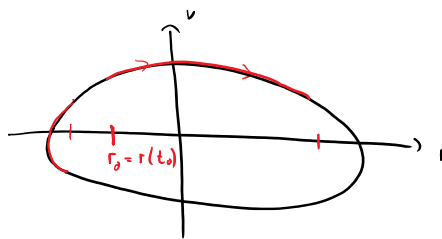
Eine DGL 1. Ordnung.

Trennung der Variablen

Gegeben DGL $\frac{dr(t)}{dt} = f(r(t))$ für explizit bekannte Fkt. $f(r)$.

Schwierigkeit: Rechte Seite hängt von noch unbekannter Fkt. $r(t)$ ab.

Trick: Stelle Gl. für Umkehrfkt. $t(r)$ auf!



$r(t)$ invertierbar, auf Intervallen, die keinen Wendepkt. enthalten.

$$\Rightarrow \frac{dt(r)}{dr} = \frac{1}{f(r)}$$

↑ bekannte Fkt. $f(r)$! $\Rightarrow$ kann direkt integrieren!

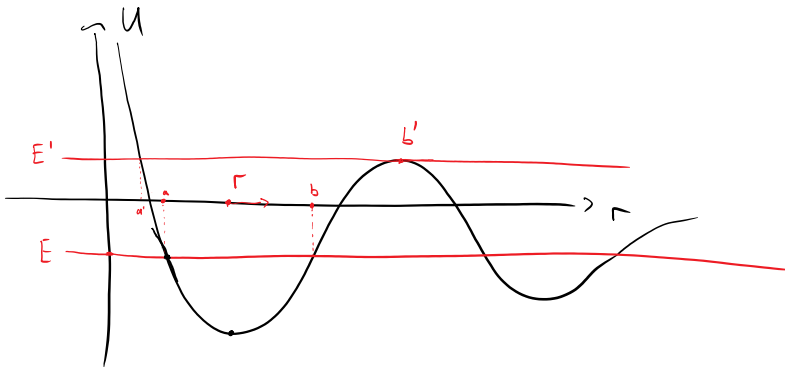
$$\Rightarrow t(r) = \int_{r_0}^r \frac{1}{f(r')} dr' + t(r_0).$$

Allgemeines Rezept: Lösung der BWGen für Potential $U(r)$ in zwei Schritten:

$$\textcircled{1} \quad t(r) = \sqrt{\frac{m}{2}} \int_{r_0}^r \frac{1}{\sqrt{E - U(r')}} dr' + t_0$$

$\textcircled{2}$ Invertiere.

2.5 Periodendauer



Betrachte Lösung $r(t)$, die im Intervall $[a, b]$ gebunden ist.

Periodendauer:

$$\tau = 2 \sqrt{\frac{m}{2}} \int_a^b \frac{1}{\sqrt{E - U(r')}} dr'$$

Achtung: Integrand divergiert bei a/b .

Frage: Wann ist $\tau < \infty$?
 $= \infty$?

Um herauszufinden, ob die Period endlich ist, gehen wir wie folgt vor:

1. Wähle eine positive Zahl ϵ hinreichend klein, sodass das Potential um die Wendepunkte herum in erster Ordnung Taylor gut beschrieben wird.
2. Auf dem Intervall $[a + \epsilon, b - \epsilon]$ ist der Integrand beschränkt, das Integral also endlich. (Physikalisch: Da dort die kinetische Energie positiv ist, ist auch die Geschwindigkeit positiv und daher die Verweildauer endlich). Potentiell unendlich lange kann man sich höchstens in einer Umgebung der Wendepunkte aufhalten. Also schauen wir uns das Integral nur auf dem Intervall $[a, a + \epsilon]$ an.

Zwei Fälle:

Ⓘ a kein lokaler Extrempunkt des Potentials.

$$\leadsto U(a + \epsilon) \approx E - C \cdot \epsilon$$

$$\int_a^{a+\epsilon} \frac{1}{\sqrt{E - U(r')}} dr' = \frac{1}{\sqrt{C}} \int_0^\epsilon \frac{1}{\sqrt{\epsilon'}} d\epsilon' = 2 \frac{\sqrt{\epsilon}}{\sqrt{C}} < \infty!$$

Ⓜ a ist lokales Maximum (hier: 2. Ordnung, allgemeiner Fall analog).

$$U(a + \epsilon) \approx E - C \epsilon^2$$

$$\frac{1}{\sqrt{C}} \int_0^\epsilon \frac{1}{\epsilon'} d\epsilon' = \frac{1}{\sqrt{C}} [\ln \epsilon']_0^\epsilon = \infty.$$

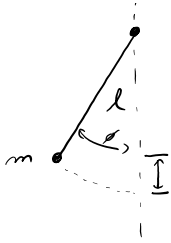
$\Rightarrow$ Gebundene Lsg. sind:

- Periodisch, $r(t) = r(t+\tau)$ wenn WP a/b keine Extremalpkt. von U sind

oder

- Kriechlösungen, die ∞ langsam auf Maximum zulaufen

2.6 Analytische Lösung des mathematischen Pendels



$$U(\phi) = mgl(1 - \cos\phi) = 2mgl \sin^2 \frac{\phi}{2}$$

$$T(\dot{\phi}) = \frac{1}{2} m l^2 \dot{\phi}^2 \quad (v = l \dot{\phi})$$

$$\Rightarrow t(\phi) = \sqrt{\frac{ml^2}{2}} \int_0^{\phi} \frac{1}{\sqrt{E - 2mgl \sin^2 \frac{\phi'}{2}}} d\phi'$$

$$= \underbrace{\sqrt{\frac{ml^2}{2E}}}_{\sqrt{\frac{ml^2}{4mglk^2}}} \int_0^{\phi} \frac{1}{\sqrt{1 - \underbrace{\frac{2mgl}{E} \sin^2 \frac{\phi'}{2}}_{1/k^2}}} d\phi'$$

$$= \frac{1}{\omega k} \int_0^{\phi/2} \frac{1}{\sqrt{1 - \frac{1}{k^2} \sin^2 \phi'}} d\phi'$$

$$\stackrel{A 17.2.6}{=} \frac{1}{\omega k} F\left(\frac{\phi}{2} \mid \frac{1}{k^2}\right)$$

[A] http://people.math.sfu.ca/~cbm/aands/abramowitz_and_stegun.pdf

$$\stackrel{A 17.4.15}{=} \frac{1}{\omega} F(\alpha \mid k^2)$$

$$\sin \alpha = \frac{1}{k} \sin \frac{\phi}{2}$$

$$\Leftrightarrow \phi = 2 \arcsin(k \sin \alpha)$$

Invertiere (A 16.1.4)

$$\alpha = \operatorname{am}(\omega t \mid k^2)$$

Üblicher: $\sin \operatorname{am}(\cdot \mid k^2) =: \operatorname{sn}(\cdot \mid k^2)$

Jacobische Elliptische Fkt.

Abkürzungen

$$\omega = \sqrt{\frac{g}{l}} \quad \text{Eigenfreq. im Limes } \phi \ll 1$$

$$k = \sqrt{\frac{E}{2mgl}} \quad \text{Wurzel Energie im Einheiten der max. Pot. Energie}$$

$$\Leftrightarrow E = 2mgl k^2$$

Jacobische Elliptische Fkt.

$$\Rightarrow \alpha = \arcsin \operatorname{sn}(\omega t | k^2)$$

$$\Rightarrow \phi = 2 \arcsin(k \cdot \operatorname{sn}(\omega t | k^2)) \quad \text{😊}$$

Mit $\phi(0) = 0$:

$$\Rightarrow k = \sqrt{\frac{E}{2mg\ell}} = \sqrt{\frac{m\ell^2 \dot{\phi}(0)^2}{4mg\ell}} = \frac{1}{2\omega} \dot{\phi}(0)$$

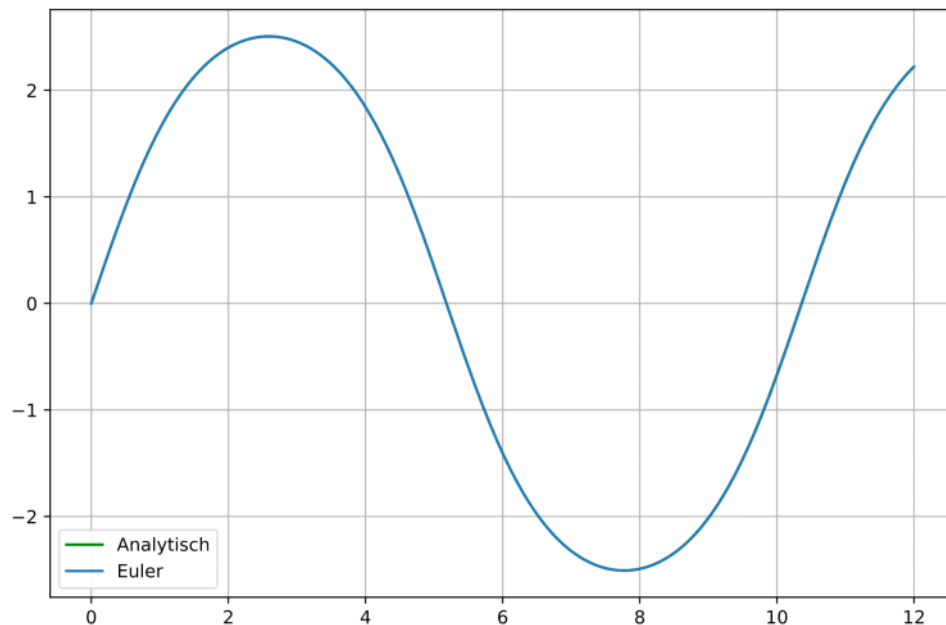
Analytische Lösung

```
[55]: k=0.5*vs[0]

plt.plot(ts, [ 2*np.arcsin(k*spec.ellipj(t,k**2)[0]) for t in ts], 'g', label='Analytisch')

plt.plot(ts, phis, label='Euler')

plt.legend(loc='best')
plt.xlabel('t')
plt.grid()
```



3. Das Zweikörperproblem

Newtons Lösung des Zweikörperproblems markierte den Beginn der klassischen Mechanik.

Unser Ziel in diesem Kapitel ist es, die Dynamik von zwei Massenpunkten im dreidimensionalen Raum zu verstehen, wobei die Kräfte entlang der Verbindungslinie zwischen den beiden Körpern wirken. Das Problem umfasst insbesondere die Gravitations- und die Coulomb-Wechselwirkung, die sehr explizit behandelt werden können.

Zwei glückliche Umstände waren für die Entwicklung der Physik von zentraler Bedeutung:

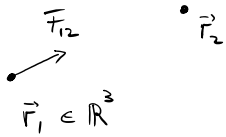
1. Bewegungsgleichungen mit sechs Freiheitsgraden sind in der Regel *nicht* explizit lösbar (wir werden das Problem in der Chaostheorie genauer verstehen). Das Zweikörperproblem beschreibt nicht nur die wichtigen Wechselwirkungen der Physik -- es ist auch ganz untypisch einfach mathematisch handhabar. Warum die Welt es uns so vergleichsweise einfach macht ist [viel diskutiert](#) worden.
2. Bewegungen auf der Erde sind durch Reibung und Luftwiderstand verkompliziert. Die Bahnen der Planeten, hingegen, kommen fast nur unter dem Einfluss der Gravitation zustande und waren genau studiert. Durch die Himmelsmechanik konnten wir die Gesetze entdecken, die sich später als auch auf der Erde gültig herausgestellt haben.

Einige der Themen in diesem Kapitel sind absolut zentral für die Physik. So sollten Sie sehr gut verstehen und nicht wieder vergessen:

- die Erhaltungsgrößen des Zweikörperproblems (Gesamtimpuls, Drehimpuls, Energie) und ihre Rolle bei der Lösung,
- die Beschreibung durch ein effektives eindimensionales Potentialproblem. Einige speziellere Themen, wie die Definition des Runge-Lenz-Vektors, oder die Feinheiten der Geometrie von Ellipsen sind für diese Vorlesung zwar wichtig -- wenn Sie aber die Details in Zukunft nicht immer parat haben, ist das nicht so tragisch.

Im nächsten Semester werden Sie Gelegenheit haben, einige der Methoden zu wiederholen: Wir werden sie in der QM1-Vorlesung benötigen, um die Spektrallinien des Wasserstoffatoms auszurechnen.

3.1 Reduktion auf ein Teilchen unter Zentralkraft



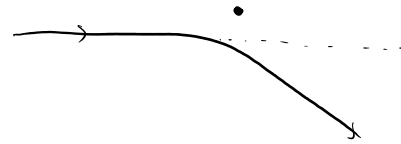
$$\vec{F}_{ij}(\vec{r}_i, \vec{r}_j) = f(\|\vec{r}_j - \vec{r}_i\|) \frac{\vec{r}_j - \vec{r}_i}{\|\vec{r}_j - \vec{r}_i\|}$$

Bsp:

- Planet im Schwerfeld der Sonne



- Streuung von α -Teilchen an Atomkernen



Ziel dieser Lektion:
reduziere BWGen auf die für **ein** Teilchen unter der Wirkung einer **Zentralkraft**.

Dazu:

Def.:

- $M = m_1 + m_2$

Gesamtmasse

- $\vec{r}_S = \frac{m_1}{M} \vec{r}_1 + \frac{m_2}{M} \vec{r}_2$

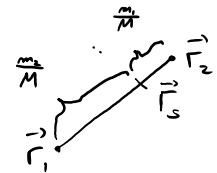
Schwerpunktskoord.

- $\vec{p}_S = M \cdot \dot{\vec{r}}_S$

Gesamtimpuls

- $\vec{r} = \vec{r}_1 - \vec{r}_2$

Relativkoordinaten



$\leadsto \vec{r}_S(t), \vec{r}(t)$ beschreiben vollständig $\vec{r}_1(t), \vec{r}_2(t)$.

Warum dieser Koordinatenwechsel?

Darum:

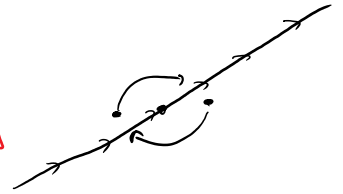
$$\frac{d}{dt} p(t) = m_1 \ddot{\vec{r}}_1 + m_2 \ddot{\vec{r}}_2 = \vec{F} + \vec{F} = 0$$

Darum:

$$\frac{d}{dt} \vec{p}_S(t) = m_1 \ddot{\vec{r}}_1 + m_2 \ddot{\vec{r}}_2 = \vec{F}_{12} + \vec{F}_{21} = 0.$$

Erhaltungsgröße!

$$\Rightarrow 0 = \ddot{\vec{r}}_S(t) \Rightarrow \boxed{\vec{r}_S(t) = \vec{r}_S(0) + t \dot{\vec{r}}_S(0)}$$



Es bleiben: BW Gen für $\vec{r}$:

$$\boxed{\ddot{\vec{r}}} = \ddot{\vec{r}}_1 - \ddot{\vec{r}}_2 = \frac{1}{m_1} \vec{F}_{12} + \frac{1}{m_2} \vec{F}_{12}$$

$$= \frac{m_2 + m_1}{m_1 \cdot m_2} f(\|\vec{r}_2 - \vec{r}_1\|) \frac{\vec{r}_2 - \vec{r}_1}{\|\dots\|}$$

$$\boxed{= \frac{1}{\mu} (-f(r)) \hat{r}}$$

$\sim \vec{r}$ "Zentralkraft"

Def.:

$$\bullet \mu := \frac{m_1 \cdot m_2}{m_1 + m_2} \quad \text{reduzierte Masse}$$

$$\bullet r := \|\vec{r}_2 - \vec{r}_1\|$$

$$\bullet \hat{r} := \frac{\vec{r}}{r}$$

3.2 Drehimpulserhaltung unter Zentralkräften

$$(Z) \quad \ddot{\vec{r}} = \frac{1}{\mu} (-f(r)) \hat{r}$$

Def.: $L(\vec{r}, \vec{v}) = \mu \vec{r} \times \vec{v}$ Drehimpuls.

Dann: Wenn $\vec{r}(t)$ (Z) erfüllt, dann

$$\frac{d}{dt} \vec{L}(\vec{r}(t), \dot{\vec{r}}(t)) = 0.$$

Bew.: $\frac{d}{dt} (\mu \vec{r} \times \dot{\vec{r}}) = \mu \underbrace{\dot{\vec{r}} \times \dot{\vec{r}}}_{=0} + \mu \underbrace{\vec{r} \times \ddot{\vec{r}}}_{\substack{(Z) \sim \vec{r} \\ =0}} = 0 \quad \square$

Also: Für jede Lsg. $\vec{r}(t)$ von (Z) gibt es ein $\vec{l} \in \mathbb{R}^3$ s.d.

$$\vec{L}(\vec{r}(t), \dot{\vec{r}}(t)) = \vec{l} \quad \forall t.$$

Schreibe...

... als

$$\vec{L} : \mathbb{R}^3 \times \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}^3$$

$$\vec{r}, \vec{v} \mapsto \vec{L}(\vec{r}, \vec{v})$$

$$\vec{L}$$

Gegeben Bahn $\vec{r}(t)$:

$$\vec{L} : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}^3$$

$$t \mapsto \vec{L}(\vec{r}(t), \dot{\vec{r}}(t))$$

$$\vec{L}$$

$$\vec{L} \in \mathbb{R}^3$$

$$\vec{L}$$

3.3 Die Ekliptik und das zweite Keplersche Gesetz

Drehimpulserhaltung: $\vec{L} = \mu \vec{r}(t) \times \dot{\vec{r}}(t) = \text{const.}$

Konsequenzen:

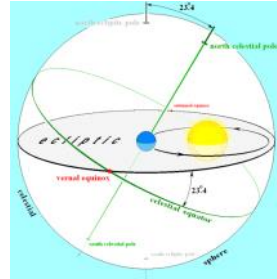
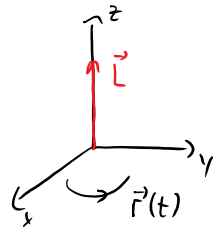
① Betrachte nur Richtung von $\vec{L}$:

$\leadsto \vec{r}(t) \perp$ auf $\vec{L}$.

$\leadsto$ Dynamik findet nur in zwei Dimens. statt!

$\leadsto 3 \text{ FHG} \rightarrow 2 \text{ FHG.}$

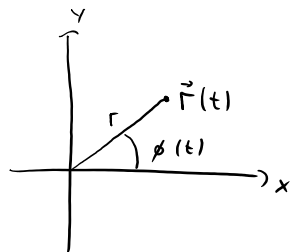
$\leadsto$ Oft: Wähle Koordinaten so, dass $\vec{e}_z \parallel \vec{L}$.



[Quelle: Wikipedia, CC-BY-SA 3.0]

② Betrachte $\|\vec{L}\| = \ell$.

Dazu: Führe Polarkoordinaten ein:



ϕ = "wahre Anomalie"
= "Winkel"

[Vergl. <http://www.thp.uni-koeln.de/gross/tp1-blog/posts/anomalie/>]

$$\vec{r}(t) = r(t) \begin{pmatrix} \cos \phi(t) \\ \sin \phi(t) \end{pmatrix}$$

$$\hat{r}(t) = \begin{pmatrix} \cos \phi(t) \\ \sin \phi(t) \end{pmatrix}$$

Berechne:

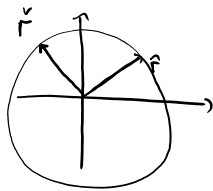
$\rightarrow$

$$\left[\begin{array}{l} \text{N.R.: } \dot{\vec{r}} \\ \vdots \end{array} \right]$$

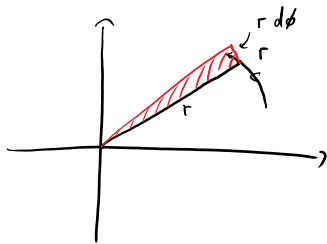
Berechne:

$$\begin{aligned}\vec{L} &= \mu \vec{r} \times \dot{\vec{r}} \\ &= \mu \underbrace{\vec{r} \times (\dot{r} \hat{r} + r \dot{\phi} \hat{\phi})}_{=0} \\ &= \mu r^2 \dot{\phi} \underbrace{\hat{r} \times \hat{\phi}}_{\vec{e}_z} \\ \Rightarrow \|\vec{L}\| &= \boxed{l = \mu r^2 \dot{\phi}}\end{aligned}$$

IV. K.: $\vec{r}$

$$\begin{aligned}\dot{\vec{r}} &= \dot{r}(t) \hat{r}(t) + r(t) \underbrace{\begin{pmatrix} -\sin \phi(t) \\ \cos \phi(t) \end{pmatrix}}_{\hat{\phi}} \dot{\phi}(t) \\ &= \dot{r} \hat{r} + r \dot{\phi} \hat{\phi} \\ \Rightarrow \|\dot{\vec{r}}\|^2 &= \dot{r}^2 + \underbrace{r^2 \dot{\phi}^2}_{r^2 \frac{l^2}{\mu^2 r^4}} \\ &= \dot{r}^2 + \frac{l^2}{\mu^2 r^2}\end{aligned}$$


2. Keplersches Gesetz:



$$\begin{aligned}dA &= \frac{1}{2} r^2 d\phi \quad \Leftrightarrow \quad \dot{A} = \frac{1}{2} r^2 \dot{\phi} \quad \text{Flächengeschwindigkeit} \\ &= \frac{l}{2\mu} \\ &= \text{const.}\end{aligned}$$

Anmerkung:

Anfang des 17. Jahrhunderts formulierte Johannes Kepler die drei Keplerschen Gesetze. Sie fassten empirische Beobachtungen der Planetenbewegung zusammen. Ende des 17. Jahrhunderts konnte Newton das beobachtete Verhalten erstmals quantitativ erklären.

Wir sind in der VL dem 2. Keplerschen Gesetz zuerst begegnet. Das erste und dritte kommen später vor. Warum? Wir wissen heute, dass das 2. Gesetz allgemeiner gilt als die beiden anderen. Es beruht nur auf der Drehimpulserhaltung und ist für alle Zentralkräfte gültig. Die beiden anderen Gesetze gelten hingegen nur für Zentralkräfte mit einem Potential proportional zu $1/r$ (wie der Gravitation und der Coulombkraft).

Für die Physik hat diese Allgemeinheit Vor- und Nachteile.

Vorteil: Da das 2. Gesetz unter schwächeren Annahmen gilt, erlaubt es uns Vorhersagen zu machen, selbst wenn die genaue Form des Potentials unbekannt ist.

Nachteil: Wir lernen aus Beobachtungen der Flächengeschwindigkeit nichts über die genaue Form des Potentials. Aufgrund von relativistischen Effekten und der Einwirkung anderer Himmelskörper ist das effektive Potential in dem sich Planeten um die Sonne bewegen nämlich *nicht* gleich dem $1/r$ -Potential der Newtonschen Gravitation! Abweichungen der Planetenbewegungen von der von Kepler beschriebenen Form waren daher historisch wichtige Zutaten, um z.B. unbekannte Planeten zu entdecken, oder die ART zu testen.

3.4 Konservative Kräfte und der allgemeine Energiesatz

[Dieses Lektion bezieht sich auf allgemeine Bewegungsgleichungen, nicht nur auf Zentralkräfte]

N FHG, 3 WGL:

$$(*) \quad \ddot{\vec{r}}_i = \frac{1}{m_i} \vec{F}_i(\vec{r}) \quad i = 1, \dots, N.$$

Ermittlung (1-D): $U(r) = - \int_{r_0}^r \vec{F}(r') dr' \Rightarrow H = \frac{1}{2} m \dot{r}^2 + U(r) \quad \text{EHG.}$

$$\Downarrow$$
$$\vec{F}(r) = - \frac{\partial}{\partial r} U(r)$$

Def.: Kraft $\vec{F}(\vec{r})$ heißt konservativ, wenn es eine Fkt. $U(\vec{r})$ gibt, s.d.

$$\vec{F}_i(\vec{r}) = - \frac{\partial}{\partial \vec{r}_i} U(\vec{r}). \quad (K)$$

(Auch: $\vec{F}$ ist Gradientenfeld oder Potentialkraft).

Energiesatz: Wenn $\vec{r}(t)$ Lsg. von (*) ist, dann:

$$\frac{d}{dt} \left[\sum_{i=1}^N \frac{1}{2} m_i \dot{\vec{r}}_i^2 + U(\vec{r}) \right] = \sum_i \underbrace{m_i \ddot{\vec{r}}_i}_{\vec{F}_i} \cdot \underbrace{\dot{\vec{r}}_i}_{-\vec{F}_i} + \sum_i \underbrace{\frac{\partial U}{\partial \vec{r}_i}}_{-\vec{F}_i} \dot{\vec{r}}_i = 0.$$

Anmerkung:

In der Newtonschen Mechanik ist die Kraft eine fundamentale Größe.

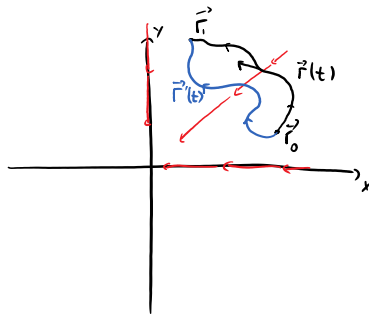
Der Begriff des Potentials wird als formaler mathematischer Ausdruck eingeführt, um (für den Spezialfall konservativer Kräfte) die Erhaltungsgröße Energie definieren zu können.

Überraschenderweise stellt sich später heraus, dass Potentiale fundamentaler als Kräfte sind: In der QM sind die Bewegungsgleichungen über Potentiale definiert. Kräfte hingegen können in Quantensystemen i.d.R. nicht definiert werden.

Wiederh. [Math. Methoden]

Gegeben: $\vec{F}(\vec{r})$.

Versuch:

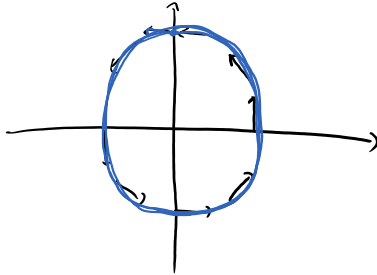


$$\vec{r}(0) = \vec{r}_0$$

$$\vec{r}(1) = \vec{r}_1$$

$$U(\vec{r}) = - \int_0^t \underbrace{(\vec{F}(\vec{r}(t)), \dot{\vec{r}}(t))}_{\text{Arbeit}} dt$$

wohldefiniert, nur, wenn das Integral
wegunabhängig ist. (W)



(W) gilt nicht für alle Felder.

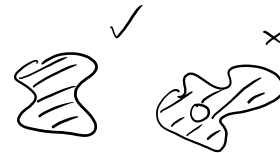
Weitere relevante Eigenschaft:

Für konservatives Feld $\vec{F}_i = - \frac{\partial U}{\partial r_i}$ gilt:

$$(R) \quad \frac{\partial F_i}{\partial r_j} - \frac{\partial F_j}{\partial r_i} = \frac{\partial^2 U}{\partial r_j \partial r_i} - \frac{\partial^2 U}{\partial r_i \partial r_j} = 0.$$

(3-D: äqu. zu $\vec{\nabla} \times \vec{F} = 0$).

Satz Sei $\vec{F}$ v.f. Dann



$$(K) \Leftrightarrow (W) \Rightarrow (R) \quad (\text{"hat keine Löcher"})$$

Wenn der Definitionsbereich von $\vec{F}$ einfach zusammenh. ist, dann gilt zusätzlich

$$(K), (W) \Leftrightarrow (R)$$

3.5 Reduktion auf eindimensionales Potentialproblem

Betrachte: Zentralkraft $\vec{F}(\vec{r}) = -f(r) \hat{r}$

Beh.: $\vec{F}(\vec{r}) = -\vec{\nabla} U(\vec{r})$ mit $U(\vec{r}) = \int_{r_0}^r f(r') dr'$.

Bew.:

$$\begin{aligned}
 -\frac{\partial}{\partial r_i} U(\vec{r}) &= -\left(\frac{\partial}{\partial r} \int_{r_0}^r f(r') dr' \right) \frac{\partial}{\partial r_i} r(\vec{r}) \\
 &= -f(r) \frac{\partial}{\partial r_i} \left(\sum_j r_j^2 \right)^{1/2} \\
 &= -f(r) \frac{r_i}{r} = -f(r) \hat{r}_i = \vec{F}(\vec{r}).
 \end{aligned}$$

□

→ Zentralkräfte sind konservativ.

→ Energiesatz: Zu jeder Lsg. $\vec{r}(t)$ der BWG. gibt es ein E s.d.

$$E = \frac{1}{2} \mu \underbrace{\|\dot{\vec{r}}\|^2}_{\dot{r}^2 + \frac{l^2}{\mu^2 r^2}} + U(r).$$

$$\dot{r}^2 + \frac{l^2}{\mu^2 r^2} \quad \text{[2. Keplersche Gesetz]}$$

$$\Leftrightarrow \dot{r} = \pm \sqrt{\frac{2}{\mu} \left(E - \underbrace{\frac{l^2}{2\mu r^2} + U(r)}_{U_{\text{eff}}(r)} \right)^{1/2}}$$

⇒ BWG. für 1 FHG unter effek. Potential

$$U_{\text{eff}}(r) = \frac{l^2}{2\mu r^2} + U(r).$$

$$\dots \quad \sqrt{\dots} \quad \dot{r} \quad \dots$$

$$\Rightarrow t(r) = \sqrt{\frac{\mu}{2}} \int_{r_0}^r \frac{1}{\sqrt{E - U_{eff}(r')}} dr'$$

Für $\phi(t)$: nutze 2. KG: $l = \mu r^2 \dot{\phi} \Rightarrow \dot{\phi} = \frac{l}{\mu r^2}$

$$\Rightarrow \phi(t) = \frac{l}{\mu} \int_{t_0}^t \frac{1}{r^2(t')} dt'$$

Für $\phi(r)$:

$$\frac{d\phi}{dr} = \frac{d\phi}{dt} \frac{dt}{dr} = \frac{l}{\mu r^2} \frac{dt}{dr}$$

$$\Rightarrow \phi(r) = \sqrt{\frac{l^2}{2\mu}} \int_{r_0}^r \frac{1}{r'^2 \sqrt{E - U_{eff}(r')}} dr'$$

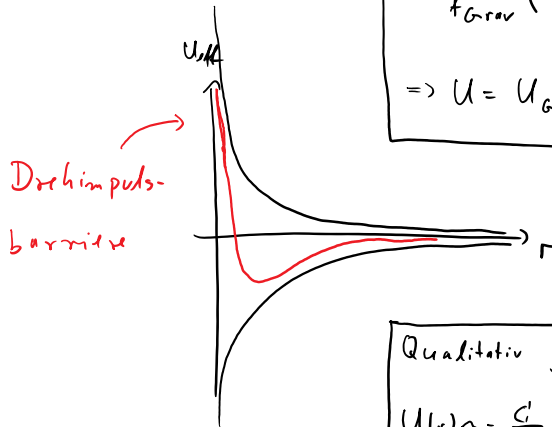
3.6 Qualitative Analyse: Die Potentialbarriere und Rosettenbahnen

Effektives Potential: $U_{\text{eff}} = \frac{l^2}{2\mu r^2} + U(r)$

Bsp.

$$U_{\text{grav}}(r) = -G m_1 m_2 \frac{1}{r}$$

$$\Rightarrow U = U_{\text{grav}} = -G m_1 m_2 \frac{1}{r}$$



Qualitativ gültig für

$$U(r) \sim -\frac{C}{r^\alpha} \quad \alpha \in (0, 2)$$

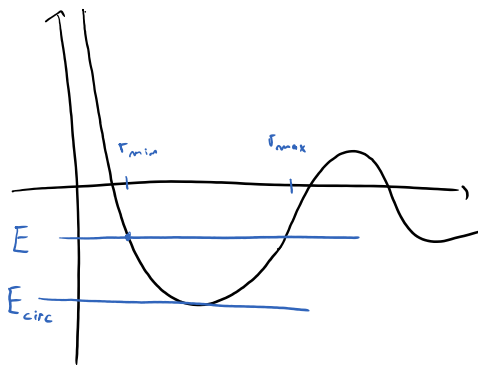
Wenn $U(r)$ für $r \rightarrow 0$ langsamer als $-1/r^2$ divergiert, geht das effektive Potential für kleine Radien gegen $+\infty$. Man spricht dann von der **Drehimpulsbarriere** bei 0.

Im effektiven 1-FHG-Bild wird klar, warum Körper mit nicht-verschwindendem Drehimpuls nicht in das Kraftzentrum fallen: Die Drehimpulsbarriere sorgt für eine effektiv abstoßende Kraft.

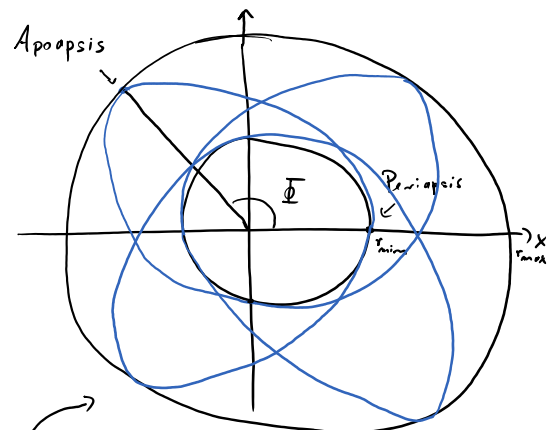
Wir sehen auch: Für Potentiale, die sich in der Nähe des Ursprungs wie $-1/r^\alpha$ mit $\alpha > 2$ verhalten, kann der Drehimpuls einen Absturz ins Zentrum nicht verhindern. Dramatisch!

Thema für die Live-Sitzung: Was würde passieren, wenn die Gravitation mit $1/r^3$ skalieren würde? Da haben wir aber Glück gehabt, oder?

Gebundene Lösungen



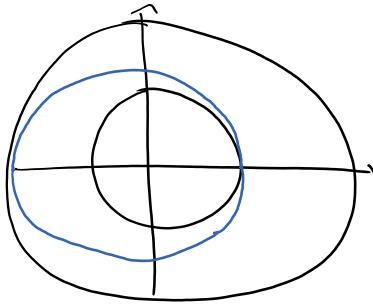
$$\Phi = \int_{r_{\min}}^{r_{\max}} \frac{d\phi}{dr} dr$$



Rosettenbahn

Erdbebrücke
Peri (aus "perimeter"
"Umkreis")

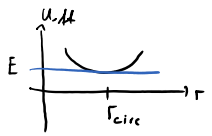
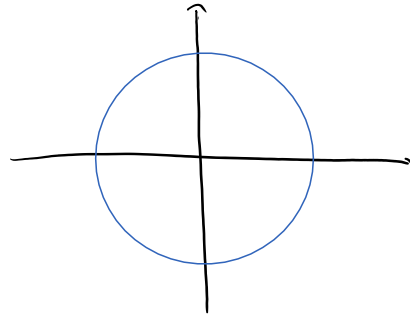
Wichtiger Spezialfall 1: $\bar{\Phi} = \pi$



→ geschlossene Bahn

→ vgl. Kepler.

Wichtiger Spezialfall 2: E ist lokales Minimum.



→ $r_{\text{min}} = r_{\text{max}}$

→ kreisförmige Bahn

3.7 Bahnkurven des Keplerproblems durch Runge-Lenz-Vektor

Potential: $U(r) = -\frac{k}{r}$

Bsp.: $k = G m_1 m_2$ Gravitation

$k = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} q_1 q_2$ Coulomb

Ziel: Beschreibe Bahnen, z.B. durch $r(\phi)$.

Zwei Möglichkeiten:

① "Shut up and calculate"

Aus Energiesatz folgt:

$$\phi(r) = \sqrt{\frac{L^2}{2\mu}} \int_{r_0}^r \frac{1}{r'^2 \sqrt{E - U_{eff}(r')}} dr'$$

$$= \sqrt{\frac{L^2}{2\mu}} \int_{r_0}^r \frac{1}{r'^2 \sqrt{E - \frac{L^2}{2\mu r'^2} + \frac{k}{r'}}} dr'$$

Kann symbolisch integriert werden, macht aber nicht viel Spaß.
(Tipp: Koordinatenwechsel zu $u = \frac{1}{r}$ vereinfacht das Integral).

$$\int \frac{1}{x^2 \sqrt{1 - \frac{a}{x^2} + \frac{k}{x}}} dx = \frac{x \sqrt{\frac{x(k+a)-a}{x^2}} \tan^{-1}\left(\frac{kx-2a}{2\sqrt{a} \sqrt{x(k+x)-a}}\right)}{\sqrt{a} \sqrt{x(k+x)-a}} + \text{constant}$$

② Finde weitere EHG.

Def.: Runge-Lenz-Vektor: $\vec{A} = \mu \dot{\vec{r}} \times \vec{L} - \mu k \hat{r}$

Beh.:

① $\vec{A}$ ist $\perp$ zu $\vec{L}$

② $\vec{A}$ ist EHG

Bew: Übung.

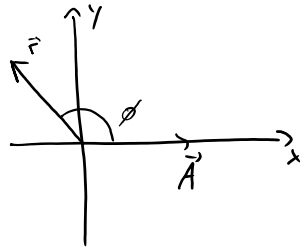
Was bedeutet R-L-V.?

Der Runge-Lenz-Vektor wurde bereits im 17. Jahrhundert als Erhaltungsgröße identifiziert und für Rechnungen genutzt. Erst 200 - 300 Jahre später wurde seine geometrische Bedeutung zufriedenstellend geklärt: Es stellt sich heraus, dass die Lösungen des Keplerproblems mit fixer Energie als Punkte auf einer 4-dimensionalen Sphäre interpretiert werden können. Drei der Dimensionen entsprechen denen des physikalischen Raumes. Der RLV "erzeugt" die Drehung um eine weitere mathematisch definierte Achse.

Sie müssen sich nicht 200 Jahre gedulden um das etwas genauer verstehen zu können - aber einige Wochen Zeit brauchen wir noch, um die relevanten Begriffe in der Hamilton-Mechanik einzuführen.

Nutze zunächst als Rechengröße.

Wähle Koordinaten so, dass $\vec{e}_x \parallel \vec{A}$.



$$\|\vec{A}\| r \cos \phi = (\vec{A}, \vec{r}) = \mu \underbrace{(\vec{r} \times \vec{L}, \vec{r})}_{\text{Skalarprodukt}} - \mu k \underbrace{(\hat{r}, \vec{r})}_r$$

$$= \underbrace{(\mu \vec{r} \times \vec{r}, \vec{L})}_{\vec{L}} - \mu k r$$

$$= l^2 - \mu k r$$

$$\Rightarrow r (\mu k + \|\vec{A}\| \cos \phi) = l^2$$

$\Rightarrow$

$$r = \frac{l^2}{\mu k + \|\vec{A}\| \cos \phi}$$

Def $\therefore \quad \varepsilon = \frac{\|\vec{A}\|}{\mu k}$

numerische Exzentrizität

$$p = \frac{l^2}{\mu k}$$

Halbparameter

$\Rightarrow$

$$r = \frac{p}{1 + \varepsilon \cos \phi}$$

① $\varepsilon = 0 \quad \leadsto \text{Kreis}$

② $\varepsilon \in [0, 1) \quad \leadsto \text{Ellipse}$

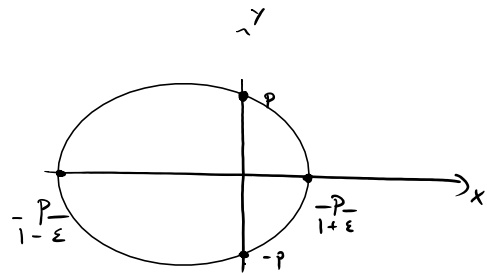
③ $\varepsilon = 1 \quad \leadsto \text{Parabel}$

④ $\varepsilon > 1 \quad \leadsto \text{Hyperbel}$

3.7.1 Ellipsen und die Keplerschen Gesetze

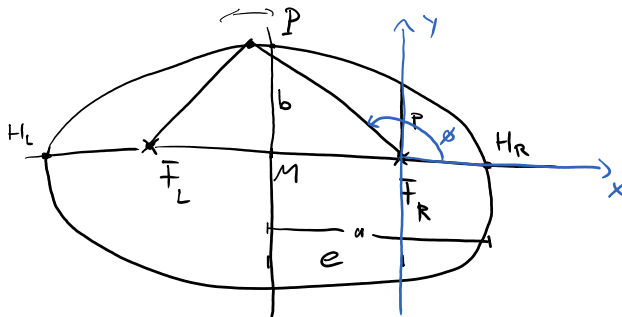
$$r = \frac{p}{1 + \varepsilon \cos \phi}$$

$$\varepsilon \in [0, 1)$$



Wiederholung. "Gärtner konstr."

Wähle Punkte F_L, F_R , Länge a



$$\leadsto \{ P \mid \overline{PF_L} + \overline{PF_R} = 2a \}$$

ist Ellipse.

F_L / F_R	Brennpunkte
M	Mittelpunkt
H_L / H_R	Scheitelpkte.
p	Halbparameter.

a	große Halbachse
b	kleine Halbachse
e	lineare Exzentrizität
$\varepsilon = \frac{e}{a}$	num. "

Beh.: $r = \frac{p}{1 + \varepsilon \cos \phi}$ ist Polardarst. einer Ellipse mit Exzentrizität ε und Halbparameter p bezgl. des rechten Brennpunkts.

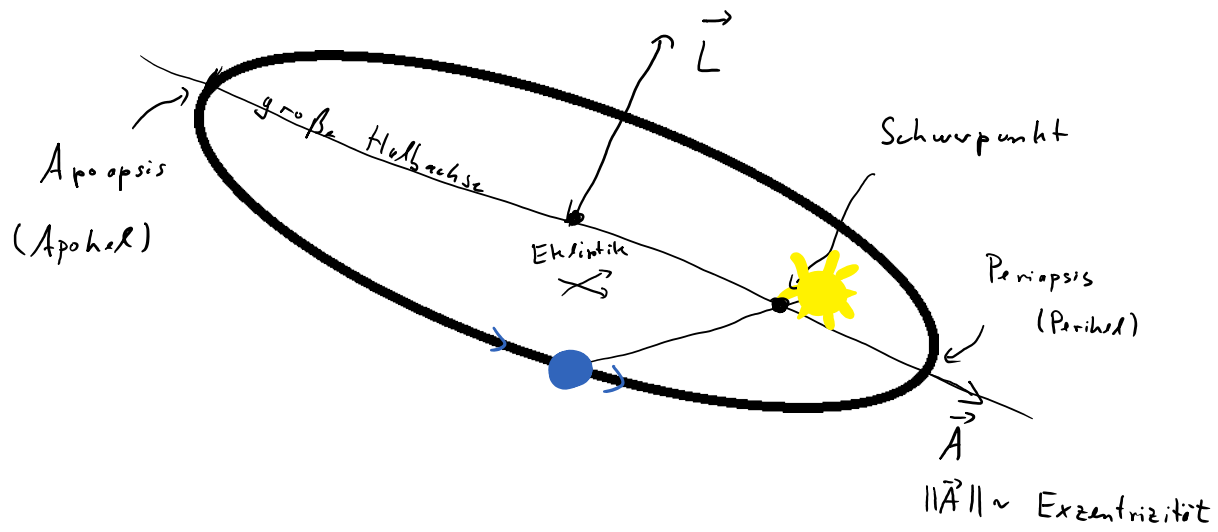
Bew.: $\rightarrow$ Blog.

<http://www.thp.uni-koeln.de/gross/tp1-blog/ellipsen/>

Damit gezeigt:

Erstes Keplersche Gesetz

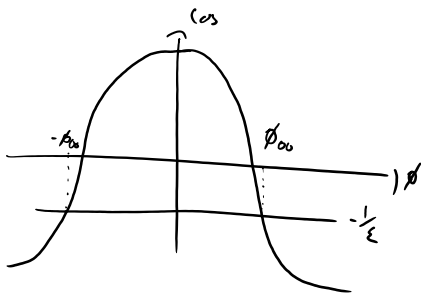
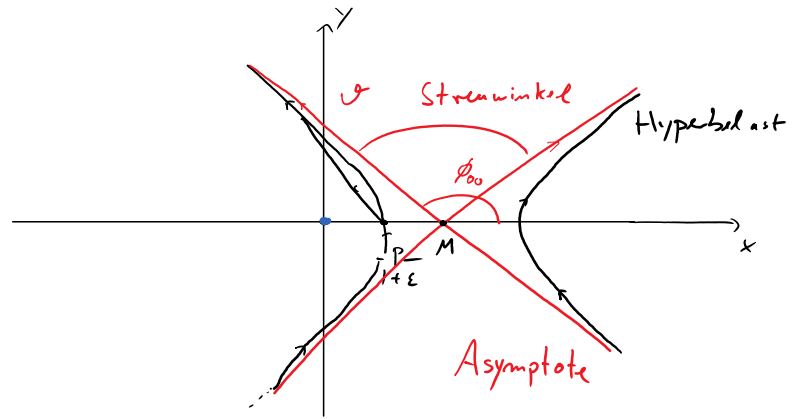
Die Planeten bewegen sich auf Ellipsen, mit der Sonne (genauer: dem gemeinsamen Schwerpunkt) in einem Brennpunkt.



3.7.2 Hyperbeln, Streutheorie und das Slingshot-Manöver

$$r = \frac{p}{1 + \varepsilon \cos \phi}$$

$$\varepsilon > 1$$



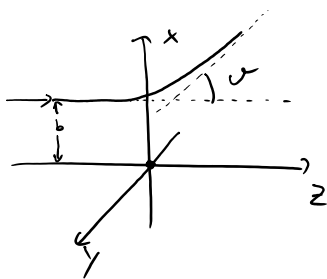
Der Abstand r zum Ursprung divergiert für $\cos \phi \rightarrow -\frac{1}{\varepsilon}$. Dadurch konvergieren die Bahnen gegen eine Gerade - die *Asymptote*. Physikalisch entspricht das der Tatsache, dass weit weg vom Kraftzentrum das erste Newtonsche Gesetz für geradlinige Bewegung sorgt.

Die Lösungungskurve ist eine Hyperbel, die in zwei Äste zerfällt. Der linke krümmt sich zum Kraftzentrum hin, der rechte davon weg.

Anwendungsbsp.:

- Linker Ast: Das *Slingshot-Manöver*, bei dem sich Raumsonden am Gravitationspotential von Planeten streuen lassen, um Energie für die Reise ins tiefe Sonnensystem zu bekommen. Siehe Hausaufgabe.
- Rechter Ast: *Rutherford-Streuung* von α -Teilchen an Atomkernen. Siehe unten.

Begriffe der Streutheorie:



- Input:
- Masse μ
 - Energie E
 - Potential: $U(r) = -\frac{k}{r}$
 - Stoßparameter b

- Output:
- Streuwinkel ϑ .

$$\vartheta = 2 \arctan\left(\frac{k}{2E} \frac{1}{b}\right)$$

$$\Downarrow$$

$$2 \arctan \frac{1}{b}$$

Rechenweg

Geometrisch:

ϑ folgt aus ϕ_{00} , folgt aus ε

Physikalisch:

$$\varepsilon = \frac{\|\vec{A}\|}{k\mu}$$

HA

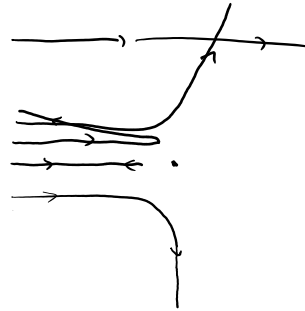
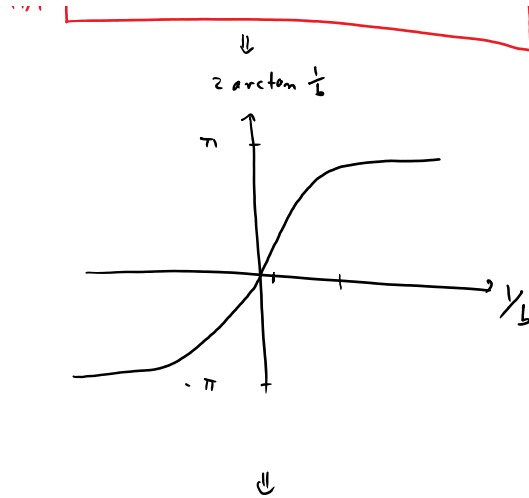
$$\varepsilon = \frac{\|\vec{A}\|}{Kp}$$

$$\vec{A} = \mu \vec{r} \times \vec{L} - \mu k \hat{r}$$

Nutzen, dass bei $t \rightarrow \infty$,
alle vekt. Größen // Basis-
vektoren liegen.

Wir brauchen diesmal keinen Blog-Eintrag zur Geometrie von Hyperbeln. Grund ist, dass wir alleine mit der Analyse des asymptotischen Verhaltens ans Ziel kommen. Der genaue Verlauf des Streuprozesses in der Nähe des Kraftzentrums ist oft physikalisch nicht beobachtbar (z.B. im Rutherford-Experiment), oder wenigstens für die Analyse nicht wichtig.

Glück gehabt!



Für kleine Stoßparameter
ergeben sich Streuwinkel bis
 $\pm \pi \hat{=}$ Rückstreuung.

4.1 Oszillationen um Gleichgewichtslagen

Klingt banal...

... ist aber enorm wichtig, für:

- praktische Anwendungen
- Struktur der Physik

"Physics is that subset of human experience which can be reduced to coupled harmonic oscillators" -- Michael Peskin

As quoted in <http://www.damtp.cam.ac.uk/user/tong/dynamics/c1as.pdf>

Betrachte N FHG mit BWG:

$$\ddot{\vec{r}}_i = \frac{1}{m_i} \vec{F}_i(\vec{r}) , \quad \vec{F}_i = -\frac{\partial}{\partial \vec{r}_i} U(\vec{r}).$$

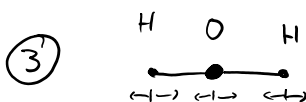
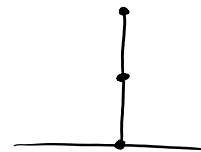
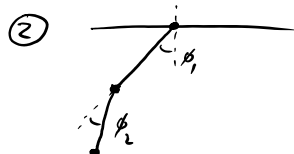
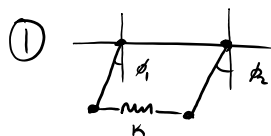
$\vec{x} \in \mathbb{R}^N$ ist Gleichgewichtslage wenn $\vec{\nabla} U(\vec{x}) = 0$, also $\vec{F}(\vec{x}) = 0$.

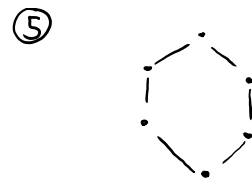
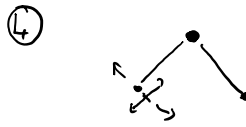
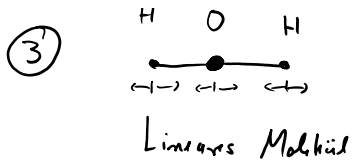
Setze

$$\vec{\delta}(t) = \vec{r}(t) - \vec{x}.$$

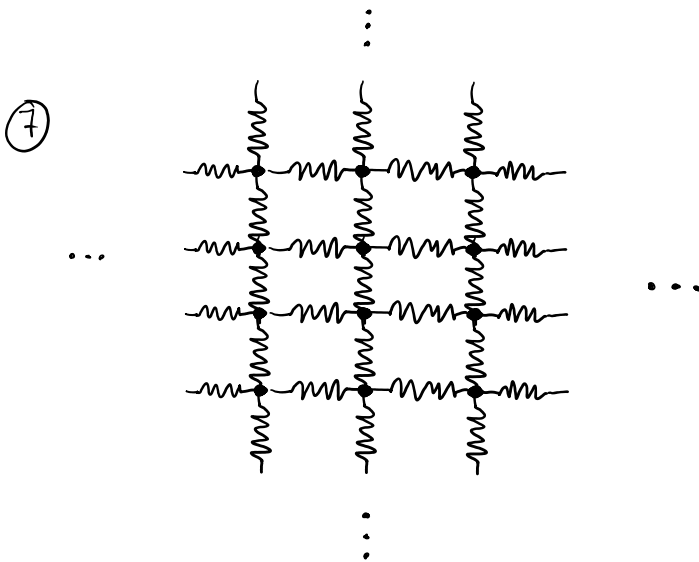
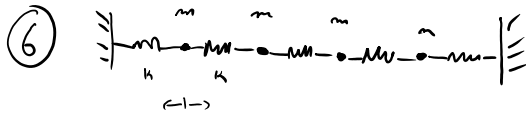
Ziel: Verstehen Dynamik von "kleinen" $\vec{\delta}(t)$.

Bsp:

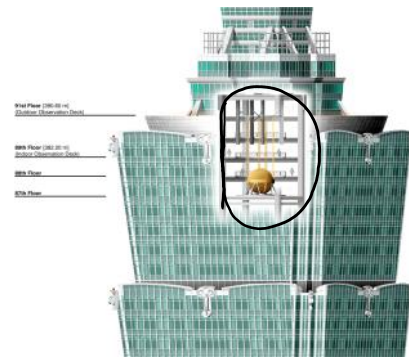




[Quelle: [Wikipedia](#). CC-BY-SA 3.0]



⑧



[Quelle: [Wikipedia](#). CC-BY-SA 4.0]

4.2 Linearisierte Bewegungsgleichungen

Betrachte G.G.-Lage $\vec{x} \in \mathbb{R}^N$.

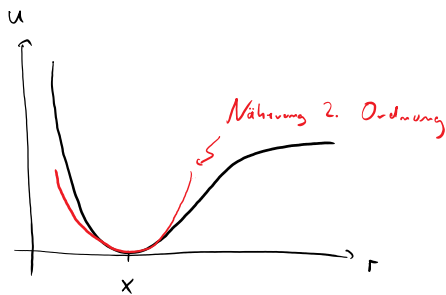
Wähle Energienullpunkt so, dass $U(0) = 0$.

Taylor U um $\vec{x}$:

$$U(\vec{x} + \vec{\delta}) = \underbrace{U(\vec{x})}_{=0 \text{ gewählt}} + \underbrace{\sum_{i=1}^N \frac{\partial U}{\partial r_i}(\vec{x}) \delta_i}_{=0, \text{ da } \vec{x} \text{ G.G.}} + \frac{1}{2} \sum_{i,j} \frac{\partial^2 U}{\partial r_i \partial r_j} \delta_i \delta_j + \dots$$

merke an: $\vec{\delta}$ hinreichend klein, dass höhere Ordnungen vernachlässigt werden können.

Bsp.:
"von den Wägen"



Quadratisches Potential $\Rightarrow$ Lineares Kraftgesetz:

$$F_i = - \frac{\partial}{\partial r_i} \left(\frac{1}{2} \sum_{k,l} \frac{\partial^2 U}{\partial r_k \partial r_l}(\vec{x}) \delta_k \delta_l \right) = - \sum_j \frac{\partial^2 U}{\partial r_i \partial r_j}(\vec{x}) \delta_j$$

$\frac{\partial}{\partial r_i} \delta_k = \begin{cases} 1 & k=i \\ 0 & \text{sonst} \end{cases}$

da $\delta_k = r_k - x_k$

$\leadsto$ BW Gl.: $\ddot{\vec{r}}(t) = \ddot{\vec{\delta}}(t) = M \ddot{\vec{\delta}}(t)$ mit Matrix $M_{ij} = -\frac{1}{m_i} \frac{\partial^2 U}{\partial r_i \partial r_j}(\vec{x})$

Linearisierte BW Gl. (L).

Löse (L):

Annahme: M hat vollst. Satz von E.V. $\{\vec{v}_1, \dots, \vec{v}_N\}$:

$$M \vec{v}_n = \lambda_n \vec{v}_n \quad \text{und} \quad \{\vec{v}_1, \dots, \vec{v}_N\} \text{ Basis für } \mathbb{R}^N.$$

• Die E.V. heißen Normalmoden.

• Die E.W. " Resonanzfrequenzen.

Entwickel:
$$\vec{\delta}(t) = \sum_{k=1}^N c_k(t) \vec{v}_k$$

Setze in (L) ein:
$$\sum_k \ddot{c}_k(t) \vec{v}_k = \sum_k c_k(t) \lambda_k \vec{v}_k$$

$$\Leftrightarrow \boxed{\ddot{c}_k(t) = \lambda_k c_k(t)} \quad k = 1, \dots, N. \quad (*)$$

N entkoppelte, 1-D, lineare BWGL!!!

Leichter geht's nicht!!! :)

Drei Fälle:

Stabiler F.P.



① $\lambda_n < 0 \leadsto \omega_n = \sqrt{-\lambda_n}$

"Harmonischer
Osz."

$\leadsto (*)$ gelöst durch

$$\begin{cases} c_k(t) = a_k \sin(\omega_n t) + b_k \cos(\omega_n t) \\ \text{für } a_k, b_k \in \mathbb{R} \end{cases}$$

oder, äquivalent

$$\begin{cases} c_k(t) = \operatorname{Re}(c_k e^{i\omega_n t}) \\ \text{für } c_k \in \mathbb{C}. \end{cases}$$

Unstabiler F.P.

Bei diesen Lösungen wächst die Auslenkung mit der Zeit. Die Annahme, dass das Kraftgesetz durch seine Taylorentwicklung erster Ordnung beschrieben werden kann, ist daher i.d.R. schnell verletzt. Wenn M nicht-



② $\lambda_n > 0 \leadsto (*)$ gelöst durch

$$c_k(t) = a_k e^{\sqrt{\lambda_n} t} + b_k e^{-\sqrt{\lambda_n} t}$$

③ $\lambda_k = 0 \leadsto (*)$ gelöst durch

erster Ordnung beschrieben werden kann, ist daher i.d.R. schnell verletzt. Wenn M nicht-negative E.V. hat, muss also geprüft werden, ob die Lösungen physikalisch sinnvoll sind, oder ob das Problem nicht in diesem Rahmen behandelt werden kann.

$$\left\{ \begin{array}{l} \textcircled{3} \quad \lambda_k = 0 \quad \leadsto (*) \text{ gelöst durch} \\ c_k(t) = a_k + b_k t. \end{array} \right.$$

Zusammenfassung

- Die Dynamik um stabile Fixpunkte herum wird durch unabhängige Schwingungen der Normalmoden beschrieben.
- Diese verhalten sich jeweils wie eindimensionale harmonische Oszillatoren.

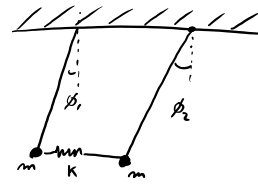
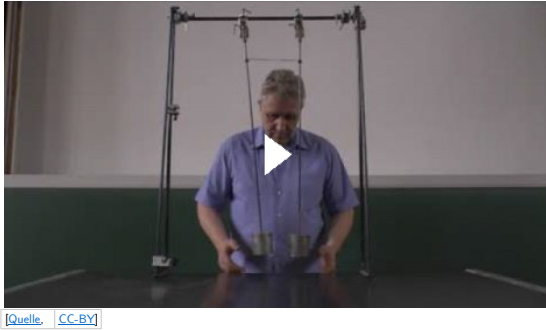
Ausblick

- In der QM können harmonische Oszillatoren nur Energien annehmen, die ein Vielfaches des "Quantums" $\hbar\omega_k$ sind.
- Diese Anregungen der Normalmoden heißen *Quasiteilchen*.
- *Phononen*, z.B., sind Anregungen der Normalmoden von Kristallschwingungen (kommt bald).

Anmerkung

- Man kann zeigen, dass die Matrix M immer einen vollständigen Satz von Eigenvektoren hat. Wenn die Massen m_i alle gleich sind, kann man die Eigenvektoren orthonormal wählen.
(Technisch nutzt man aus, dass M ein Produkt aus einer positiv semi-definiten Matrix (die Massen) und einer symmetrischen Matrix (die Hesse-Matrix der partiellen Ableitungen) ist).

4.4 Gekoppelte Pendel



Potential: $U(\phi_1, \phi_2) = mgl(2 - \cos \phi_1 - \cos \phi_2) + \frac{K}{2} l^2 ((\cos \phi_1 - \cos \phi_2)^2 + (\sin \phi_1 - \sin \phi_2)^2)$

Quadratische Näherung:

Nutzen: $\cos \phi = 1 - \frac{1}{2} \phi^2 + O(\phi^4)$

Nehme an: $m = g = l = 1$.

$\sin \phi = \phi + O(\phi^3)$

$U_q(\phi_1, \phi_2) = \frac{1}{2} (\phi_1^2 + \phi_2^2) + \frac{K}{2} (\phi_1^2 + \phi_2^2 - 2\phi_1\phi_2)$

$\leadsto M_{ij} = - \frac{\partial^2 U}{\partial \phi_i \partial \phi_j} = \begin{bmatrix} -1-K & K \\ K & -1-K \end{bmatrix}$

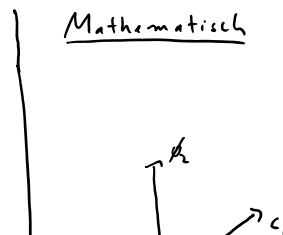
Finde Normalmoden

$M \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix} = - \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix} \quad \leadsto \quad \vec{v}_1 = \frac{1}{\sqrt{2}} \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}, \quad \omega_1 = 1$

$M \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \end{pmatrix} = (-1-2K) \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \end{pmatrix} \quad \leadsto \quad \vec{v}_2 = \frac{1}{\sqrt{2}} \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \end{pmatrix}, \quad \omega_2 = \sqrt{1+2K}$

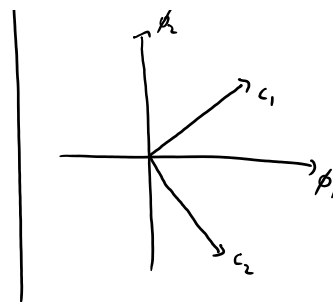
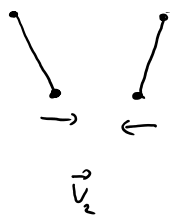
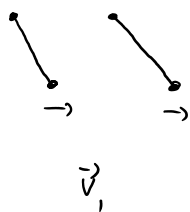
Physikalisch

Mathematisch



Die Matrix

... ..



Die Matrix

$$\frac{1}{\sqrt{2}} \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 1 & -1 \end{bmatrix}$$

transformiert in und
vom Normalmoden.

4.4.1 Energietransfer



[Quelle: CC-BY]

$$\vec{v}_1 = \frac{1}{\sqrt{2}} \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix} \quad \omega_1 = 1$$

$$\vec{v}_2 = \frac{1}{\sqrt{2}} \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \end{pmatrix} \quad \omega_2 = \sqrt{1+2k}$$

Anfangswertproblem:

$$\vec{\phi}(0) = 0$$

$$\dot{\vec{\phi}}(0) = \begin{bmatrix} s \\ 0 \end{bmatrix}$$

Im Normalmoden:

$$c_1(t) = a_1 \sin \omega_1 t + b_1 \cos \omega_1 t$$

$$c_2(t) = a_2 \sin \omega_2 t$$

$$\begin{aligned} \begin{bmatrix} s \\ 0 \end{bmatrix} &= \dot{c}_1(0) \vec{v}_1 + \dot{c}_2(0) \vec{v}_2 \\ &= a_1 \omega_1 \vec{v}_1 + a_2 \omega_2 \vec{v}_2 \end{aligned}$$

Mit

$$a_1 = \frac{s}{\sqrt{2} \omega_1} \quad a_2 = \frac{s}{\sqrt{2} \omega_2}$$

ergibt sich:

$$= \frac{s}{2} \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \end{bmatrix} + \frac{s}{2} \begin{bmatrix} 1 \\ -1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} s \\ 0 \end{bmatrix} \quad \checkmark$$

Transformieren zurück:

$$\phi_1(t) = \frac{s}{2} \sin(\omega_1 t) + \frac{s}{2\omega_2} \sin(\omega_2 t)$$

Für schwache Kopplung ($k \ll 1$), nähern: $\frac{1}{\omega_2} = (1+2k)^{-1/2} \approx 1$.

$$\approx \frac{s}{2} (\sin(\omega_1 t) + \sin(\omega_2 t))$$

$$= s \sin\left(\frac{\omega_1 + \omega_2}{2} t\right) \cos\left(\frac{\omega_1 - \omega_2}{2} t\right)$$

Schwebung

4.4.2 Lissajous-Figuren

Computercode zum Video: siehe [Blog](#).

Lissajous-Figuren

David Gross — 2020-11-22 — 0 Comments

```
In [5]: import matplotlib.pyplot as plt
from matplotlib import animation, rc
import numpy as np
from IPython.display import HTML, display, clear_output

def lissajous(k, periods, online=True):
    #plt.rcParams['figure.figsize'] = (6,4)
    plt.rcParams['figure.dpi']=100
    plt.rcParams['animation.bitrate']=4000

    fig, ax = plt.subplots()

    ax.set_aspect('equal')

    axesRange=np.sqrt(2)
    ax.set_xlim((-axesRange, axesRange))
    ax.set_ylim((-axesRange, axesRange))

    line, = ax.plot([], [], lw=2)

    omega=np.sqrt(1+2*k)      # 2nd frequency
    T=periods*2*np.pi      # max time
    N=int(5*T)              # number of frames in animation
    pf=2                    # points per frame

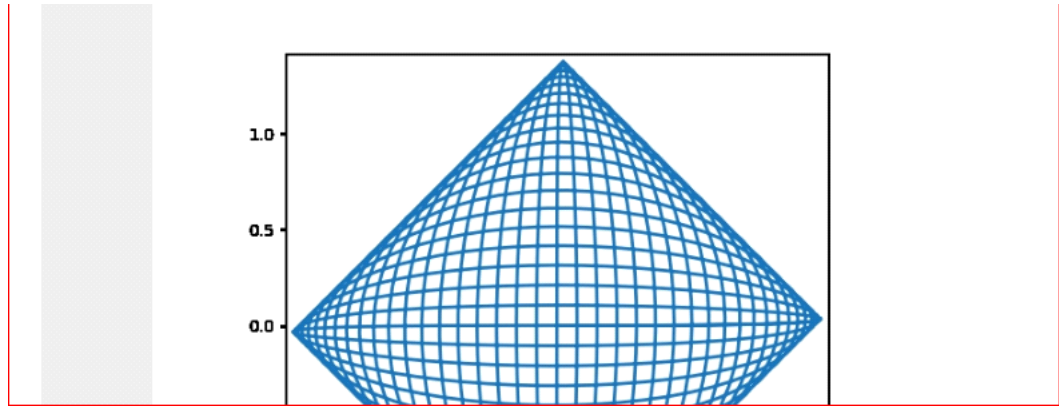
    phis = np.zeros((2,N*pf)) # positions

    def animate(i):
        t = np.linspace(i*T/N, (i+1)*T/N, pf, endpoint=False);
        fromNormalModes = 1/np.sqrt(2)*np.array([[1,1],
        [1,-1]])
        phis[:,i*pf:
        (i+1)*pf]=fromNormalModes*np.array([np.sin(t),
        1/omega*np.sin(omega*t)])
        line.set_data(phis[0,:(i+1)*pf],phis[1,:(i+1)*pf])

        # Show individual frames while rendering.
        # Good for online demonstration, not suitable for web
    export
    if online:
        for i in range(N):
            animate(i)
            display(fig)
            clear_output(wait=True)
            # time.sleep(.1) # Anyway super-slow
    else:
        anim = animation.FuncAnimation(fig, animate,
                                      frames=N, interval=20,
                                      blit=False)
        return HTML(anim.to_html5_video())

In [12]: display(lissajous(0.05125,21, False));
```

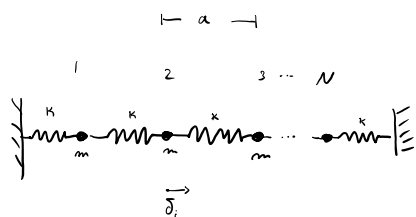




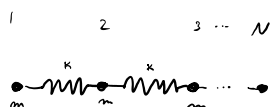
4.5 Die lineare Kette

Wir betrachten eine Kette von Punktmassen, die im Gleichgewicht in regelmäßigen Abständen a angeordnet sind. Werden zwei benachbarte Massen ausgelenkt, dann wirkt zwischen ihnen eine Rückstellkraft proportional zur Abweichung $\delta_{i+1} - \delta_i$ ihres Abstands aus der Gleichgewichtslage.

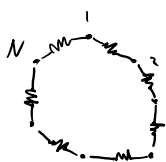
Im Detail unterscheidet man zwischen verschiedenen *Randbedingungen*:



fixe Randbedingungen



offene R.B.



zykl. R.B.

Die Physik dieser drei Modelle unterscheidet sich nicht sehr stark. Wir betrachten hier zyklische Randbedingungen, die mathematisch etwas leichter handhabbar sind als die anderen beiden.

Potential:
$$U(\vec{\delta}) = \sum_{\substack{i,j \\ \text{nächste Nachbarn}}} \frac{k}{2} (\delta_i - \delta_j)^2$$

$$\Rightarrow M_{ij} = -\frac{1}{m} \frac{\partial^2 U}{\partial \delta_i \partial \delta_j} = \frac{k}{m} \begin{cases} -2 & i=j \\ 1 & i,j \text{ nächste Nachbarn} \\ 0 & \text{sonst} \end{cases} \Rightarrow M = \frac{k}{m} \begin{bmatrix} -2 & 1 & & & 1 \\ 1 & -2 & 1 & & \\ & 1 & -2 & 1 & \\ & & 1 & -2 & 1 \\ 1 & & & 1 & -2 \end{bmatrix}$$

Beh.:

Für jede ganze Zahl k ist

$$\lambda_k = -\frac{4k}{m} \sin^2\left(\frac{\pi}{N} k\right)$$

Eigenwert von M , zu Eigenvektor

Eigenwert von M , zu Eigenvektor

$$(\vec{v}_k)_j = \frac{1}{\sqrt{N}} e^{i \frac{2\pi}{N} k \cdot j}$$

Da $\lambda_k = \lambda_{-k}$, gehören $\vec{v}_k, \vec{v}_{-k}$ zum gleichen Eigenraum.

In dem E.R. kann man auch eine reelle Basis $\vec{v}_k^{(\pm)}$ finden:

$$(\vec{v}_k^{(+)})_j := \frac{1}{\sqrt{2}} (\vec{v}_k + \vec{v}_{-k})_j = \frac{1}{\sqrt{2N}} \left(e^{i \frac{2\pi}{N} k j} + e^{-i \frac{2\pi}{N} k j} \right) = \sqrt{\frac{2}{N}} \cos\left(\frac{2\pi}{N} k j\right)$$

$$(\vec{v}_k^{(-)})_j := \frac{1}{\sqrt{2}} i (\vec{v}_k - \vec{v}_{-k})_j = \frac{1}{\sqrt{2N}} i \left(e^{i \frac{2\pi}{N} k j} - e^{-i \frac{2\pi}{N} k j} \right) = \sqrt{\frac{2}{N}} \sin\left(\frac{2\pi}{N} k j\right)$$

Die reelle Basis ist oft direkter interpretierbar,

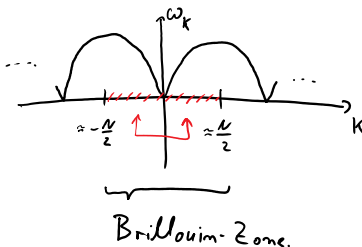
die komplexe Basis ist oft für Rechnungen besser geeignet.

Nur N E.V. sind unabhängig.

Es gilt:

$$(Z) \quad e^{i \frac{2\pi}{N} k (s \pm N)} = \underbrace{e^{i \frac{2\pi}{N} k N}}_1 e^{i \frac{2\pi}{N} k s}$$

$$\text{Damit: } \vec{v}_{k \pm N} = \vec{v}_k.$$

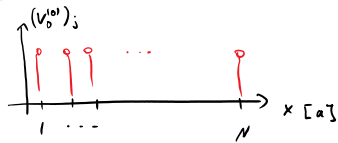


Um einen unabhängigen Satz von Eigenmoden zu bekommen, wählt man üblicherweise Wellenzahlen k symmetrisch um den Ursprung herum. In der Festkörperphysik nennt man den so gefundenen minimalen Bereich die *Brillouin-Zone*.

Bei der endlichen Kette muss man an den Rändern etwas aufpassen. Wenn N gerade ist, ist $\vec{v}_{\frac{N}{2}} = \vec{v}_{-\frac{N}{2}}$ (vergl. die letzte Skizze [hier](#)). Dann darf also nur einer der beiden Vektoren mitgenommen werden. Wenn N ungerade ist, enthält der Bereich $k = -\frac{N-1}{2}, \dots, \frac{N-1}{2}$ genau N unabhängige Moden. (Warum?)

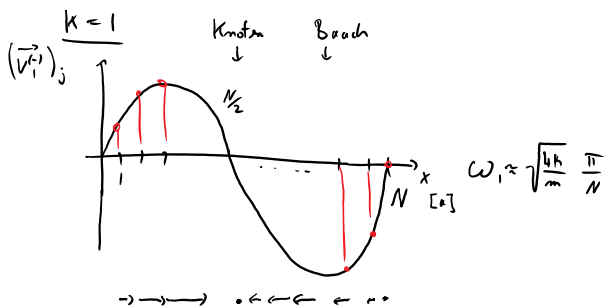
Normalmoden

$$k=0$$



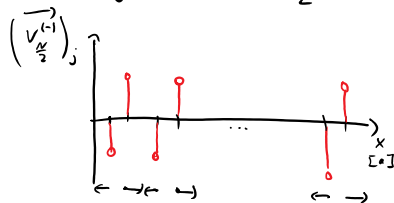
$$\omega_0 = 0$$

$$k=1$$



Stehende Welle mit Wellenzahl $\frac{2\pi}{N} \cdot k$.

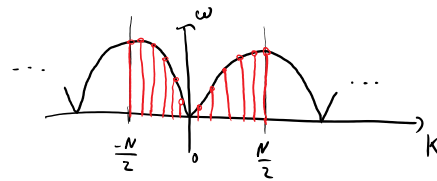
$$N \text{ gerade, } k = \frac{N}{2}$$



"Grenzfrequenz"

Für eine gerade Anzahl von Teilchen erhält man als höchste Wellenzahl $k = \frac{N}{2}$. Bei dieser Lsg schwingen benachbarte Teilchen gegeneinander. Dies verallgemeinert [die zweite Mode der zwei gekoppelten Pendel](#).

Dispersionsrelation



Für die lineare Kette ergeben sich Normalmoden, die stehende Wellen mit Wellenzahl $\frac{2\pi}{N}k$ beschreiben. Der Parameter k ist hierbei eine ganze Zahl. Die Welle mit räumlicher Wellenzahl $\frac{2\pi}{N}k$ schwingt in der Zeit mit der Resonanzfrequenz $\omega_k = \sqrt{\frac{4\kappa}{m}} \left| \sin \frac{\pi}{N} k \right|$. Dieser Zusammenhang zwischen räumlicher Wellenzahl und zeitlicher Frequenz wird *Dispersionsrelation* genannt.

4.5.1 Beweis der Behauptung zu den Eigenmoden der linearen Kette

Beh.: Für $k \in \mathbb{Z}$ ist $\vec{v}_k$ mit

$$(\vec{v}_k)_s = \frac{1}{\sqrt{N}} e^{i \frac{2\pi}{N} k \cdot s}$$

ein Eigenvektor von

$$M = \frac{k}{m} \begin{bmatrix} -2 & 1 & & & 1 \\ 1 & -2 & 1 & & \\ & 1 & -2 & \ddots & \\ & & \ddots & \ddots & 1 \\ 1 & & & 1 & -2 \end{bmatrix}$$

mit Eigenwert

$$\lambda_k = -\frac{4k}{m} \sin^2\left(\frac{\pi}{N} k\right).$$

Beweis:

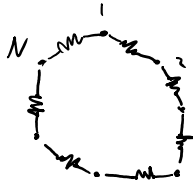
$$\begin{aligned} (M \vec{v}_k)_r &= \sum_{s=1}^N M_{rs} (\vec{v}_k)_s \\ &= \frac{k}{m} \left(-2 (\vec{v}_k)_r + \underbrace{(\vec{v}_k)_{r+1} + (\vec{v}_k)_{r-1}}_{\text{zyklisch (2)}} \right) \\ &= \frac{k}{m} \frac{1}{\sqrt{N}} \left(-2 e^{i \frac{2\pi}{N} k r} + e^{i \frac{2\pi}{N} k (r+1)} + e^{i \frac{2\pi}{N} k (r-1)} \right) \\ &= \frac{k}{m} (\vec{v}_k)_r \underbrace{\left(-2 + e^{i \frac{2\pi}{N} k} + e^{-i \frac{2\pi}{N} k} \right)}_{-2 + 2 \operatorname{Re} e^{i \frac{2\pi}{N} k} = -4 \frac{1}{2} (1 - \cos(\frac{2\pi}{N} k)) = -4 \sin^2\left(\frac{\pi}{N} k\right)} \\ &= -\frac{4k}{m} \sin^2\left(\frac{\pi}{N} k\right) (\vec{v}_k)_r. \end{aligned}$$

□

$$= -\frac{4k}{m} \sin^2\left(\frac{\pi}{N}k\right) \left(\bar{v}_k\right)_r. \quad \square$$

4.5.2 Komplexe Darstellung

[Nehme an:
N ungerade]



$$\Rightarrow \delta_s(t) = \delta(s, t) = \sqrt{\frac{2}{N}} \sum_{k=0}^{\frac{N-1}{2}} \left(a_k \sin \omega_k t + b_k \cos \omega_k t \right) \left(c_k^{(1)} \sin \left(\frac{2\pi}{N} k \cdot s \right) + c_k^{(2)} \cos \left(\frac{2\pi}{N} k \cdot s \right) \right)$$

Beh.: Man kann die $a_n, b_n, c_n^{(1)}, c_n^{(2)}$ ($k=0, \dots, \frac{N-1}{2}$) umrechnen in
komplexe c_k ($k = -\frac{N-1}{2}, \dots, \frac{N-1}{2}$) s. d.

$$\begin{aligned} \delta(s, t) &= \frac{1}{\sqrt{N}} \frac{1}{2} \sum_{k=-\frac{N-1}{2}}^{\frac{N-1}{2}} \left(c_k e^{i \frac{2\pi}{N} k s - i \omega_k t} + \overline{c_k} e^{-i \frac{2\pi}{N} k s - i \omega_k t} \right) \\ &= \frac{1}{\sqrt{N}} \sum_k \operatorname{Re} \left(c_k e^{i \frac{2\pi}{N} k s - i \omega_k t} \right) \end{aligned}$$

Bew.: Nicht schwer, aber etwas nervig. Zerlege c_k und Potenzen in Real- und Imaginäreteil und rechne von unten nach oben...

Interpretation:

① Summand $\operatorname{Re} c_k e^{i \frac{2\pi}{N} k s - i \omega_k t} = |c_k| \cos \left(\frac{2\pi}{N} k s - \omega_k t + \arg(c_k) \right)$

beschreibt laufende Welle mit Phasengeschw. $\frac{\omega_k}{k}$:

$$\frac{2\pi}{N} k s - \omega_k t = 0 \Leftrightarrow \underbrace{\frac{2\pi}{N} s}_{\text{Ort}} = \underbrace{\frac{\omega_k}{k}}_{\text{Phasengeschwindigkeit}} \cdot t$$

Ort $\left[\frac{2\pi}{N} \cdot \text{Gitterplatz} \right]$

$$c_k(t)$$

$$\textcircled{2} \quad \delta(s, t) = \frac{1}{\sqrt{N}} \sum_k \operatorname{Re} \left(\underbrace{c_k}_{|c_k|^2 \equiv \text{Anregungsstärke der } k\text{-ten Mode}} \underbrace{e^{-i\omega_k t}}_{\text{Zeitabh.} \equiv \text{Phasenfaktor mit Kreisfreq. } \omega_k} \underbrace{e^{i\frac{2\pi}{N} k \cdot s}}_{\text{stehende Welle}} \right)$$

Die Darstellung von $\delta(s, t)$ als Überlagerung von (räumlicher Mode $\times$ Anregungsstärke $\times$ Phasenfaktor mit konstanter Kreisfrequenz) ist für alle Wellenbewegungen relevant. Sie finden Varianten dieses Ausdrucks für Gitterschwingungen (hier), Schwingungen in kontinuierlichen Medien, Lösungen der Schrödingergleichung und den Maxwellgleichungen. In der Quantenfeldtheorie tauchen diese Ausdrücke wieder auf - lediglich die Anregungsstärke wird dann durch einen Operator modelliert, der mit der Anzahl der Quasiteilchen in der Mode zusammenhängt.

$\textcircled{3}$ Für Numerik:

$$\frac{1}{\sqrt{N}} \sum_k c_k(t) e^{i\frac{2\pi}{N} k \cdot s} \quad \text{ist diskrete, inverse Fourier-Transformation von } k \mapsto c_k(t).$$

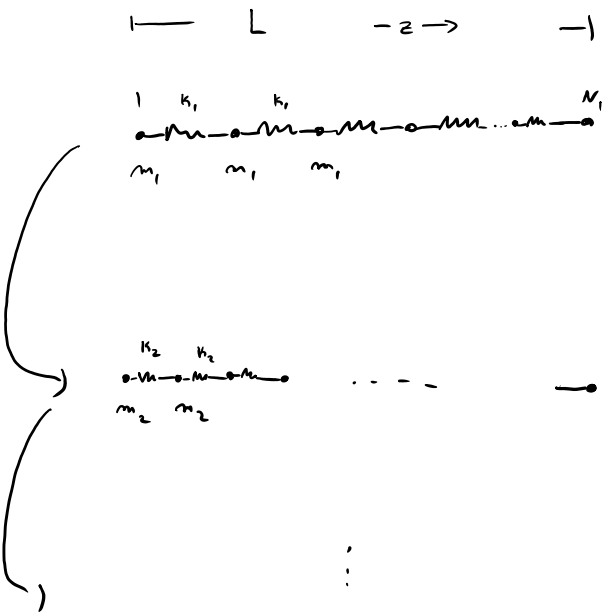
Mehr Information dazu in der nächsten Lektion.

$$\begin{aligned} \textcircled{4} \quad \dot{\delta}(s, t) &= \frac{1}{\sqrt{N}} \sum_k \operatorname{Re} \left(\underbrace{c_k \frac{\omega_k}{i} e^{-i\omega_k t}}_{\operatorname{Re}(\frac{1}{i} z) = \operatorname{Im}(z)} e^{i\frac{2\pi}{N} k \cdot s} \right) \\ &= \frac{1}{\sqrt{N}} \sum_k \omega_k \operatorname{Im} \left(c_k(t) e^{i\frac{2\pi}{N} k \cdot s} \right) \end{aligned}$$

$\Rightarrow \operatorname{Re} \quad \hat{=}$ Verteilung der Auslenkungen

$\operatorname{Im} \quad \hat{=}$ " " Geschwindigkeiten

4.5.4 Kontinuuumslimes



Renormalisierung Parameter:

$$N_i = 2 N_{i-1}$$

$$m_i = \frac{1}{2} m_{i-1}$$

$$\Delta_i := \frac{L}{N_i} = \frac{1}{2} \Delta_{i-1}$$

$$k_i = 2 k_{i-1}$$

Verschiebungsfeld

$$d_i(z, t) = \underbrace{\delta_{(i)}}_{[0, L]} \left(\underbrace{\left\lfloor \frac{z}{\Delta_i} \right\rfloor}_{\uparrow \text{ite Modell}}, t \right)$$

BW Gl.:

$$m_i \ddot{d}_i(z, t) = k_i \left(d_i(z - \Delta_i, t) - 2 d_i(z, t) + d_i(z + \Delta_i, t) \right)$$

$$\Rightarrow \underbrace{\frac{m_i}{\Delta_i}}_{\rho \text{ Massendichte}} \ddot{d}_i(z, t) = \underbrace{(k_i \Delta_i)}_E \underbrace{\frac{d_i(z + \Delta_i, t) - d_i(z, t)}{\Delta_i} - \frac{d_i(z, t) - d_i(z - \Delta_i, t)}{\Delta_i}}_{\Delta_i}$$

Elastizitätsmodul

$$\rightarrow \lim_{i \rightarrow \infty} \rho \frac{d^2}{dt^2} d(z, t) = E \frac{d^2}{dz^2} d(z, t)$$

$$\Leftrightarrow \left[\frac{d^2}{dt^2} - \frac{E}{S} \frac{d^2}{dz^2} \right] d(z,t) = 0$$

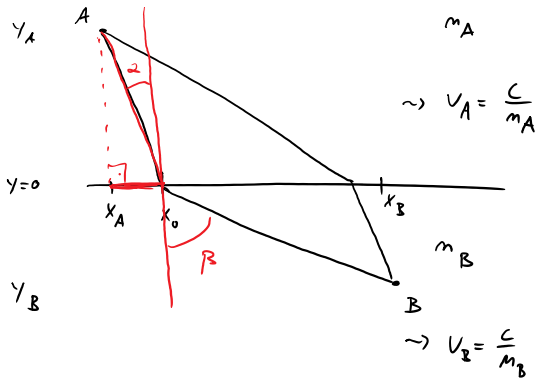
gelöst durch

$$d(z,t) = e^{ikz - i\omega_n t}$$

$$\text{mit } \omega_k = \sqrt{\frac{E}{S}}.$$

Gittermodell $\leftrightarrow$ Feldtheorie

5.1 Vorbereitung 1: Das Fermatsche Prinzip



Fermat: Der Pfad wird angenommen, der die Zeit von $A \rightarrow B$ minimiert.

$$\leadsto T(x_0) = \frac{n_A}{c} \sqrt{y_A^2 + (x_0 - x_A)^2} + \frac{n_B}{c} \sqrt{y_B^2 + (x_B - x_0)^2}$$

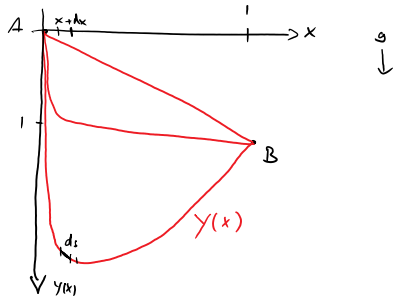
Stationaritätsbed.:

$$0 \stackrel{!}{=} \frac{d}{dx_0} T(x_0) = \frac{n_A}{c} \frac{(x_0 - x_A)}{\sqrt{y_A^2 + (x_0 - x_A)^2}} - \frac{n_B}{c} \frac{(x_B - x_0)}{\sqrt{y_B^2 + (x_B - x_0)^2}}$$

$$= \frac{1}{c} (n_A \sin \alpha - n_B \sin \beta)$$

$$\Leftrightarrow \boxed{n_A \sin \alpha = n_B \sin \beta}$$

5.2 Vorbereitung 2: Die Brachistochrone



$$g = m = 1$$

$$U = -mgy = -y$$

$$E = 0$$

Frage: Auf welcher Bahn gleitet eine Masse am schnellsten von $A \rightarrow B$?

Zunächst: Finde Durchlaufzeit $T[y(\cdot)]$

$$T[y(\cdot)] = \int_0^1 \frac{ds}{v(x)} = \int_0^1 \frac{\sqrt{1+y'^2}}{\sqrt{2y}} dx$$

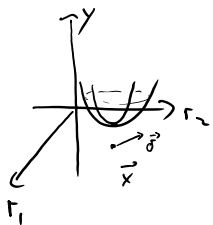
$$\begin{aligned} T &= \int dt \\ &= \int \frac{dt}{dx} dx \\ &= \int \frac{ds}{dx} \frac{dt}{ds} dx \\ &= \frac{1}{\frac{ds}{dt}} = \frac{1}{v} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} v(x) &= \sqrt{\frac{2(E - U(x))}{m}} & ds &= \sqrt{(dx)^2 + (dy)^2} \\ &= \sqrt{2y} & \Rightarrow \frac{ds}{dx} &= \sqrt{1 + \left(\frac{dy}{dx}\right)^2} \end{aligned}$$

Wie findet man nun $y(\cdot)$'s, für die $T[y(\cdot)]$ minimal ist? Die allgemeine Theorie kommt als nächstes, die Brachistochrone rechnen Sie als Hausaufgabe aus.

5.3 Vorbereitung 3: Stationäre Punkte und Gradienten

Erinnerung: Stationäre Pkte von Fkt. $S: \mathbb{R}^N \rightarrow \mathbb{R}$.



Punkt $\vec{x} \in \mathbb{R}^N$ ist stationär, wenn $\forall$ Variationen $\vec{\delta} \in \mathbb{R}^N$ gilt

$$0 = \left. \frac{d}{d\varepsilon} \right|_{\varepsilon=0} S'(\vec{x} + \varepsilon \vec{\delta}) \quad (S)$$

Das ist aber gleich

$$\sum_i \frac{\partial S'}{\partial r_i}(\vec{x}) \delta_i = (\vec{\nabla} S'(\vec{x}), \vec{\delta})$$

und daher ist (S) äquivalent zu (G)

$$\vec{\nabla} S(\vec{x}) = 0 \quad (\Leftrightarrow) \quad \frac{\partial S}{\partial r_i}(\vec{x}) = 0.$$

Nun für Funktionale:

$$S: (\text{Funktionen } \mathbb{R}^N \rightarrow \mathbb{R}) \rightarrow \mathbb{R}$$

$$\vec{q}(\cdot) \mapsto S[\vec{q}(\cdot)]$$

Beschränke auf folgende Klasse von Funktionale:

① Wähle Funktion

$$L: \mathbb{R}^N \times \mathbb{R}^N \times \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$$

$$\vec{r} \times \vec{v} \times t \mapsto L(\vec{r}, \vec{v}, t)$$

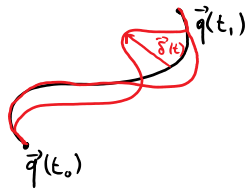
[In der Mechanik üblicherweise: "Ort", "Gesch.", "Zeit"]

② Wähle auch $t_0, t_1 \in \mathbb{R}$.

$$\leadsto \text{Def.: } S[\vec{q}(\cdot)] = \int_{t_0}^{t_1} L(\vec{q}(t), \dot{\vec{q}}(t), t) dt$$

Definiere Stationarität bei $\vec{q}(\cdot)$: Verlangt, dass für jede Variation

$\vec{\delta}(\cdot)$ mit $\vec{\delta}(t_0) = \vec{\delta}(t_1) = 0$ gilt:



$$\left. \frac{d}{d\varepsilon} \right|_{\varepsilon=0} S[\vec{q}(\cdot) + \varepsilon \vec{\delta}(\cdot)] = 0$$

(Analog zu (S)).

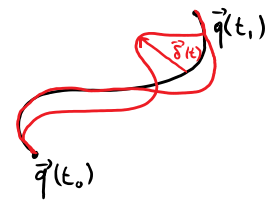
Ziel: Finde Analogon zum "Gradientenkriterium" (G) für Funktionale.

$$\left. \frac{d}{d\varepsilon} S[\vec{q}(\cdot) + \varepsilon \vec{\delta}(\cdot)] \right|_{\varepsilon=0} = \int_{t_0}^{t_1} \sum_i \left[\frac{\delta S}{\delta q_i} \right] \delta q_i(t) dt$$

↑ "Funktionalableitung"

5.4 Die Euler-Lagrange-Gleichung

$$S[\vec{q}(\cdot)] = \int_{t_0}^{t_1} L(\vec{q}(t), \dot{\vec{q}}(t), t) dt$$



$$\vec{\delta}(t_0) = \vec{\delta}(t_1) = 0.$$

$$0 \stackrel{!}{=} \left. \frac{d}{d\varepsilon} \right|_{\varepsilon=0} S[\vec{q}(\cdot) + \varepsilon \vec{\delta}(\cdot)]$$

$$= \int_{t_0}^{t_1} \left[\sum_i \underbrace{\frac{\partial L}{\partial q_i}(\vec{q}(t), \dot{\vec{q}}(t), t)}_{=:\frac{\partial L}{\partial q_i}} \delta_i(t) + \sum_i \underbrace{\frac{\partial L}{\partial \dot{q}_i}(\vec{q}(t), \dot{\vec{q}}(t), t)}_{=:\frac{\partial L}{\partial \dot{q}_i}} \dot{\delta}_i(t) \right] dt$$

Partielle Integration

$$\int_{t_0}^{t_1} \frac{\partial L}{\partial \dot{q}_i} \frac{d}{dt} \delta_i dt = - \int_{t_0}^{t_1} \left(\frac{d}{dt} \frac{\partial L}{\partial \dot{q}_i} \right) \delta_i dt + \underbrace{\left[\frac{\partial L}{\partial \dot{q}_i} \delta_i \right]_{t_0}^{t_1}}_{=0}$$

$$= \int_{t_0}^{t_1} \sum_i \underbrace{\left(\frac{\partial L}{\partial q_i} - \frac{d}{dt} \frac{\partial L}{\partial \dot{q}_i} \right)}_{=:\frac{\delta S}{\delta q_i}} \delta_i dt$$

$\Rightarrow$ Gradientenkriterium für Funktional: $\vec{q}(\cdot)$ stationär für S'

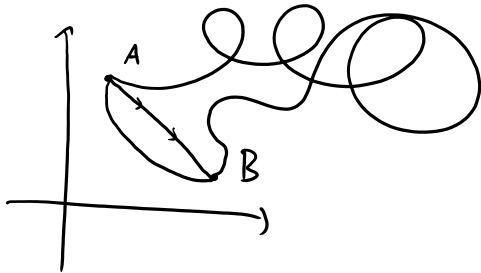
$$\Leftrightarrow \frac{\delta S}{\delta q_i} = \frac{\partial L}{\partial q_i} - \frac{d}{dt} \frac{\partial L}{\partial \dot{q}_i} = 0 \quad \forall i = 1, \dots, N.$$

Euler
- Lagrange
- Gleichung.

5.5 Anwendung: Geodäten

$$\vec{q}(\cdot) \text{ stationär} \Leftrightarrow \frac{\partial L}{\partial q_i} - \frac{d}{dt} \frac{\partial L}{\partial \dot{q}_i} = 0 \quad \forall i=1, \dots, N.$$

Frage: Was ist kürzeste Verbindung zwischen A und B?



Dazu: Betrachte Kurven $q(t)$ mit
 $\vec{q}(0) = A, \quad \vec{q}(1) = B.$

$$\begin{aligned} S'[\vec{q}(\cdot)] &= \text{Länge von } \vec{q}(\cdot) \\ &= \int_0^1 \left\| \frac{d}{dt} \vec{q}(t) \right\| dt \\ &= \int_0^1 L(\vec{q}(t), \dot{\vec{q}}(t), t) dt \end{aligned}$$

$$\text{mit } L(\vec{r}, \vec{v}, t) = \|\vec{v}\| = \left(\sum_{i=1}^N v_i^2 \right)^{1/2}$$

Für ELG:

$$\frac{\partial L}{\partial r_i} = 0, \quad \frac{\partial L}{\partial v_i} = \frac{v_i}{\|\vec{v}\|}$$

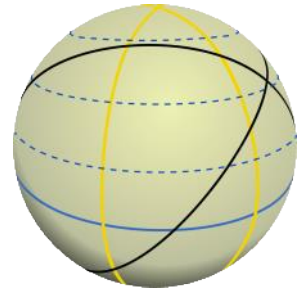
$$0 = \cancel{\frac{\partial L}{\partial q_i}} - \frac{d}{dt} \frac{\dot{q}_i(t)}{\|\dot{\vec{q}}(t)\|} \quad i = 1, \dots, N$$

$$\Leftrightarrow \underbrace{\frac{\dot{\vec{q}}(t)}{\|\dot{\vec{q}}(t)\|}}_{\text{Richtung der Tangente}} = \text{const.}$$

Verbindungslinien zwischen zwei Punkten, die bezüglich der Gesamtlänge stationär sind, heißen *Geodäten*. Geodäten im euklidischen Raum sind also einfach Geraden - keine sehr



Verbindungslinien zwischen zwei Punkten, die bezüglich der Gesamtlänge stationär sind, heißen *Geodäten*. Geodäten im euklidischen Raum sind also einfach Geraden - keine sehr überraschende Erkenntnis. Geodäten kann man aber auch auf gekrümmten Körpern definieren. Auf der Kugel heißen sie *Großkreise* - das sind, im Wesentlichen, die Bahnen, auf denen Flugzeuge fliegen. Großkreise zeigen, dass eine Bahn, die stationär bezüglich des Längenfunktionalen ist, nicht unbedingt ein globales Minimum ist: Von Köln nach Berlin kann man auch über Atlantik und Pazifik auf einem Großkreis reisen.



[Quelle: [Wikipedia](#), Gemeinfrei]

In der allgemeinen Relativitätstheorie wird gezeigt, dass Licht sich auf Geodäten in der vierdimensionalen Geometrie der Raumzeit bewegt. Spätestens dann wird die Rechnung oben interessanter....

5.6 Bewegungsgleichungen für Konservative Systeme

$$\vec{q}(\cdot) \text{ stationär} \iff \frac{\partial L}{\partial q_i} - \frac{d}{dt} \frac{\partial L}{\partial \dot{q}_i} = 0 \quad \forall i = 1, \dots, N.$$

Ziel hier: **Das Prinzip der Stationären Wirkung**. Für konservative mechanischen Systeme sind die Lösungen der Newtongleichungen genau diejenigen Bahnkurven, die stationär für folgendes Funktional sind:

$$S[\vec{q}(\cdot)] = \int_{t_0}^{t_1} L(\vec{q}(t), \dot{\vec{q}}(t)) dt \quad \text{"Wirkung"}$$

$$L(\vec{r}, \vec{v}) = T(\vec{v}) - U(\vec{r}) \quad \text{Lagrange-Fkt.}$$

$$T(\vec{v}) = \sum_{i=1}^N \frac{1}{2} m_i v_i^2 \quad \text{kinetische Energie}$$

$$U(\vec{r}) \quad \text{Potential, also } F_i(\vec{r}) = - \frac{\partial}{\partial r_i} U(\vec{r})$$

Beweis:

$$\frac{\partial L}{\partial r_i} = - \frac{\partial U}{\partial r_i} = F_i(r) \quad \text{Kraft}$$

$$\frac{\partial L}{\partial v_i} = m_i v_i \quad \text{Impuls}$$

$$\leadsto \text{ELG für } \vec{q}(\cdot): \quad F_i(\vec{q}(t)) - \frac{d}{dt} m_i \dot{q}_i(t) = 0$$

$$\iff F_i(\vec{q}(t)) = m_i \ddot{q}_i(t)$$

Newtongleichung!

- Das Prinzip der stationären Wirkung wurde früher (und manchmal heute noch)

"Prinzip der minimalen Wirkung" genannt. Die mathematischen Bedingungen die wir gestellt haben, sind aber auch mit einem Sattelpunkt oder einem Maximum verträglich (auch wenn man sich überlegen kann, dass Maxima für mechanische Lagrange-Funktionen der Form $L=T-U$ nicht vorkommen können (warum?)).

- Viele technische Begriffe der Mechanik werden durch Worte bezeichnet, die auch eine umgangssprachliche Bedeutung haben. In der Regel passt diese zur technischen Definition (Kraft, Leistung, Energie). Es ist etwas unglücklich, dass die Funktion $S[]$ auch einen Namen hat (Wirkung), der eine intuitive Interpretation suggeriert. Eine solche gibt es nämlich nicht. Schon, weil der Zahlenwert $S[r]$ völlig irrelevant ist - nur die funktionale Abhängigkeit von S von $r(t)$ geht in die Rechnung ein.
- Historisch (und zum Teil bis heute) wird dem Prinzip der stationären Wirkung manchmal eine fast mystische Bedeutung zugeschrieben. Was ist die Interpretation? Warum geht die Natur mit Wirkung sparsam um? Was bedeutet es, dass der Endpunkt festgehalten wird (vergl. "Teleologie"). Das sind natürliche Fragen... ...aber es scheint, leider, nicht viel dabei herumgekommen zu sein.
- Das Prinzip der stationären Wirkung passt gut zur Pfadintegral-Formulierung der Quantenmechanik. Manchmal hört man, Pfadintegrale "erklären" das Prinzip. Wie ist das zu verstehen? Mathematisch gibt es nichts zu erklären: Die Äquivalenz zu den Newtongleichungen haben wir oben ja in zwei Zeilen abgeleitet. Gemeint ist wohl, dass wenn man die Pfadintegralformulierung bereits internalisiert hat, dann ist das Wirkungsprinzip eine sehr direkte und natürliche Konsequenz.
- Variationsprinzipien tauchen auch in anderen Bereichen der Physik auf. Wir hatten das Fermatsche Prinzip erwähnt. *Alle* bekannten fundamentalen Naturgesetze können mit passenden Lagrange-funktionen aus dem Prinzip der stationären Wirkung abgeleitet werden! Die fundamentalen Lagrange-funktionen sind häufig besonders einfach. Ein spektakulärer Fall der mich sehr beeindruckt sind die (komplizierten) Einsteinschen Feldgleichungen der Allgemeinen Relativitätstheorie, die aus der wohl einfachsten denkbaren Wirkung folgen, die der Geometrie des Problems angepasst ist (Einstein-Hilbert-Wirkung). Auf die Frage, warum das Prinzip so gut funktioniert, ist mir keine allgemein akzeptierte Antwort bekannt.
- Auf die Frage, warum diese Formulierung so beliebt ist, gibt es hingegen viele Antworten. Zum einen ist das Prinzip - wie wir gleich sehen werden - koordinatenunabhängig. Wir werden zeigen, dass die ELG daher auch in krummlinigen Koordinatensystemen gelten, was praktisch ein großer Vorteil sein kann. Darüber hinaus ist es oft einfacher mit skalaren Funktionen zu arbeiten (also der Lagrange-funktion) als mit den resultierenden Gleichungssystemen. Wenn zum Beispiel die Symmetrien eines physikalischen Systems bekannt sind, ist es leichter, eine entsprechend symmetrische Lagrange-funktion zu raten, als direkt ein gleichermaßen symmetrisches Gleichungssystem.

5.7 ELG in allgemeinen Koordinaten

Ein großer Vorteil der Euler-Lagrange-Gleichungen gegenüber den Newton-Gleichungen besteht darin, dass sie in beliebigen Koordinaten gültig sind. Hier zeigen wir an einem Beispiel, wie man das anwendet. Danach werden wir noch einmal systematisch darüber sprechen, was es mit allgemeinen Koordinatensystemen auf sich hat.

Betrachten Sie ein System dessen kinetische und potentielle Energie in einem Inertialsystem mit Koordinaten $\vec{r}$ durch Funktionen

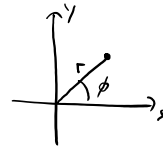
$$T(\vec{r}) = \sum_{i=1}^N \frac{1}{2} m_i \dot{\vec{r}}_i^2, \quad U(\vec{r})$$

gegeben sind.

Sei nun $\vec{q}(\vec{r})$ eine invertierbare Fkt. $\mathbb{R}^N \rightarrow \mathbb{R}^N$, so dass wir die $\vec{q}$'s als Koordinaten verwenden können.

Bsp.: $N=2$, Polarkoordinaten

$$\vec{r} = \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}, \quad \vec{q}(\vec{r}) = \begin{pmatrix} r(x,y) \\ \phi(x,y) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \sqrt{x^2+y^2} \\ \arccos \frac{x}{r} \end{pmatrix}$$



Newton: $\vec{r}(t)$ ist physikalisch mögliche Bahn, wenn $\frac{d^2}{dt^2} \vec{r}_i(t) = -\frac{1}{m_i} \frac{\partial}{\partial \vec{r}_i} U(\vec{r}(t))$

Frage: Was sind BWGl, die physik. mögl. Bahnen $\vec{q}(t)$ auszeichnen?

Wir werden zeigen:

① Schreibe T , U , $L = T - U$ bzgl. der Koordinaten $\vec{q}$ aus.

Bsp.: Polarkoordinaten.

$$T(\vec{r}) = \frac{1}{2} m \|\dot{\vec{r}}\|^2 \underset{\uparrow}{=} \frac{1}{2} m (\dot{r}^2 + r^2 \dot{\phi}^2)$$

vergl. [Kepler](#)

② Die BWGl. in $\vec{q}$ -Koordinaten sind dann durch die ELG's gegeben:

$$\frac{\partial L}{\partial q_i} - \frac{d}{dt} \frac{\partial L}{\partial \dot{q}_i} = 0 \quad i = 1, \dots, N.$$

Man nennt die Ableitung $p_i := \frac{\partial L}{\partial \dot{q}_i}$ den zu q_i konjugierten verallgemeinerten Impuls. Damit:

$$\frac{d}{dt} p_i = \frac{\partial L}{\partial q_i} \quad i=1, \dots, N.$$

Bsp.: $N=2$, Polarkoordinaten, $U = U(r)$ rotationsinvariant.

• $p_\phi = \frac{\partial L}{\partial \dot{\phi}} = m r^2 \dot{\phi} \quad \leadsto$ der zu ϕ konjugierte Impuls $p_\phi =$ Betrag l des Drehimpulses

$$\frac{\partial L}{\partial \phi} = 0 \quad \leadsto \text{Koordinaten } q_i \text{ mit } \frac{\partial L}{\partial q_i} = 0 \text{ heißen } \underline{\text{zyklisch}}.$$

$\Rightarrow_{\text{ELG}} \frac{d}{dt} p_\phi = 0 \quad \leadsto q_i \text{ zyklisch} \Rightarrow p_i \text{ erhalten!} \quad \text{Hier: Drehimpulserhaltung.}$

• $p_r = \frac{\partial L}{\partial \dot{r}} = m \dot{r} \quad \text{"Radialimpuls"}$

$$\frac{\partial L}{\partial r} = - \frac{\partial}{\partial r} U + \underbrace{\frac{m r \dot{\phi}^2}{r^3}}_{\frac{l^2}{m r^3}} = - \frac{\partial}{\partial r} \left(\underbrace{U + \frac{l^2}{2 m r^2}}_{U_{\text{eff}}(r)} \right)$$

$\Rightarrow_{\text{ELG}} m \ddot{r} = - \frac{\partial}{\partial r} U_{\text{eff}}(r)$

[Vergl. unsere [vorhergehende Rechnung](#)]

Achtung: Dieser ganze Abschnitt ist noch eine Baustelle.

Überblick

Ein großer Vorteil der Lagrange-Formulierung der Mechanik ist, dass sie in beliebigen Koordinaten gilt. So kann man z.B. ein Koordinatensystem wählen, in dem das Potential eine besonders leichte Form annimmt, und man kann viel leichter Situationen behandeln, bei denen die Bewegung der Teilchen auf eine Untermenge des euklidischen Raumes eingeschränkt ist.

Um das genauer zu erklären, beschäftigen wir uns kurz mit Koordinaten, Darstellungen und Transformationen. Wir werden auch sehen, warum die Formulierung nach Newton nicht so gut mit allgemeinen Koordinaten umgehen kann.

Um geometrische Objekte zu beschreiben, hat sich in der Physik eine minimalistische Notation durchgesetzt, die für das effiziente Rechnen optimiert ist. Die Begriffsbildung in der Mathematik ist dagegen viel ausführlicher, was das konzeptionelle Verständnis erleichtern kann. Dieser Kurs verwendet meistens die physikalischen Begriffe. In diesem Kapitel werden wir aber kurz die mathematische Formulierung umreißen. Falls Sie die Physik dann mal verwirrt, haben sie damit hoffentlich das notwendige Vokabular zur Verfügung, um Ihre Verwirrung wenigstens in Worte fassen zu können.

Beispiele von Mehrdeutigkeiten in phys. Notation:

①

$\vec{r}$ kann sein:

(1) Ein Punkt im Raum: $\vec{r} \in \mathbb{R}^3$

(2) Eine Bahnkurve: $\vec{r}: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}^3, t \mapsto \vec{r}(t)$

(3) Ein Koordinatenwechsel. z.B.: $\vec{r}: \mathbb{R}_+ \times [0, \pi) \times [0, 2\pi) \rightarrow \mathbb{R}^3$

$$\begin{pmatrix} r \\ \vartheta \\ \phi \end{pmatrix} \mapsto r \begin{pmatrix} \sin \vartheta \sin \phi \\ \sin \vartheta \cos \phi \\ \cos \vartheta \end{pmatrix} = \vec{r}(r, \vartheta, \phi)$$

(4) Ein Variablenname: $U = U(\vec{r}), \quad \frac{\partial U}{\partial r_j}$.

②

Die Interpretation kann sich im Verlauf einer Rechnung implizit ändern:

$$\frac{d}{dt} \underset{(2)}{r_i} = \sum_j \frac{\partial \underset{(3)}{r_i}}{\partial \underset{(4)}{s_j}} \frac{d}{dt} \underset{(2)}{s_j}$$

③

Geometrische Objekte und ihre Darstellungen bzgl. verschiedener Koordinaten werden nicht klar getrennt:

$$\text{Sei } U(x, y) = \frac{1}{\sqrt{x^2 + y^2}}.$$

—

Frage: Ist

$$U(r, \varphi) = \begin{cases} \frac{1}{\sqrt{r^2 + \varphi^2}} \\ \frac{1}{r} \end{cases}$$

(weil Namen gebundener Variablen beliebig sind)

(weil (x, y) kartesische Koord. sind, (r, φ) Polarkoord.)

Folgedragen: • Was ist dann $U(1, 1)$? 1 oder $\frac{1}{\sqrt{2}}$?

- Ist $U(r, \varphi)$ die gleiche Fkt. wie $U(x, y)$ ("das Potential"); oder eine andere Fkt., da die Abhängigkeit des Wertes von den Parametern gänzlich anders ist?

Koordinaten

Betrachten Sie ein geometrisches Objekt M . Ein *Koordinatensystem* auf M ist eine Abbildung, die jedem Punkt $m \in M$ einen eindeutigen Vektor von Zahlen zuordnet.

Bsp. 1:



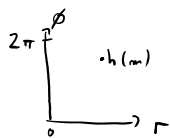
https://commons.wikimedia.org/wiki/File:Köln_Luftbild_2012_Cologne_aerial_view_bilderbuch_köln.jpg

$M = \text{Orte in Köln}$

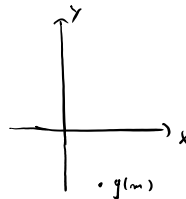
Polar-Koordinaten $\downarrow h$

$\searrow g$ Kartesische Koordinaten

$m \mapsto \begin{pmatrix} \text{Abstand zum Dom} \\ \text{Winkel bzgl. Linie Dom} \rightarrow \text{Osten} \end{pmatrix}$



$m \mapsto \begin{pmatrix} \text{Abstand vom Dom, projiz. auf Linie Dom} \rightarrow \text{Osten} \\ \text{Abstand vom Dom, projiz. auf Linie Dom} \rightarrow \text{Norden} \end{pmatrix}$



Bsp. 2:



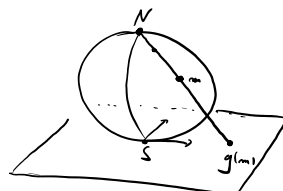
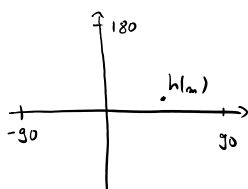
$M = \text{Erdoberfläche}$

Geographische Koordinaten $\swarrow h$

Stereographische Koordinaten $\searrow g$

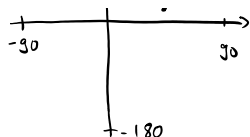
$m \mapsto \begin{pmatrix} \text{Breitengrad} \\ \text{Längengrad} \end{pmatrix}$

$m \mapsto \text{Stereographische Projektion}$



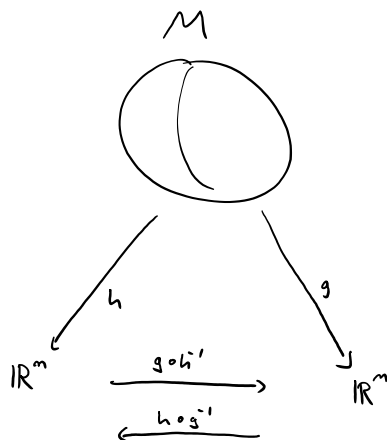
Wir denken uns eine Ebene, die parallel zum Äquator an den Südpol geheftet ist. In der Ebene wählen wir kartesische Koordinaten (z.B. x -Achse parallel zum Nullmeridian und y -Achse bei 90° Länge). Die Koordinaten für einen Punkt m auf der Kugel sind dann die kartesischen Koordinaten des Schnittpunktes der Verbindungslinie Nordpol- m mit der Ebene.

Ausblick: Stereographische Koordinaten finden viele Anwendungen. Z.B. kann man die Kepler-Bahnen als stereographische Projektionen von Großkreisen auf einer



Ausblick: Stereographische Koordinaten finden viele Anwendungen. Z.B. kann man die Kepler-Bahnen als stereographische Projektion von Großkreisen auf einer vierdimensionalen Kugel in den dreidimensionalen Raum verstehen (und so nebenbei die Bedeutung des Runge-Lenz-Vektors als Erzeugende einer vierdimensionalen Drehung verstehen).

Koordinatenwechsel



Bahnkurven

m

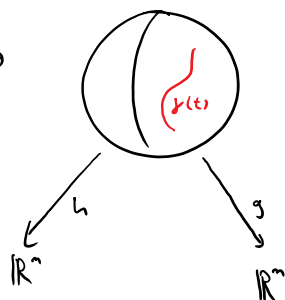
γ



Bahnkurven

$$\mathbb{R} \xrightarrow{\gamma} M$$

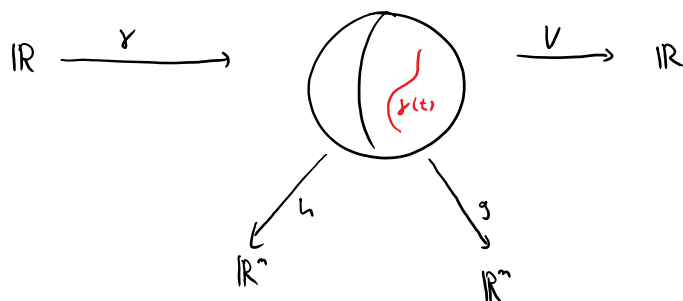
$$t \mapsto \gamma(t) \in M$$



$$\gamma_h(t) = h \circ \gamma(t)$$

$$\gamma_g(t) = g \circ \gamma(t)$$

$$\gamma_h(t) = (h \circ g^{-1}) \circ \gamma_g(t)$$



Skalare Fkt., ausgewertet entlang einer Bahnkurve

$$V \circ \gamma: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}.$$

Komplett koordinatenfrei! ;)

Oder, schwieriger, in Koordinaten:

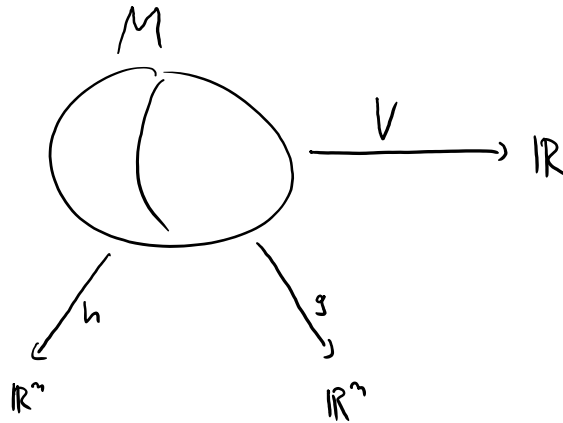
$$V \circ \gamma = V \circ (h^{-1} \circ h) \circ \gamma$$

$$= V_h \circ \gamma_h$$

- V ist invariant von γ , wenn $\frac{d}{dt} V \circ \gamma(t) = 0$.
(also, wenn $V(\gamma(t)) \in \mathbb{R}$ eine Konstante ist).

Math.	Physik	
$m \in M$	$\vec{r}$	Punkt im Raum
$h: M \rightarrow \mathbb{R}^n$	$\vec{r}$	Koordinatenfunktion
$g: M \rightarrow \mathbb{R}^n$	$\vec{r}'$	anderes "
	$\vec{q}$	" " (wenn sie nicht linear von $\vec{r}$ abhängt).
$x = h(m) \in \mathbb{R}^n$	$\vec{r}$	Koordinaten eines Punktes
$\gamma: \mathbb{R} \rightarrow M$	$\vec{r}, \vec{r}(t), \vec{r}(\cdot)$	(Bahn-) Kurve
$\gamma(t) \in M$	$\vec{r}, \vec{r}(t)$	Punkt auf Bahnkurve
$h \circ g^{-1}: \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^n$	$\vec{r}, \vec{r}(\vec{r}')$	Koordinatenwechsel
$V: M \rightarrow \mathbb{R}$	$V, V(\vec{r})$	skalare Fkt.
$V(m) \in \mathbb{R}$	$V, V(\vec{r})$	Wert der Fkt. an einem Punkt

Skalare Funktionen



(abstrakte) skalare Fkt.

$$V: M \rightarrow \mathbb{R}$$

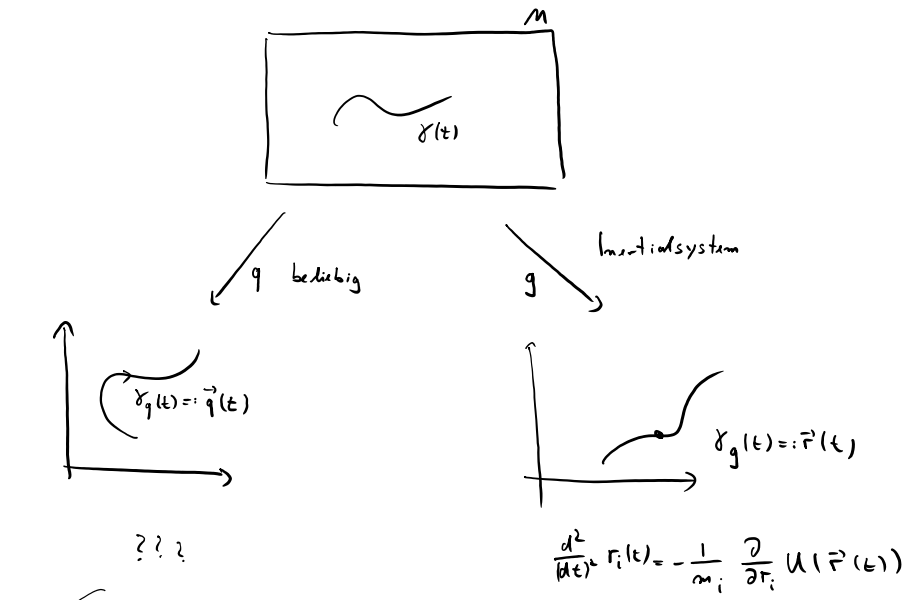
$$m \mapsto V(m)$$

Beg. Koordinaten:

$$V_h = V \circ h^{-1}, \quad V_g = V \circ g^{-1}, \dots$$

Transformations-eigenschaften:

$$V_h = V_g \circ (g \circ h^{-1}).$$



$$\frac{d}{dt} r_i = \sum_j \frac{\partial}{\partial q_j} r_i(\vec{q}(t)) \cdot \frac{d}{dt} q_j(t)$$

$$\Rightarrow \left(\frac{d}{dt} \right)^2 r_i = \sum_j \left(\sum_k \frac{\partial^2 r_i}{\partial q_k \partial q_j} \dot{q}_k \dot{q}_j + \frac{\partial r_i}{\partial q_j} \ddot{q}_j \right)$$

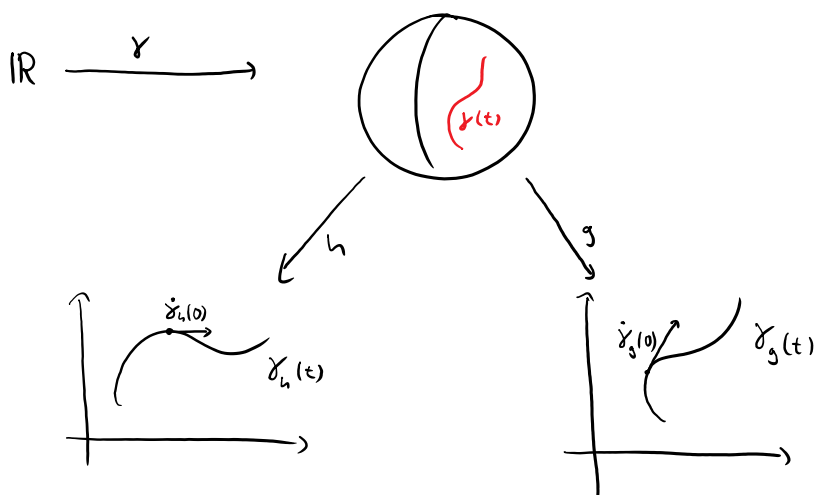
$$\underbrace{\frac{\partial}{\partial r_i} U}_{D^{(i)} U_g} = \sum_j \underbrace{\frac{\partial q_j}{\partial r_i}}_{D^{(i)}(h_j \circ g)} \underbrace{\frac{\partial}{\partial q_j} U}_{D^{(i)} U_h}$$

$\nearrow n^3$ partielle Ableitungen! i

Nachteile:

- Um die Bewegungsgleichung in den verallgemeinerten Koordinaten $\vec{q}$ aufzustellen, muss man zunächst einen Koordinatenwechsel $\vec{r}(\vec{q})$ in ein Inertialsystem finden.
- Dann muss man N^3 partielle Ableitungen ausrechnen.
- Die resultierenden Bewegungsgleichungen haben eine andere Form als die Newtonsgleichungen. Und keine, die im Vergleich sehr einladend scheint.
- Es gibt keine manifest koordinatenfreie Charakterisierung der physikalischen Bahnen.

$$\frac{d}{dt} U(\gamma(t)) = \frac{d}{dt} U_g(\gamma_g(t)) = \left(\nabla U_g, \dot{\gamma}_g(t) \right)$$



Transformationsverhalten:

$$\frac{d}{dt} (\gamma_g(t))_i = \frac{d}{dt} (g \circ h^{-1} \circ \gamma_h(t))_i = \sum_j D^{(i)}(g \circ h^{-1})_i \frac{d}{dt} (\gamma_h(t))_j$$

$$\vec{r}(t) = \gamma_g(t)$$

$$\vec{s}(t) = \gamma_h(t)$$

$$\frac{d}{dt} r_i = \sum_j \frac{\partial r_i}{\partial s_j} \frac{d}{dt} s_j$$

$$d_t r_i = \frac{\partial r_i}{\partial r'_j} d_t r'_j$$

Konsistenzcheck:

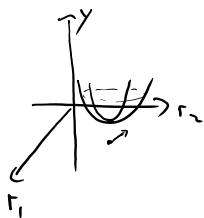
Transformationseigenschaften der Funktionalableitung

Erinnerung an die Erinnerung

Erinnerung:

$S: \mathbb{R}^N \rightarrow \mathbb{R}$ stationär bei Punkten mit

$$\vec{\nabla}^{(r)} S = 0.$$



Betrachte nun neue Koordinaten $\tilde{S}(\tilde{r})$

Zwar ist

$$\vec{\nabla}^{(r)} S \neq \vec{\nabla}^{(\tilde{r})} \tilde{S},$$

aber

$$\vec{\nabla}^{(r)} S = 0 \Leftrightarrow \vec{\nabla}^{(\tilde{r})} \tilde{S} = 0.$$

Bew.:

$$\frac{\partial}{\partial r_i} S = \sum_j \underbrace{\frac{\partial s_j}{\partial r_i}}_{\text{Jacobi-Matrix vom Koordinatenwechseln per Def. invertierbar}} \frac{\partial}{\partial s_j} S$$

Jacobi-Matrix vom Koordinatenwechseln per Def. invertierbar

Aber Bild eines Vektors unter inv. Matrix = 0

$\Leftrightarrow$ Vektor = 0.

□

Also: Gradienten müssen unter Koordinatenwechsel kovariant transformiert werden - es sei denn, man testet nur ob sie Null sind. Daher führen Stationaritätsprinzipien auf koordinateninvariante Bedingungen.

Für ELG

Um den Beweis auf Funktionale anwenden zu können, müssen wir ausrechnen, wie sich Funktionalableitungen unter Koordinatenwechsel verhalten. Es stellt sich heraus, dass sie sich genau wie Gradienten transformieren - und damit der Beweis oben direkt übertragen werden kann.

Beh.: $\frac{\delta S}{\delta r_i} = \sum_j \frac{\partial s_j}{\partial r_i} \frac{\delta S'}{\delta s_j}$

Anmerkung

Im ELG-VL unterschieden:

- Koordinaten $\vec{r}, \vec{v}$
- Kurven $\vec{q}(\cdot)$, Tangenten $\dot{\vec{q}}(t)$

$$\frac{\partial L}{\partial \dot{q}_i} = \frac{\partial L}{\partial v_i}(\dot{\vec{q}}(t))$$

Ab jetzt: Nutze $\vec{r}$
für alles.

Bew.:

$$\frac{\delta S}{\delta r_i} = \frac{\partial L}{\partial r_i} - \frac{d}{dt} \frac{\partial L}{\partial \dot{r}_i}$$

$$\cdot \frac{\partial L}{\partial r_i} = \sum_j \frac{\partial s_j}{\partial r_i} \frac{\partial L}{\partial s_j}$$

$$\cdot \frac{\partial L}{\partial \dot{r}_i} = \sum_j \underbrace{\frac{\partial \dot{s}_j}{\partial \dot{r}_i}}_{\dot{s}_j} \frac{\partial L}{\partial \dot{s}_j} = \sum_j \frac{\partial s_j}{\partial r_i} \frac{\partial L}{\partial \dot{s}_j}$$

$$\dot{s}_j = \sum_i \frac{\partial s_j}{\partial r_i} \dot{r}_i$$

Nun einfach die Zeitableitung an der Jacobi-Matrix vorbeiziehen und die Matrix dann ausklammern. Wir erhalten die behauptet Transformation der Funktionalableitung.

□

6.1 Zwangsbedingungen

Wir interessieren uns für Teilchen, deren Bewegungsfreiheit durch *Zwangsbedingungen* eingeschränkt ist.

Bsp.:

①



Pendel Massepunkt mit

- bewegt sich in der Ebene
- Abstand l zu einem Fixpunkt = const.

②



Starrer Körper

n Massen, mit Koordinaten

$$\vec{r}_1, \dots, \vec{r}_n \in \mathbb{R}^3$$

mit Verbindungsvektoren

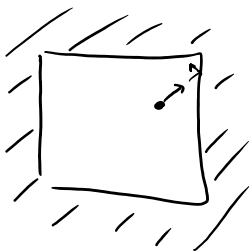
$$\vec{d}_{ij} = \vec{r}_i - \vec{r}_j$$

und Bedingungen:

$$(\vec{d}_{ij}, \vec{d}_{ij}) = \text{const.}$$

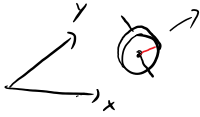
($\hat{=}$ Abstände und Winkel zwischen Teilchen sind konstant).

③



Teilchen im Kasten

④



Rad in der Ebene.

Beschrieben durch:

- Ort
- Richtung
- Drehwinkel

Ortsveränderung nur entlang Richtung möglich.

Aufgaben:

①

Wie kann man Bewegungsgleichungen für Systeme unter Zwangsbedingungen finden?

"Wie?"

Möglichst so,

- dass nur ein minimaler Satz von Freiheitsgrade beschrieben werden muss; und so
- dass man die physikalischen Mechanismen, die Bewegung einschränken, nicht modellieren muss.

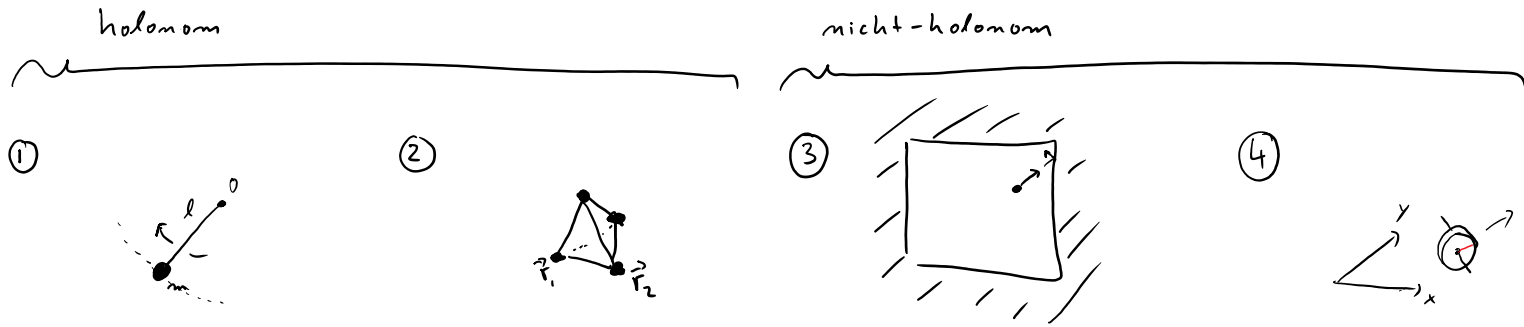
②

Optionaler Konsistenzcheck:

"Warum?"

Zeige, dass die im ersten Schritt entwickelte Methode zumindest näherungsweise aus den uneingeschränkten Bewegungsgleichungen ableitbar ist.

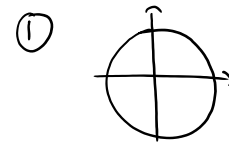
6.2 Holonome Zwangsbedingungen



Ohne ZB: Konfigurationsraum ist $\mathbb{R}^{3n}$.

In Bsp. ① - ③ schränken die ZB die möglichen Konfigurationen auf eine Menge $M \subset \mathbb{R}^{3n}$ ein.

In Bsp. ①, ② ist M unverändert.



ZB dieser Art heißen holonom.

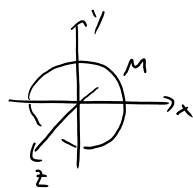
Für holonome Systeme: zwei Möglichkeiten M zu beschreiben.

① implizit durch ZB.

$$M = \text{gemeinsamen Nullstellen von Fkt. } f_1, \dots, f_k : \mathbb{R}^{3n} \rightarrow \mathbb{R}$$

$$= \left\{ \vec{r} \in \mathbb{R}^{3n} \mid \underbrace{f_1(\vec{r}) = \dots = f_k(\vec{r}) = 0}_{\text{ZB}} \right\}$$

Bsp.: ①



$$f_1(x, y, z) = z$$

$$f_2(x, y, z) = x^2 + y^2 - l^2$$

②

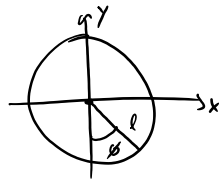


$$f_{ijij}(\vec{r}) = (\vec{r}_i - \vec{r}_j, \vec{r}'_i - \vec{r}'_j) - \underbrace{c_{ijij}}_{\text{Konstanten}}$$

② Explizit durch Koordinaten

Also einen minimalen Satz $q_1, \dots, q_N$ von Parametern, die Konfig. eindeutig festlegen.

Bsp.: ①



$M = \text{Kreis}$

$N = 1$

$q_1 = \phi$

②



$M = \text{Kreis} \times \text{Kreis} = \text{Torus}$

$N = 2$

$q_i = \phi_i$



③



Konfig.: Ort des S.P. $\times$ Rotation

$M = \mathbb{R}^3 \times SO(3)$

$N = 3 + 3$

$q_1, q_2, q_3 = \text{Kart. Koordinaten des S.P.}$

$q_4, q_5, q_6 = \text{Euler-Winkel}$

6.3 Das eingeschränkte Stationaritätsprinzip

Gegeben: System mit holonomem
z.B.

Frage: Was sind die BW Gl.?

①

②



Postulat:

"Eingeschränkte Stationaritätsprinzip"

Diejenigen Bahnen sind physikalisch, für die die Wirkung bzgl. Variation in M stationär ist.

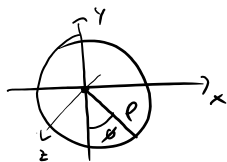
Rezept

① Wähle Koordinaten $q_1, \dots, q_N$ auf M .

② Drücke Lagrange-Fkt. in q_i aus.

③ ELG: $\frac{\partial L}{\partial q_i} - \frac{d}{dt} \frac{\partial L}{\partial \dot{q}_i} = 0 \quad i = 1, \dots, N \quad (\leq 3m)$

Bsp.:



① $q_1 = \phi$

② $T(\dot{\vec{r}}) = \frac{1}{2} m \|\dot{\vec{r}}\|^2$
 $U(\vec{r}) = mgy$

$$\vec{r} = l \begin{pmatrix} \sin \phi \\ -\cos \phi \\ 0 \end{pmatrix}$$

$$\leadsto L(\phi, \dot{\phi}) = \frac{1}{2} m l^2 \dot{\phi}^2 + mgl \cos \phi$$

③ $\frac{\partial L}{\partial \phi} = -mgl \sin \phi \quad \frac{d}{dt} \frac{\partial L}{\partial \dot{\phi}} = ml^2 \ddot{\phi}$

$$\leadsto \text{ELG: } \ddot{\phi} = -\frac{g}{l} \sin \phi$$

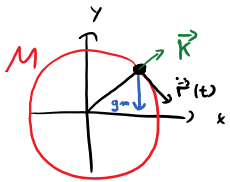
6.4 Zwangskräfte, d'Alembert-Gleichung

Wir haben mit dem eingeschränkten Stationaritätsprinzip die Mechanik von Teilchen unter Zwangsbedingungen in der Lagrange-Formulierung eingeführt.

Es gibt auch eine Newton-Formulierung von Mechanik unter Zwangsbedingungen. Die Entsprechung der Newton-Gleichung nennt man die *d'Alembert-Gleichung* oder auch das *d'Alembertsche Prinzip*.

Wir führen diese Sichtweise hier nur kurz ein.

Bsp.: Einfaches Pendel.



Im Bsp. würde Schwerkraft $-\vec{\nabla}(mgy)$ das Teilchen aus M heraus ziehen. Um das zu verhindern, muss die Stange eine "Zwangskraft" ausüben.

Nach Newton $m\ddot{\vec{r}} = \vec{F}$ folgt

$$\vec{F} = -\vec{\nabla}V + \vec{K}, \quad \text{mit} \quad \boxed{\vec{K} = (m\ddot{\vec{r}} + \vec{\nabla}V)} \quad \underline{\text{Zwangskraft}}.$$

Im Lagrange-Ansatz kommen die Zwangskräfte nicht vor. Das ist oft ein Vorteil, da man sie eben nicht modellieren muss.

Im Beispiel des Pendels ist die Zwangskraft K also diejenige Kraft, die die Stange auf die Masse ausübt. In einfachen Physikaufgaben soll sie oft vernachlässigt werden. Das gilt nicht für die Ingenieurin, die die Dicke des Stabs berechnen will, damit dieser nicht unter den Zwangskräften bricht. In den Ingenieurwissenschaften - und gerade in der *Statik* - sind Zwangskräfte also von großem Interesse!

In der Skizze steht K senkrecht auf M . Für Lösungen des eingeschränkten Stationaritätsprinzips ist das tatsächlich immer so. Die Umkehrung gilt auch: diese Eigenschaft charakterisiert die Lösungen. Das ist das d'Alembertsche Prinzip.

Dazu etwas Geometrie:

Wir nehmen an, dass M durch holonome Zwangsbed. definiert ist:

$$M = \{ \vec{r} \mid f_1(\vec{r}) = \dots = f_n(\vec{r}) = 0 \}$$

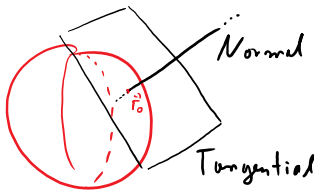
Betrachte Punkt $\vec{r}_0 \in M$.

Die Menge aller Tangentialvektoren von Kurven die in M durch $\vec{r}_0$ laufen ist der Tangentenraum an M bei $\vec{r}_0$:

$$T_{\vec{r}_0} M = \{ \dot{\vec{r}}(0) \mid \vec{r}(t) \in M, \vec{r}(0) = \vec{r}_0 \}.$$

Das Ortho-Komplement des Tangentenraums ist der Normalraum.

Bsp.: $M = \text{Sphäre im } \mathbb{R}^3$.



Damit:

Newton-Gl. $m \ddot{\vec{r}} + \vec{\nabla} V(\vec{r}) = 0$ $\xleftrightarrow{\text{Zuvor gezeigt}}$ $\vec{r}(\cdot)$ erfüllt Stationaritätsprinzip

$m \ddot{\vec{r}} + \vec{\nabla} V(\vec{r})$ ist normal zu M $\Leftrightarrow \vec{r}(\cdot)$ erfüllt eingesch. Stationaritätsp.

d'Alembertsche Prinzip $\uparrow$ (*) Beweis-Skizze unten.

Anmerkungen:

In moderner geometrischer Sprache macht das d'Alembertsche Prinzip also Aussagen über Tangentialräume und Normalräume. d'Alembert hat das Prinzip aber entwickelt, bevor diese Begriffe etabliert waren. In Physiklehrbüchern findet man in diesem Zusammenhang häufig noch veraltete, weniger präzise Begriffe:

- Ein Tangentialvektor heißt dann "virtuelle Verrückung"
- Das d'Alembertsche Prinzip sagt, dass das innere Produkt zwischen Tangentenvektoren und den Zwangskräften verschwindet. Das innere Produkt zwischen einer Bahnkurve und einer Kraft ist physikalisch die *Arbeit*, die die Kraft an dem Teilchen verrichtet. Daher wird das d'Alembertsche Prinzip traditionell als die Aussage beschrieben, dass "die virtuelle Arbeit verschwindet". Man spricht daher auch von dem *Prinzip der virtuellen Arbeit*.

Warum sich diese unpräzise, altertümliche und verschwurbelte Sprache bis heute in Lehrbüchern hält ist mir ein Rätsel.

Anbei als Beispiel ein Auszug aus dem (ansonsten sehr schönen) Buch von Scheck zur Mechanik.

Alles klar??

2.2.1 Definition der virtuellen Verrückungen

Eine *virtuelle Verrückung* $\{\delta \vec{r}_i\}$ des Systems ist eine willkürliche, infinitesimale Änderung der Koordinaten, die mit den Kräften und den Zwangsbedingungen verträglich ist. Sie wird am System zu einem *festen* Zeitpunkt ausgeführt, hat also mit der infinitesimalen *Bewegung* (auch *reelle Verrückung* genannt) $\{d\vec{r}_i\}$ im Zeitintervall dt nichts zu tun. **Etwas weniger präzise**, dafür aber anschaulicher gesprochen, kann man sich das mechanische System wie ein Fachwerkhaus vorstellen, das zwischen seine Nachbarhäuser und auf ein vorgegebenes Terrain passen muß (das sind die Zwangsbedingungen), und das in sich stabil sein soll. Um die Stabilität und die Tragfähigkeit zu testen, „wackelt“ man ein wenig an der Konstruktion, ohne die Zwangsbedingungen zu verletzen. Man stellt sich dabei vor, daß die einzelnen Elemente des Baus infinitesimal in alle möglichen, erlaubten Richtungen verschoben seien und beobachtet, wie die ganze Konstruktion antwortet.

You have got to be kidding me!!!

TBD: Lagrange-Multiplikatoren.

Beweis von (*):

eingeschränktes Stat.-Prinzip

$$0 = \left. \frac{d}{d\varepsilon} \right|_0 \int_{L_q} [\vec{q}(\cdot) + \varepsilon \vec{\delta}(\cdot)]$$

$$= \left. \frac{d}{d\varepsilon} \right|_0 \int_{L_r} [\vec{r}(\vec{q}(\cdot) + \varepsilon \vec{\delta}(\cdot))]$$

$$= \int_{t_0}^{t_1} \left. \frac{d}{d\varepsilon} \right|_0 L_r(\vec{r}(\vec{q}(t) + \varepsilon \vec{\delta}(t)), \frac{d}{d\varepsilon} \vec{r}(\vec{q} + \varepsilon \vec{\delta})) dt$$

$$\stackrel{\substack{\text{Kettenr.} \\ + \text{part. Int.}}}{=} \int \sum_{j=1}^N \underbrace{\frac{\partial L_r}{\partial \vec{r}_j}}_{= \frac{\partial V}{\partial \vec{r}_j}} \left(\left. \frac{d}{d\varepsilon} \right|_0 \vec{r}(\vec{q}(t) + \varepsilon \vec{\delta}(t)) \right)_j + \sum_{j=1}^N \underbrace{\left(\frac{d}{d\varepsilon} \frac{\partial L_r}{\partial \dot{\vec{r}}_j} \right)}_{= m \ddot{\vec{r}}_j} \left(\frac{d}{d\varepsilon} (\vec{r}(\vec{q}(t) + \varepsilon \vec{\delta}(t))) \right) dt$$

$$= \int \left(\underbrace{m \ddot{\vec{r}} + \vec{\nabla} V}_{\vec{K}} , \underbrace{\left. \frac{d}{d\varepsilon} \right|_0 \vec{r}(\vec{q}(t) + \varepsilon \vec{\delta}(t))}_{\text{beliebiger Tangentenvektor zu } M \text{ bei } \vec{r}(\vec{q}(t))} \right) dt$$

" $\Rightarrow$ " Wenn $\vec{K}$ im Normalraum ist, ist das innere
 Produkt $= 0 \leadsto$ Es gilt also das einge. Stat.-Pr.

" $\Leftarrow$ " Wenn das Stat.-Pr. gilt ist das Integral $= 0$

$\leadsto$ das innere Produkt $= 0 \leadsto \vec{K}$ normal zu M .
 (wie bei Bew. der ELG-Gl.)
 (da alle Tangentialvek. von der Form sind) $\square$

6.5 Skizzen eines physikalischen Modells

Sowohl das eingeschränkte Stationaritätsprinzip wie auch das (äquivalente) Prinzip von d'Alembert sind axiomatisch. D.h. wir haben sie nicht aus einer fundamentalen Theorie abgeleitet, sondern einfach postuliert - und dann beibehalten, weil sie sich mit experimentellen Beobachtungen verträglich gezeigt haben.

Man kann aber auch einen physikalischen Ansatz für die Zwangskräfte machen und zeigen, dass in diesem Modell die d'Alembert-Gleichung aus der Newton-Gleichung abgeleitet werden kann.

Die Details sind eine freiwillige Zusatzaufgabe auf dem Übungszettel. Hier skizziere ich nur die grobe Idee.

Wir nehmen an, dass M durch holonome Zwangsbed. definiert ist:

$$M = \{ \vec{r} \mid f_1(\vec{r}) = \dots = f_n(\vec{r}) = 0 \}$$

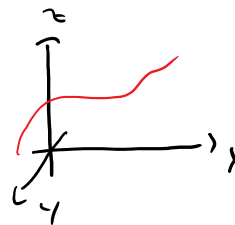
Bsp.:

① Ebenes Pendel



$$f_1(\vec{r}) = \|\vec{r}\| - d$$

② Erbse im Rohr



$$\text{Rohr} = \left\{ \begin{pmatrix} x \\ h(x) \\ g(x) \end{pmatrix} \mid x \in \mathbb{R} \right\}$$

$$f_1(x, y, z) = y - h(x)$$

$$f_2(x, y, z) = z - g(x)$$

Man kann nun die "strenge Bedingung" $f_i(\vec{r}) = 0$ durch eine "weiche Energie-Strafe" ersetzen:

$$V(\vec{r}) \mapsto \underbrace{V(\vec{r})}_{\text{obdA} \geq 0} + \mu \sum_{i=1}^n |f_i(\vec{r})|^2, \quad \mu \gg 0.$$

Sei $\vec{r}_\mu(t)$ die Lösung der BWGl. für ein Teilchen unter diesem Potential, mit Anfangsbed. $\vec{r}_\mu(t_0) \in M$ und Energie E .

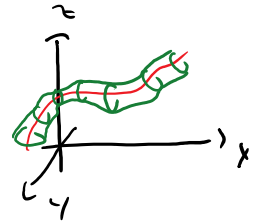
Energieerhaltung $\Rightarrow \vec{r}_\mu(t)$ wird im "Tubus" $\left| \sum_{i=1}^n |f_i(\vec{r})|^2 \right| \leq \frac{E}{\mu}$ bleiben



Potential, mit Anfangsbed. $\vec{r}_p(t_0) \in M$ und Energie E .

Energieerhaltung $\Rightarrow \vec{r}_p(t)$ wird im "Tubus" $\sum_i |f_i(r)|^2 \leq \frac{E}{p}$ bleiben

$\leadsto$ Im Limes $\vec{r}_0(t) := \lim_{p \rightarrow \infty} \vec{r}_p(t)$ erhält man Bahn $\in M$.



Man kann zeigen: $\vec{r}_0(t)$ erfüllt das eingesch. Stationaritätsprinzip.

7.1 Transformationen von Bahnen und die Galileogruppe

Beobachtung: Physikalische Gesetze scheinen unabhängig von Ort, Zeit, Ausrichtung, ... zu sein.

Studium dieser *Symmetrien*:

- Vereinfacht Rechnungen (vergl. Keplerproblem)
- Liefert Erhaltungsgrößen (kommt bald)
- Zentrale Zutat bei der Konstruktion neuer Theorien (-> Relativität, Feldtheorien...)

Betrachte Funktionalen

$$\Lambda: \vec{q}(\cdot) \mapsto \vec{q}'(\cdot)$$

die Bahnen auf Bahnen abbilden.

Bsp.: Galileo-Gruppe.

$N=3$, Koordinaten $\vec{r}$

- Ortsverschiebungen

$$\vec{r}'(t) = \vec{r}(t) + \vec{a} \quad \vec{a} \in \mathbb{R}^3$$

- Zeitverschiebungen

$$\vec{r}'(t) = \vec{r}(t-s) \quad s \in \mathbb{R}$$

- Rotationen

$$\vec{r}'(t) = R \vec{r}(t)$$

$$R \in SO(3)$$

$$R^T R = \mathbb{1}, \quad \det R = 1.$$

- Galileo-Boost

$$\vec{r}'(t) = \vec{r}(t) + \vec{w} t \quad \vec{w} \in \mathbb{R}^3$$

- Raumspiegelung

$$\vec{r}'(t) = -\vec{r}(t)$$

- Zeitumkehr

$$\vec{r}'(t) = \vec{r}(-t)$$

Insgesamt:

$$\vec{r}'(t) = \varepsilon R \vec{r}(\lambda t - s) + \vec{w} t + \vec{a}$$

$$\vec{a} \in \mathbb{R}^3$$

3

$$\vec{w} \in \mathbb{R}^3$$

3

$$R \in SO(3)$$

3

$$s \in \mathbb{R}$$

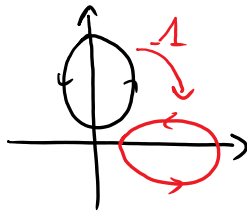
1

$$\varepsilon, \lambda \in \{1, -1\}$$

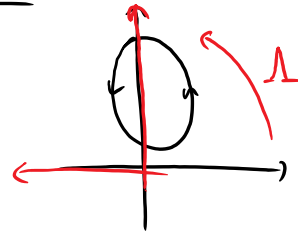
/ 10 kont. Parameter

Interpretation

Aktiv



Passiv



7.2 Symmetrien

Wähle BWGL.

Ein Funktional Λ eine Symmetrie der BWGL, wenn

① Λ bildet Lsg. der BWGL auf Lsg. ab.

② Λ ist invertierbar.

Bsp.: n-Körper-Problem

• $N = 3n$, Koordinaten: $\vec{r}_i = \begin{pmatrix} x_i \\ y_i \\ z_i \end{pmatrix}$, $\vec{r} = \begin{pmatrix} \vec{r}_1 \\ \vdots \\ \vec{r}_n \end{pmatrix}$.

• $L = T - V$ $T = \sum_i \frac{1}{2} m_i \|\dot{\vec{r}}_i\|^2$

$$V = \sum_{i,j} V_{ij}(\|\vec{r}_i - \vec{r}_j\|), \quad V_{ij}: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R} \text{ beliebig.}$$

Beh.: Galileo-Trans. sind Symmetrien des n-Körper-Problems.

Bew.:

Ortsverschiebungen

$$\vec{r}'_i(t) = \vec{r}_i(t) + \vec{a}, \quad \dot{\vec{r}}'_i(t) = \dot{\vec{r}}_i(t)$$

$$\Rightarrow L(\vec{r}'(t), \dot{\vec{r}}'(t)) = L(\vec{r}(t), \dot{\vec{r}}(t))$$

$\Rightarrow$ Wirkung verändert sich nicht

$\Rightarrow$ Menge der stat. Bahnen verändert sich nicht.

$\leadsto$ Ebenso behandelt man: Rotationen, Raumspiegelung, Zeitumkehr.

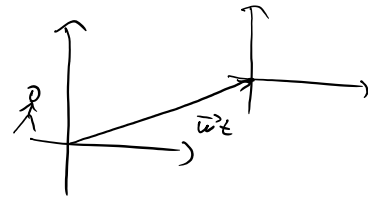
• Zeitverschiebung

$$\vec{r}''(t) = \vec{r}(t-s)$$

$$\begin{aligned} \int_{t_0}^{t_1} [\vec{r}'(\cdot)] &= \int_{t_0}^{t_1} L(\vec{r}(t-s), \dot{\vec{r}}(t-s)) dt \\ &= \int_{t_0-s}^{t_1-s} L(\vec{r}(t), \dot{\vec{r}}(t)) dt = \int_{t_0-s}^{t_1-s} [\vec{r}(\cdot)] \end{aligned}$$

• Galileo-Boost

$$\begin{aligned} \vec{r}'_i(t) &= \vec{r}_i(t) + \vec{w}t \quad \Rightarrow \quad \dot{\vec{r}}'_i(t) = \dot{\vec{r}}_i(t) + \vec{w} \\ \Rightarrow T(\dot{\vec{r}}'(t)) &= \sum_i \frac{1}{2} m_i (\dot{\vec{r}} + \vec{w}, \dot{\vec{r}} + \vec{w}) \end{aligned}$$



$$\begin{aligned} &= T(\dot{\vec{r}}(t)) + \underbrace{\frac{1}{2} \sum_i m_i (2(\vec{w}, \dot{\vec{r}}) + \|\vec{w}\|^2)}_{\frac{d}{dt} \underbrace{\frac{1}{2} \sum_i m_i (2(\vec{w}, \vec{r}(t)) + \|\vec{w}\|^2 \cdot t)}_{B(\vec{r}(t), t) \text{ "Randterm"}}} \end{aligned}$$

$$\Rightarrow \int_{t_0}^{t_1} [\vec{r}'(\cdot)] = \int_{t_0}^{t_1} [\vec{r}(\cdot)] + B(\vec{r}(t), t) \Big|_{t_0}^{t_1}$$

Zu zeigen: für stationäre $\vec{r}(\cdot)$, und $\vec{\delta}(\cdot)$ mit $\vec{\delta}(t_0) = \vec{\delta}(t_1) = 0$ gilt

$$0 \stackrel{!}{=} \frac{d}{d\varepsilon} \Big|_{\varepsilon=0} \int_{t_0}^{t_1} [\underbrace{(\vec{r}(\cdot) + \vec{w}t) + \varepsilon \vec{\delta}(\cdot)}_{(\vec{r}(\cdot) + \varepsilon \vec{\delta}(\cdot)) + \vec{w}t}]$$

$$\begin{aligned} &= \underbrace{\frac{d}{d\varepsilon} \Big|_{\varepsilon=0} \int_{t_0}^{t_1} [\vec{r}(\cdot) + \varepsilon \vec{\delta}]}_{=0 \text{ da } \vec{r}(\cdot) \text{ stationär}} + \underbrace{\frac{d}{d\varepsilon} \Big|_0 \left(B(\vec{r}(t) + \varepsilon \vec{\delta}(t), t) \Big|_{t_0}^{t_1} \right)}_{=0 \text{ da } \vec{\delta} \text{ am Rand } = 0} \quad \checkmark \end{aligned}$$

$\delta F = 0$ da $\vec{F}(\cdot)$ stationär

$\delta F = 0$ da $\vec{\delta}$ am Rand $= 0$. $\square$

7.3 Satz von Noether

"Kontinuierliche Symmetrie $\Rightarrow$ EHG."

($\Leftarrow \Rightarrow$ Umkehrung zeigen wir in Hamilton-Mechanik)

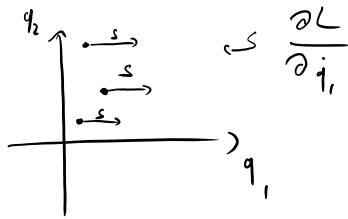
Motivation: Zyklische Koordinaten

Def.: Koordinate q_i zyklisch wenn $\frac{\partial L}{\partial q_i} = 0$.

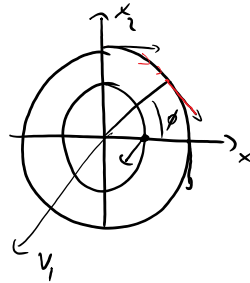
Sei nun q_i zyklisch $\Rightarrow_{\text{ELG}} \frac{d}{dt} \frac{\partial L}{\partial \dot{q}_i} = 0 \Rightarrow Q = \frac{\partial L}{\partial \dot{q}_i}$ EHG!

Geometrisch: Bsp.: q_1 zyklisch

$$L(q_1 + s, q_2, \dot{q}_1, \dot{q}_2) = L(q_1, q_2, \dot{q}_1, \dot{q}_2)$$



Betrachte L die unter Rotationen invariant ist. $\leadsto$ Wähle Polarkoordinaten



$\leadsto \phi$ zyklisch

$\leadsto$ EHG: $\frac{\partial L}{\partial \dot{\phi}}$

$$\vec{q}(t) \quad \frac{\partial L}{\partial \dot{q}_i} = \frac{\partial L}{\partial \dot{\phi}}(\vec{q}(t))$$



Die beiden Skizzen suggerieren, dass jede Invarianz der Lagrange-Funktion zu einer zyklischen Koordinate "geglättet" werden kann. Der damit assoziierte verallgemeinerte Impuls ist dann EHG.

Der Satz von Noether extrahiert die EHG direkt aus der Symmetrie, ohne dass man einen Koordinatenwechsel machen muss.

Das geht so:

Sei $\vec{\Phi}^{(s)} : \mathbb{R}^N \rightarrow \mathbb{R}^N$ invertierbar, mit

$$\textcircled{1} \quad \vec{\Phi}^{(0)}(\vec{x}) = \vec{x}$$

$$\textcircled{2} \quad \forall \vec{q}(\cdot), t : \left. \frac{d}{ds} \right|_{s=0} L(\vec{\Phi}^{(s)}(\vec{q}(t)), \frac{d}{dt} \vec{\Phi}^{(s)}(\vec{q}(t)), t) = 0.$$

Bsp.: • $\vec{\Phi}^{(s)}(\vec{x}) = \vec{x} + s\vec{a}$

• $\vec{\Phi}^{(s)}(\vec{x}) = \underbrace{\begin{bmatrix} \cos s & -\sin s & 0 \\ \sin s & \cos s & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}}_{R_z^{(s)}} \vec{x}$

} und n-Körper-Lagrange.

Nicht-Bsp.:

- Zeitverschiebung (Die Φ 's agieren nur auf dem Konfigurationsraum, nicht auf der Zeit)
- Galileo-Boosts (Der Randterm verdirbt es)

Satz Sei $\vec{\Phi}^{(s)}$ wie oben. Setze

$$Q = \sum_i \frac{\partial L}{\partial \dot{q}_i} \frac{d}{ds} \bigg|_{s=0} \vec{\Phi}_i^{(s)}(\vec{q}).$$

"verallg. Impuls in Richtung des V.F. der Symmetrie"

Dann: Für Lsg. $\vec{q}(\cdot)$ der B.W.G.e. gilt

$$Q(\vec{q}(t), \dot{\vec{q}}(t)) = \text{const.}$$

Bew.:

$$\frac{d}{dt} Q = \sum_i \underbrace{\left(\frac{d}{dt} \frac{\partial L}{\partial \dot{q}_i} \right)}_{\text{ELG} \Rightarrow \frac{\partial L}{\partial q_i}} \frac{d}{ds} \bigg|_0 \vec{\Phi}_i^{(s)}(\vec{q}(t)) + \sum_i \frac{\partial L}{\partial \dot{q}_i} \frac{d}{dt} \frac{d}{ds} \bigg|_0 \vec{\Phi}_i^{(s)}(\vec{q}(t))$$

$$= \frac{d}{ds} \bigg|_{s=0} L(\vec{\Phi}^{(s)}(\vec{q}(t)), \frac{d}{dt} \vec{\Phi}^{(s)}(\vec{q}(t))) = 0. \quad \square$$

7.4 Homogenität und Isotropie des Raums

Noether EHG:

$$Q = \sum_{j=1}^N \frac{\partial L}{\partial \dot{q}_j} \left. \frac{d}{ds} \right|_{s=0} \Phi_j^{(s)}(\vec{q})$$

Beispiele für das n -Körper-Problem $L = \sum_{i=1}^n \frac{1}{2} m_i \|\dot{\vec{r}}_i\|^2 - \sum_{1 \leq i < j \leq n} V_{ij}(\|\vec{r}_i - \vec{r}_j\|)$

- Ortsverschiebung entlang der x -Achse.

$$\vec{r}_i \mapsto \vec{r}_i + s \vec{e}_x$$

$$\vec{r} \mapsto \begin{pmatrix} x_1 + s \\ y_1 \\ z_1 \\ x_2 + s \\ y_2 \\ z_2 \\ x_3 + s \\ \vdots \end{pmatrix} \quad \left. \begin{matrix} \vdots \\ \vdots \\ \vdots \end{matrix} \right\} = 1 \quad \left. \begin{matrix} \vdots \\ \vdots \\ \vdots \end{matrix} \right\} = 2 \quad \vdots \quad m \quad N=3m$$

$$Q = \sum_i \frac{\partial L}{\partial \dot{x}_i} = \sum_i m_i \dot{x}_i = \left(\sum_i \vec{p}_i \right)_x$$

$\Rightarrow$ Homogenität des Raumes $\Rightarrow$ Impulserhaltung

- Drehung um z -Achse.

$$\vec{r}_i \mapsto \begin{bmatrix} \cos s & -\sin s & 0 \\ \sin s & \cos s & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{pmatrix} x_i \\ y_i \\ z_i \end{pmatrix}$$

$$\left. \frac{d}{ds} \right|_0 \quad \quad \quad = \begin{bmatrix} 0 & -1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \begin{pmatrix} x_i \\ y_i \\ z_i \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -y_i \\ x_i \\ 0 \end{pmatrix} = \vec{e}_z \times \vec{r}_i$$

$$Q = \sum_{i=1}^n \left(\underbrace{\frac{\partial L}{\partial \dot{x}_i}}_{(\vec{p}_i)_x} (\vec{e}_z \times \vec{r}_i)_x + \dots \right)$$

$$= \sum_{i=1}^n (\vec{p}_i, \vec{e}_z \times \vec{r}_i)$$

$$= (\mathbf{e}_z, \sum_{i=1}^n \vec{r}_i \times \vec{p}_i) = L_z \quad \text{z-Komp. des Gesamt Drehimpuls.}$$

$\leadsto$ Isotropie des Raumes $\Rightarrow$ Drehimpulserhaltung

7.5 Der verallgemeinerte Satz von Noether

Annahmen:

Betrachte Transformationen: $\Lambda^{(s)}: \vec{q}(\cdot) \mapsto \vec{q}^{(s)}(\cdot)$ mit

$$(0) \quad \vec{q}^{(0)}(t) = \vec{q}(t).$$

$$(1) \quad \text{Es gibt Fkt. } \vec{\Delta}: \mathbb{R}^N \times \mathbb{R}^N \times \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}^N$$

$$\left. \frac{d}{ds} \right|_{s=0} \vec{q}^{(s)}(t) = \vec{\Delta}(\vec{q}(t), \dot{\vec{q}}(t), t)$$

$$(\text{Zuvor: } \vec{q}^{(s)}(t) = \vec{\Phi}^{(s)}(\vec{q}(t)) \Rightarrow \vec{\Delta} = \left. \frac{d}{ds} \right|_0 \vec{\Phi}^{(s)}(\vec{q}(t)) = \vec{\Delta}(\vec{q}(t)))$$

$$(2) \quad \text{Es gibt Fkt. } f: \mathbb{R}^N \times \mathbb{R}^N \times \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$$

$$\left. \frac{d}{ds} \right|_0 L(\vec{q}^{(s)}(t), \dot{\vec{q}}^{(s)}(t), t) = \frac{d}{dt} f(\vec{q}(t), \dot{\vec{q}}(t), t).$$

$$(\text{Zuvor: } f = 0)$$

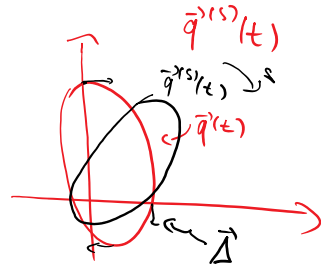
Dann:

$$Q = \sum_i \frac{\partial L}{\partial \dot{q}_i} \Delta_i - f \quad \text{ist E.H.G.}$$

Bew.:

$$\frac{d}{dt} Q(\vec{q}(t), \dot{\vec{q}}(t), t)$$

$$= \sum_i \left(\frac{\partial L}{\partial q_i} \Delta_i + \frac{\partial L}{\partial \dot{q}_i} \frac{d}{dt} \Delta_i \right) - \frac{d}{dt} f$$



$$= \frac{d}{ds} \Big|_0 L(\vec{q}^{(s)}(t), \dot{\vec{q}}^{(s)}(t), t) - \frac{d}{dt} f$$

$$= \frac{d}{dt} f$$

$$- \frac{d}{dt} f = 0$$

□

7.6 Homogenität der Zeit, Galileo-Boosts

Noether EHG:

$$Q = \sum_{j=1}^N \frac{\partial L}{\partial \dot{q}_j} \Delta_j - f$$

Beispiele für das n -Körper-Problem $L = \sum_{i=1}^n \frac{1}{2} m_i \|\dot{\vec{r}}_i\|^2 - \sum_{1 \leq i < j \leq n} V_{ij}(\|\vec{r}_i - \vec{r}_j\|)$

- Zeitverschiebungen

$$\vec{r}^{(s)}(t) = \vec{r}(t-s)$$

$$\textcircled{1} \quad \vec{r}^{(0)}(t) = \vec{r}(t) \quad \checkmark$$

$$\textcircled{2} \quad \left. \frac{d}{ds} \right|_0 \vec{r}(t-s) = -\dot{\vec{r}}(t) = \vec{\Delta}$$

$$\textcircled{3} \quad \left. \frac{d}{ds} \right|_0 L(\vec{r}^{(s)}(t), \dot{\vec{r}}^{(s)}(t))$$

$$= - \sum_{j=1}^N \frac{\partial L}{\partial \vec{r}_j} \dot{\vec{r}}_j(t) - \sum_{j=1}^N \frac{\partial L}{\partial \dot{\vec{r}}_j} \ddot{\vec{r}}_j(t)$$

$$= - \frac{d}{dt} L(\vec{r}(t), \dot{\vec{r}}(t)) \quad \Rightarrow \quad f = -L.$$

$$\Rightarrow \quad Q = - \sum_{j=1}^N \frac{\partial L}{\partial \dot{\vec{r}}_j} \dot{\vec{r}}_j + L = -H$$

Für n -Körper:

$$\sum_{i=1}^n \left(\underbrace{\frac{\partial L}{\partial \dot{\vec{x}}_i}}_{m_i \dot{\vec{x}}_i} \dot{\vec{x}}_i + \dots \right) = 2 T(\dot{\vec{r}})$$

$$\Rightarrow H = -Q = 2T - L = 2T - (T - V) \\ = T + V = \text{Energie.}$$

Homogenität der Zeit $\Rightarrow$ Energieerhaltung

- Galileo Boost (entlang x-Achse)

$$\vec{r}_i^{(s)} = \vec{r}_i + s \vec{e}_x \cdot t$$

$$\textcircled{2} \quad Q = \sum_{i=1}^n \underbrace{\frac{\partial L}{\partial \dot{x}_i}}_{(\vec{p}_i)_x} t - f$$

$$\textcircled{3} \quad f = \left. \frac{d}{ds} \right|_0 \frac{1}{2} \sum_i m_i (2s x_i(t) + s^2 \cdot t)$$

$$= \left(\sum_i m_i \vec{r}_i \right)_x$$

$$M = \sum_i m_i \quad \text{Gesamtmasse}$$

$$-\frac{1}{M} Q = \underbrace{\left(\frac{1}{M} \sum_i m_i \vec{r}_i \right)}_{\text{Schwerpunkt}}_x - t \underbrace{\frac{1}{M} \left(\sum_i \vec{p}_i \right)}_{\text{Gesamtimpuls}}_x$$

Boost-Invarianz $\Rightarrow$ Schwerpunktsatz

8.1 Hamilton-Mechanik

	N Variablen 2. Ordnung in t	$2N$ Variablen 1. Ordnung in t
Elementare Mechanik	Newton $\frac{d^2}{(dt)^2} r_i = -\frac{1}{m_i} \frac{\partial V}{\partial r_i}$	$\frac{d}{dt} r_i = v_i$ $\frac{d}{dt} v_i = -\frac{1}{m_i} \frac{\partial V}{\partial r_i}$
Analytische Mechanik	Lagrange $\frac{\partial L}{\partial q_i} - \frac{d}{dt} \frac{\partial L}{\partial \dot{q}_i} = 0$	Hamilton ... kommt jetzt...

Hamiltonsches BWG.

Zutaten: • $\mathbb{R}^{2N}$ Phasenraum mit Koordinaten $\vec{x} = \begin{pmatrix} \vec{q} \\ \vec{p} \end{pmatrix}$.

• Hamilton-Fkt. $H(\vec{q}, \vec{p}, t) : \mathbb{R}^{2N+1} \rightarrow \mathbb{R}$.

• Eine Bahn $\vec{x}(t) = \begin{pmatrix} \vec{q}(t) \\ \vec{p}(t) \end{pmatrix}$ erfüllt Hamiltonsches BWG

wenn gilt

$$\begin{aligned} \dot{q}_i(t) &= \frac{\partial H}{\partial p_i}(\vec{q}(t), \vec{p}(t), t) \\ \dot{p}_i(t) &= -\frac{\partial H}{\partial q_i}(\vec{q}(t), \vec{p}(t), t) \end{aligned} \quad (H)$$

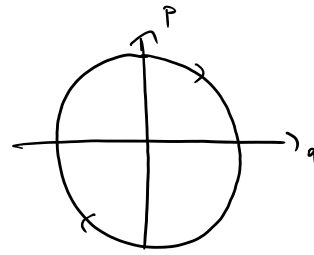
Bsp.: $N=1$, $H = \frac{1}{2}(p^2 + q^2)$

$$\leadsto \dot{q}(t) = \frac{\partial H}{\partial p} = p(t), \quad \dot{p}(t) = -\frac{\partial H}{\partial q} = -q(t)$$

Gelöst durch

$$q(t) = A \sin(t + \phi)$$

$$p(t) = A \cos(t + \phi)$$



8.2 Von Lagrange zu Hamilton

$$(ELG) \quad \frac{\partial L}{\partial q_i} - \frac{d}{dt} \frac{\partial L}{\partial \dot{q}_i} = 0$$

Frage: wie hängen die
zusammen?

$$(H) \quad \begin{aligned} \dot{q}_i &= \frac{\partial H}{\partial p_i} \\ \dot{p}_i &= -\frac{\partial H}{\partial q_i} \end{aligned}$$

Gegeben: $L(\vec{q}, \vec{v}, t)$.

① Setze

$$(*) \quad p_i(\vec{q}, \vec{v}, t) = \frac{\partial L}{\partial v_i}(\vec{q}, \vec{v}, t) \quad i=1 \dots N$$

i-te kanonisch konjugierte Impuls

② Löse (*) nach $\vec{v}$ auf:

$$\leadsto v_i(\vec{q}, \vec{p}, t) \quad i=1, \dots, N$$

Wenn Auflösen nicht möglich: Umschreiben
von Lagrange auf Hamilton schrittweise. $\ddot{}$

③ Setze

$$H(\vec{q}, \vec{p}, t) = \sum_i p_i v_i(\vec{q}, \vec{p}, t) - L(\vec{q}, \vec{v}(\vec{q}, \vec{p}, t), t)$$

Legendre-
Transformation

Bemerkung: Interessieren uns für L/H i.d.R. im
Zusammenhang mit Bahnen $\vec{q}(t)$. Setze dann $\vec{v} = \dot{\vec{q}}$.

$$\leadsto p_i = \frac{\partial L}{\partial \dot{q}_i}, \quad H = \sum_i p_i \dot{q}_i - L.$$

Bsp.: $L(\vec{q}, \dot{\vec{q}}, t) = T(\dot{\vec{q}}) - V(\vec{q})$, $T(\dot{\vec{q}}) = \sum_i \frac{1}{2} m_i \dot{q}_i^2$.

$$\Rightarrow p_i = \frac{\partial L}{\partial \dot{q}_i} = m_i \dot{q}_i \quad \Rightarrow \quad \dot{q}_i(\vec{q}, \vec{p}, t) = \frac{1}{m_i} p_i$$

$$\Rightarrow \sum_i p_i \dot{q}_i = \sum_i \frac{p_i^2}{m_i} = 2T$$

$$\Rightarrow H = 2T - T + V = T + V \quad \text{Gesamtenergie.}$$

Beh.: $\vec{q}(t)$ erfüllt (ELG) bzgl. L

$$\Leftrightarrow \begin{cases} \vec{x}(t) = \begin{pmatrix} \vec{q}(t) \\ \vec{p}(t) \end{pmatrix} \text{ erfüllt (H) mit} \\ \cdot p_i = \frac{\partial L}{\partial \dot{q}_i} \quad \cdot H = \sum_i p_i \dot{q}_i(\vec{q}, \vec{p}, t) - L(\vec{q}, \dot{\vec{q}}(\vec{q}, \vec{p}, t), t) \end{cases}$$

Bew.: " $\Rightarrow$ " Nehme an, dass $\vec{q}(t)$ die (ELG) erfüllt. Dann:

$$\frac{\partial H}{\partial q_j} = \sum_i p_i \cancel{\frac{\partial \dot{q}_i}{\partial q_j}} - \frac{\partial L}{\partial q_j} - \sum_i \underbrace{\frac{\partial L}{\partial \dot{q}_i}}_{p_i} \cancel{\frac{\partial \dot{q}_i}{\partial q_j}} \stackrel{(\text{ELG})}{=} - \frac{d}{dt} \frac{\partial L}{\partial \dot{q}_j} = - \dot{p}_j. \quad \checkmark$$

$$\frac{\partial H}{\partial p_j} = \dot{q}_j + \sum_i p_i \cancel{\frac{\partial \dot{q}_i}{\partial p_j}} - \sum_i \underbrace{\frac{\partial L}{\partial \dot{q}_i}}_{p_i} \cancel{\frac{\partial \dot{q}_i}{\partial p_j}} = \dot{q}_j \quad \checkmark$$

" $\Leftarrow$ " Nehme an, dass $\vec{x}(t)$ (H) erfüllt. Dann:

$$\frac{d}{dt} \frac{\partial L}{\partial \dot{q}_j} = \dot{p}_j = - \frac{\partial H}{\partial q_j} = \sum_i p_i \cancel{\frac{\partial \dot{q}_i}{\partial q_j}} + \frac{\partial L}{\partial q_j} + \sum_i \cancel{\frac{\partial L}{\partial \dot{q}_i}} \frac{\partial \dot{q}_i}{\partial q_j} = \frac{\partial L}{\partial q_j}. \quad \checkmark$$

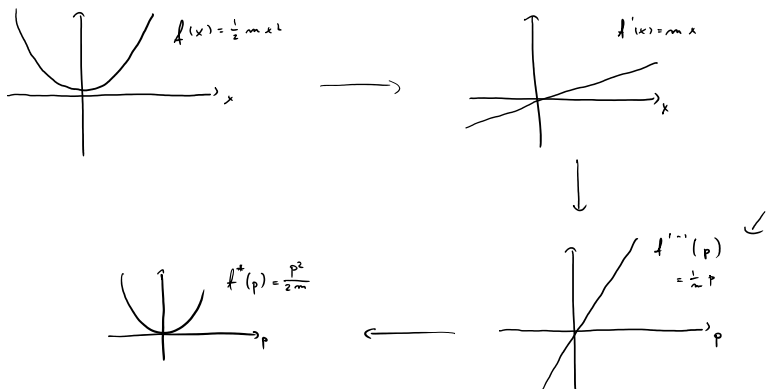
Zusammenfassung

Rahmen	System spezifiziert durch		
Newton	$\vec{F}(\vec{r}, \dot{\vec{r}}, t)$	Kraftgesetz	Integration $\vec{F} = - \vec{\nabla} V$ $\leadsto L = T - V$
Lagrange	$L(\vec{q}, \dot{\vec{q}}, t)$	Lagrange-Fkt.	
Hamilton	$H(\vec{q}, \vec{p}, t)$	Hamilton-Fkt.	Legendre-Transf. $H = \sum_i p_i \dot{q}_i - L$

Betrachte Fkt. $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$.

Setze $p(x) := f'(x)$.

Monoton ist p umkehrbar:



Setze dann: $f^*: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$

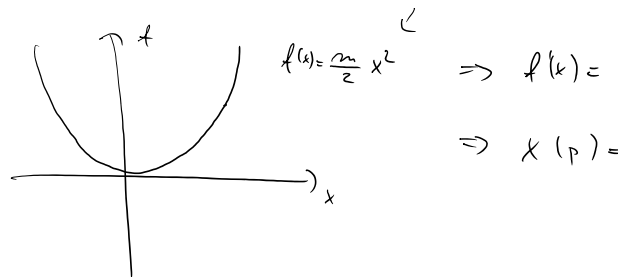
$$p \mapsto p \cdot f'^{-1}(p) - f(f'^{-1}(p)).$$

Legendre-
Transform.

Physik-Konvention: $p(x) := f'(x)$
 $x(p) := f'^{-1}(p)$ } $\Rightarrow f^*(p) = p \cdot x(p) - f(x(p))$
 $= p \cdot x - f$

$f(x): \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$

$p(x) := f'(x) \Rightarrow x(p)$



$\Rightarrow$ Def.: $f^*: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ Leg.-Trans.

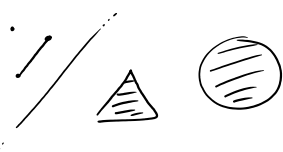
$$f^*(p) := p \cdot x(p) - f(x(p))$$

$$= \frac{p^2}{m} - \frac{m}{2} \left(\frac{1}{m} p \right)^2$$

Einschub: Geometrie der Legendre-Trans.

Eine Menge $M \subset \mathbb{R}^n$ ist konvex wenn die Verbindungsline zwischen je zwei Punkten aus M in M liegt.

Konvex



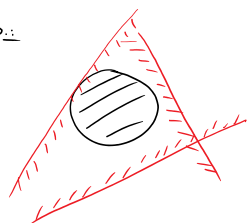
Nicht konvex



Dualität: Konvexe Menge M ist

- Vereinigung aller Punkte in M
- oder
- Schnitt aller Halbräume, die M enthalten

Bsp:



Für nicht-konvexe Mengen gilt das nicht:



Dieses Konzept der konvexen Dualität nimmt viele Formen an und kommt in viele Bereichen der Mathematik und Physik vor. Z.B.:

- In der Theorie von Polyhedren - insbesondere der Platonischen Körper
- In der Theorie normierter Räume
- Bei der Beschreibung allgemeiner Messungen auf quantenmechanischen Systemen
- In der Studie hypothetischer probabilistischer Theorien, die noch allgemeiner sind als QM
- In der Optimierungstheorie, wo Dualität benutzt wird um Optimalität einer Lösung zu zeigen, oder, allgemeiner, obere- und untere Schranken an eine zu optimierende Funktion zu finden
- ...und eben in der Zuordnung einer dualen Funktion - der Legendre-Transformierten.

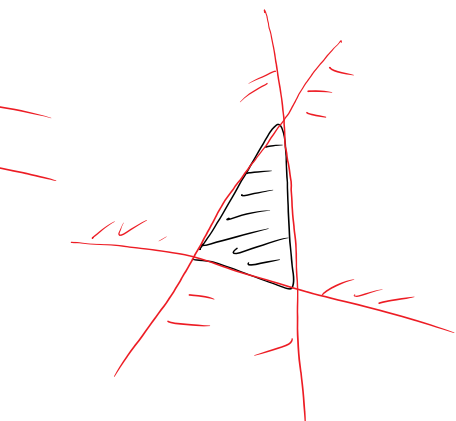


$$m \times =: p(x)$$

$$\frac{1}{n} p.$$

st.

$$^2 = \frac{p^2}{2m}$$



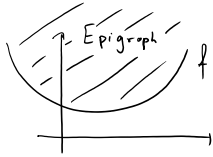
- In der Studie hypothetischer probabilistischer Theorien, die noch allgemeiner sind als QM
- In der Optimierungstheorie, wo Dualität benutzt wird um Optimalität einer Lösung zu zeigen, oder, allgemeiner, obere- und untere Schranken an eine zu optimierende Funktion zu finden
- ...und eben in der Zuordnung einer dualen Funktion - der Legendre-Transformierten.



Primal and dual polyhedra.
From: https://en.wikipedia.org/wiki/Primal_dual

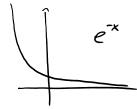
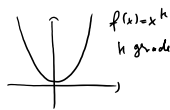
Zu Dualität bei Funktionen:

Der Epigraph einer Fkt. $f: \mathbb{R}^N \rightarrow \mathbb{R}$ ist Menge der Punkte "über dem Graph" von f :

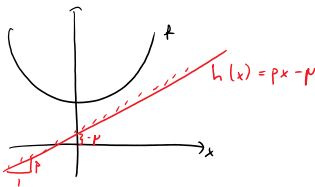


f ist konvex $\Leftrightarrow$ Epigraph ist konvex.

Bsp:



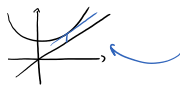
Sei f konvex. Halbgeraden, die den Epigraph von f enthalten, werden durch affine untere Schranken an f beschrieben:



$$h(\vec{x}) = (\vec{p}, \vec{x}) - p \quad \text{affin}$$

$$\text{mit } h(\vec{x}) \leq f(\vec{x}) \quad \forall \vec{x} \in \mathbb{R}^N.$$

$$\Leftrightarrow p \geq \sup_{\vec{x}} [(\vec{p}, \vec{x}) - f(\vec{x})] =: f^*(\vec{p}).$$



Beh.: Sup. wird bei $\vec{x}$ angenommen, wo $\vec{\nabla} f(\vec{x}) = \vec{p}$ ist.

$$\text{Bew.: } 0 = \vec{\nabla}((\vec{p}, \vec{x}) - f(\vec{x}))$$

$$= \vec{p} - \vec{\nabla} f(\vec{x}) \quad \square$$

$$\Rightarrow f^*(\vec{p}) = (\vec{p}, (\vec{\nabla} f)^{-1}(\vec{p})) - f((\vec{\nabla} f)^{-1}(\vec{p}))$$

$$=: \sum_j p_j x_j(\vec{p}) - f(\vec{x}(\vec{p})).$$

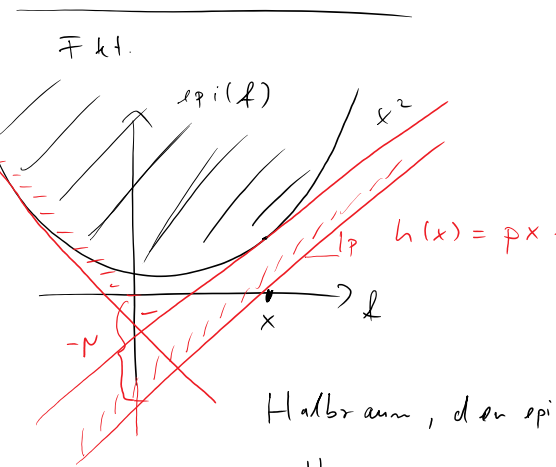
Eigenschaften:

f^* ist konvex
 $f^{**} = f$

Bew. (1) Epigraph von $f^* \hat{=}$ Menge aller affinen unteren Schranken an f .
Skizze:

(2) Konvexe Funktionen sind punktweises Max. aller affinen unteren Schranken.

$$\text{Daher: } f(\vec{x}) = \sup_{\vec{p}} [(\vec{x}, \vec{p}) - f^*(\vec{p})] = (f^*)^*(\vec{x}). \quad \square$$



Halbraum, den epi enth.

$\hat{=}$ affine unt. Schra

Geben p an f .

$$h(x) = px - p \leq f(x)$$

$$\Leftrightarrow p \geq \sup_x (px - f(x)) =: f^*(p)$$

Beh.: sup wird angenommen

$$x \quad \text{wo} \quad f'(x) = p.$$

$$\text{Bew.: } 0 \stackrel{!}{=} \frac{d}{dx} (px - f(x))$$

$$= p - f'(x) \quad \square$$

$$\Rightarrow f^*(p) = p(f')^{-1}(p) - f((f')^{-1}(p))$$

/ - 1 -

μ

h

h

$\forall x$

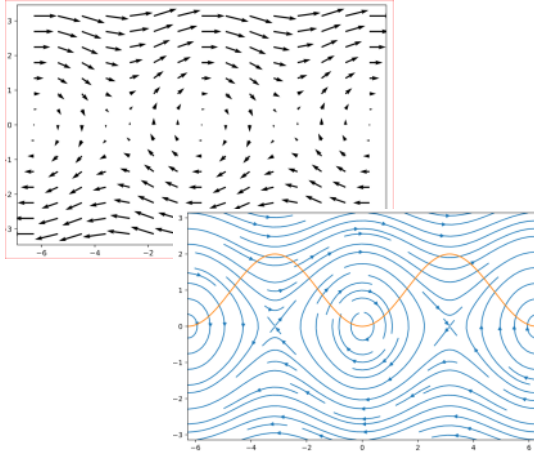
$\ast(p)$

b_i

(x)

8.3 Hamiltonsche Vektorfelder

Erinnerung



$$\frac{d}{dt} \vec{x}(t) = \vec{f}(\vec{x}(t))$$

Differentialgleichungen erster Ordnung beschreiben Fluß durch Vektorfelder im Phasenraum.

Hamilton:

$$\dot{q}_i = \frac{\partial H}{\partial p_i}, \quad \dot{p}_i = -\frac{\partial H}{\partial q_i}$$

$$\vec{\nabla} H = \begin{pmatrix} \vec{\nabla}_q H \\ \vec{\nabla}_p H \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{\partial H}{\partial q_1} \\ \vdots \\ \frac{\partial H}{\partial q_N} \\ \frac{\partial H}{\partial p_1} \\ \vdots \end{pmatrix}$$

$$\dot{\vec{x}} = \begin{pmatrix} \dot{q} \\ \dot{p} \end{pmatrix} = \underbrace{\begin{bmatrix} 0 & \mathbb{1}_N \\ -\mathbb{1}_N & 0 \end{bmatrix}}_{\mathcal{J}} \begin{pmatrix} \vec{\nabla}_q H \\ \vec{\nabla}_p H \end{pmatrix}$$

mit $\mathbb{1}_N = \begin{bmatrix} 1 & & \\ & \ddots & \\ & & 1 \end{bmatrix}_N$

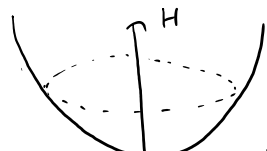
$\mathcal{J}$ "symplektische Matrix".

$$\Rightarrow \boxed{\dot{\vec{x}} = \mathcal{J} \vec{\nabla} H}$$

Hamiltonsche Vektorfeld.

Bsp.: Harmonischer Osz.

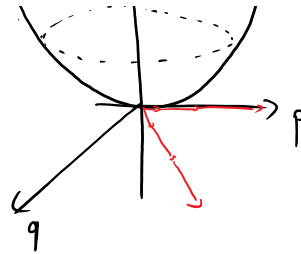
$$H(q, p) = \frac{p^2}{2m} + \frac{1}{2} m \omega^2 q^2$$



= r = ...

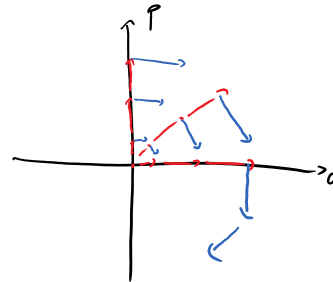
$$H(q, p) = \frac{p^2}{2m} + \frac{1}{2} m \omega^2 q^2$$

$$= \frac{1}{2} (p^2 + q^2) \quad m=\omega=1$$



$$\leadsto \vec{\nabla} H(\vec{x}) = \vec{x}$$

$$\leadsto \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{bmatrix} \begin{pmatrix} q \\ p \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} p \\ -q \end{pmatrix}$$



Erinnerung: [Picard-Lindelöf] Zu jedem Pkt $\vec{y} \in \mathbb{R}^{2N}$ gibt es
 eindeutige Integralkurve $\vec{x}(t)$ durch $\vec{y}$:

- $\vec{x}(0) = \vec{y}$
 - $\dot{\vec{x}}(t) = \vec{J} \vec{\nabla} H(\vec{x}(t))$
- (*)

$\leadsto$ Def: Hamiltonscher Fluß (Propagator) $\Phi_H^{(s)} : \mathbb{R}^{2N} \rightarrow \mathbb{R}^{2N}$

$$\Phi_H^{(s)}(\vec{y}) = \text{Pkt, an dem } \vec{y} \text{ s Zeiteinheiten später sein wird}$$

$$= \vec{x}(s) \quad \text{mit } \vec{x} \text{ wie in (*)}$$

Bsp.: Harmonische Osz. $\Phi_H^{(s)}(\vec{y}) = \begin{bmatrix} \cos s & \sin s \\ -\sin s & \cos s \end{bmatrix} \vec{y}$

Zusammenfassung: Dinge, die nach Hamilton benannt sind.

$\mathbb{R}^{2N}$	Phasenraum
$H(\vec{x})$	Hamilton-Fkt.
$\vec{J} \vec{\nabla} H$	Hamiltonsche V.F.

$$\vec{\nabla} H$$

Hamiltonsche V.F.

$$\dot{\vec{x}} = \vec{\nabla} H$$

Hamiltonsche Gl. ($\hat{=}$ $\vec{x}(t)$ Integralkurve
des Hamilt. V.F.)

$$\Phi_H^{(s)}: \mathbb{R}^{2N} \rightarrow \mathbb{R}^{2N}$$

Hamiltonscher Fluß

8.4 Poissonklammern

Betrachte reelle Fkt. $f: \mathbb{R}^{2N} \rightarrow \mathbb{R}$.

Bsp.: • $H(\vec{q}, \vec{p})$ zeitunabh. Hamilton-Fkt.

• $L_z = q_x p_y - q_y p_x$ 2-Komp. des Drehimpuls

Sei $\vec{x}(t)$ Lsg. der BWG'm.

→ Def.: $f(t) = f(\vec{x}(t))$.

Rechner:
$$\frac{d}{dt} f(t) = \sum_{i=1}^{2N} \frac{\partial f}{\partial q_i} \dot{q}_i + \sum_i \frac{\partial f}{\partial p_i} \dot{p}_i$$

$$= \sum_i \frac{\partial H}{\partial p_i} \frac{\partial f}{\partial q_i} - \sum_i \frac{\partial H}{\partial q_i} \frac{\partial f}{\partial p_i}$$

$$=: \{H, f\}$$

Poisson-Klammer = Änderung von f
entlang des Fluss von H .

Insbesondere

• f EHG $\Leftrightarrow \{H, f\} = 0$.

• Hamiltongl.: $\dot{q}_i = \{H, q_i\}$

$$\dot{p}_i = \{H, p_i\}$$

Eigenschaften

① Anti-Symmetrie: $\{f, g\} = -\{g, f\}$.

② Bilinear: $\{f, g + \lambda h\}$
 $= \{f, g\} + \lambda \{f, h\}$

Bsp.-Anwendung. Sei $H = H(\vec{q}, \vec{p})$.
Dann: $\frac{d}{dt} H(\vec{x}(t)) = \{H, H\}$
 $= -\{H, H\}$
 $= 0$.

③ Produktregel: $\{f, gh\} = g\{f, h\} + \{f, g\}h$

④ Jacobi-Identität

Erinnerung aus der Algebra

Ein Produkt ist assoziativ wenn

$$A(B \cdot C) = (A \cdot B)C$$

$$\{f, \{g, h\}\} \neq \{\{f, g\}, h\}$$

i. Allg.

Die Poissonklammer ist nicht assoziativ. Die verschiedenen Reihenfolgen in der man eine verschachtelte Anwendung von drei Poissonklammer gruppieren kann sind aber nicht unabhängig:

$$\underbrace{\{f, \{g, h\}\} + \{h, \{f, g\}\} + \{g, \{h, f\}\}}_{\text{zyklische Permutationen}} = 0$$

Aber was soll das bedeuten? Einige Hinweise dazu gibt es [bald](#).

⑤ Koordinaten-Fkt.:

$$\{x_i, x_j\} = J_{ij}$$

$$i, j = 1, \dots, 2N$$

$$J = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{bmatrix}$$

$\begin{matrix} q_1 \dots q_N & p_1 \dots p_N \\ \vdots & \vdots \end{matrix}$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} \{q_i, q_j\} = 0 \\ \{p_i, p_j\} = 0 \\ \{p_i, q_j\} = \delta_{ij} \\ \{q_i, p_j\} = -\delta_{ij} \end{cases}$$

$$i, j = 1, \dots, N$$

8.4.1 Noether, aber besser

$$f: \mathbb{R}^{2N} \rightarrow \mathbb{R} \quad \text{ist EHG}$$

$$\Leftrightarrow f(\vec{y}) = f(\Phi_H^{(s)}(\vec{y})) \quad \forall \vec{y} \in \mathbb{R}^{2N}, s \in \mathbb{R}$$

$$\Leftrightarrow \{H, f\} = 0$$

$$\Leftrightarrow \{f, H\} = 0 \quad (!!!)$$

$$\Leftrightarrow H(\vec{y}) = H(\Phi_f^{(1)}(\vec{y}))$$

$$\Leftrightarrow \text{Hamilton-Fkt. ist invariant unter Fluß von } f.$$

Wie cool ist das denn? Man kann die EHG selbst als eine Art Hamiltonfunktion auffassen. Die erzeugt dann einen Fluss im Phasenraum und der ist eine Symmetrie der eigentlichen Hamiltonfunktion.

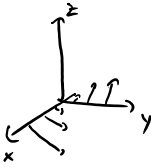
Das freut mich mehr als es vielleicht sollte. In jedem Fall zeigt sich hier so deutlich wie sonst selten, dass die vielen Abstrahierungen die uns von "Kraft ist Masse mal Beschleunigung" zur Poissonstruktur des Phasenraums geführt haben, manchmal tiefe Zusammenhänge klar ans Licht bringen.

Es stellt sich nun eine Kompatibilitätsfrage. Fangen wir an mit einer Symmetrie Φ wie wir sie in der Lagrange-Formulierung von Noethers Satz behandelt haben. Der gab uns damals eine EHG $Q(r, \dot{r})$. Wenn wir die Geschwindigkeiten auf Impulse umrechnen, ergibt sich eine erhaltene Phasenraumfunktion $Q(r, p)$. Ist deren Fluss jetzt gleich die ursprüngliche Symmetrie? Die Antwort ist: Im Wesentlichen ja. Anstatt die Details im allgemeinen Fall zu beschreiben, rechnen wir hier ein Beispiel.

$$\underline{\text{Bsp.:}} \quad f = L_z = q_x p_y - q_y p_x.$$

Fasse L_z als Hamilton-Fkt. auf. Löse Bwgl.:

$$\dot{q}_i = \frac{\partial L_z}{\partial p_i} = \begin{cases} -q_y & i=x \\ q_x & i=y \\ 0 & i=z \end{cases} = (\vec{e}_z \times \vec{q})_i$$



$$\dot{p}_i = - \frac{\partial L_z}{\partial q_i} = \dots = (\vec{e}_z \times \vec{p})_i$$

$$\Rightarrow \bar{\Phi}_{L_z}^{(s)} \begin{pmatrix} \vec{q} \\ \vec{p} \end{pmatrix} = \begin{bmatrix} R_z^{(s)} & 0 \\ 0 & R_z^{(s)} \end{bmatrix} \begin{pmatrix} \vec{q} \\ \vec{p} \end{pmatrix} \quad \downarrow$$

8.4.2 EHG sind unter Poisson-Klammern abgeschlossen

Wenn f, g EHG $\Rightarrow \{f, g\}$ ist EHG.

Bew.: Seien f, g EHG.

$$\{H, \{f, g\}\} = - \underbrace{\{g, \{H, f\}\}}_{=0} - \underbrace{\{f, \{g, H\}\}}_{=0} = 0. \quad \square$$

Bsp.: $f = L_x, g = L_y$

$$\begin{aligned} \boxed{\{L_x, L_y\}} &= \{q_y p_z - q_z p_y, q_z p_x - q_x p_z\} \\ &= \underbrace{\{q_y p_z, q_z p_x\}}_{=0} - \underbrace{\{q_y p_z, q_x p_z\}}_{=0} - \dots + \underbrace{\{q_z p_y, q_x p_z\}}_{-p_y q_x} \\ &= q_z \underbrace{\{q_y p_z, p_x\}}_{=0} + \{q_y p_z, q_z\} p_x = q_y \underbrace{\{p_z, q_z\}}_{=1} p_x = q_y p_x \\ &= q_y p_x - q_x p_y \\ &= \boxed{-L_z}. \end{aligned}$$

Also: Wenn zwei Komponenten des Drehimpuls erhalten sind, dann auch die Dritte.

Jetzt können wir eine Ahnung davon bekommen, was die Jacobi-Identität bedeutet. Die Geschichte geht so: gegeben zwei EHG, kann man zwei Symmetrien finden. Symmetrien bilden aber eine Gruppe: Wenn je zwei Abbildungen die Hamiltonfunktion invariant lassen, dann auch ihre Verknüpfung. Nach Noether gibt es zur verknüpften Symmetrie wieder eine EHG. Die gewinnt man (nach einigen Details, die wir ignorieren) durch die Poissonklammer.

Die Jacobi-Identität spiegelt also auf der Ebene der EHG wieder, dass Symmetrien eine Gruppe bilden.

Man kann das in der Theorie der Lie-Gruppen präzise verstehen.

Allgemein:

f, g

E H G

$\Downarrow$

$\bar{\Phi}_f^{(s)}, \bar{\Phi}_g^{(s)}$

Symmetrien

$\Downarrow$

$\vec{y} \mapsto \bar{\Phi}_f^{(s)}(\bar{\Phi}_g^{(s)}(\vec{y}))$

Symmetrie

$\Downarrow (s \rightarrow 0)$

Write E H G $\approx \{f, g\}$.

Thema für die Online-Sitzung

In der QM werden Orte und Impulse durch
Multiplikations- bzw. Differentialoperatoren beschrieben,
die auf "Wellenfunktionen" $\psi: \mathbb{R}^N \rightarrow \mathbb{C}$ agieren:

$$\hat{Q}_j : \psi(\vec{q}) \mapsto q_j \psi(\vec{q})$$

$$\hat{P}_j : \psi(\vec{q}) \mapsto i\hbar \frac{\partial}{\partial q_j} \psi(\vec{q})$$

Man rechnet leicht die folgenden Kommutator-Relationen
nach:

$$\frac{i}{\hbar} [\hat{Q}_i, \hat{Q}_j] = 0$$

$$\frac{i}{\hbar} [\hat{P}_i, \hat{P}_j] = 0$$

$$\frac{i}{\hbar} [\hat{P}_i, \hat{Q}_j] = \delta_{ij}$$

Die Orts- und Impulsoperatoren erfüllen unter dem Kommutator also die gleichen Relation wie die Orts- und Impulsfunktionen unter der Poisson-Klammer.

Man kann dieses Resultat benutzen, um das Verhalten von quantenmechanischen und klassischen Systeme miteinander in Verbindung zu setzen. Das funktioniert für Hamiltonfunktionen, die Polynome bis zur zweiten Ordnung in Orts- und Impulsoperatoren sind.

Neben dieser "kanonischen Quantisierung", die die Orts- und Impulsoperatoren in den Vordergrund stellt, gibt es z.B. auch noch die "Pfandintegralquantisierung", die direkt auf dem Wirkungsintegral aufbaut.

Aber das ist ein Thema für das nächste Semester...

8.5 Koordinaten im Phasenraum

Erinnerung: Die Euler-Lagrange Gleichungen zeichnen physikalische Bahnen in beliebigen Koordinaten für den Konfigurationsraum $\mathbb{R}^N$ aus.

Frage: In welchen Koordinaten für den Phasenraum $\mathbb{R}^{2N}$ haben die Bewegungsgleichungen die Hamiltonsche Form

$$(H) \quad \dot{\vec{x}}(t) = \int \vec{\nabla}_{\vec{x}} H$$

Zwei Motivationen

① Wähle an das Problem angep. Koordinaten, insb. "Alt"
im Hinblick auf Zwangsbedingungen.

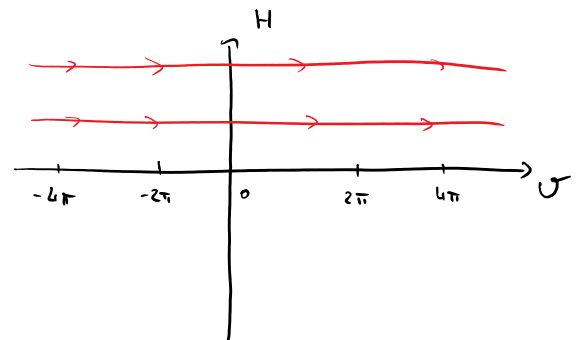
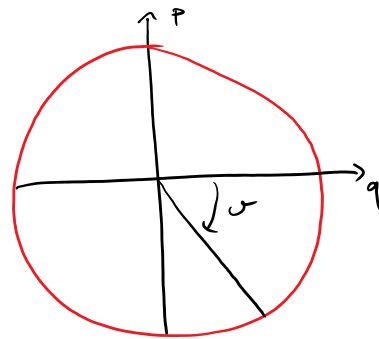
② Idee: Vereinfache BWG, in dem EHG selbst als Koordinaten gewählt werden.
"Neu"

Bsp.: Harmonische Osz.

$$H = \frac{1}{2} (q^2 + p^2)$$

→ Wähle "Polarkoordinaten"
 (φ, H)

$$\leadsto \text{BWGl.} = \begin{cases} \dot{H} = 0 \\ \dot{\varphi} = 1 \end{cases}$$



Systeme, deren Fluss in diesem Sinne linearisierbar ist, heißen **integrabel**. Wir werden das später genauer formulieren.

Die Transformation wäre im Lagrange-Formalismus nicht möglich gewesen, da die neuen Koordinaten (wie bei EHG üblich) von Ort **und** Impuls abhängen.

8.5.1 Kanonische Transformationen

$$(H) \quad \frac{d}{dt} \vec{X}(t) = \vec{\nabla}_{\vec{x}} H$$

Wähle beliebige Koordinaten

$$\vec{X}(\vec{x}) = \begin{pmatrix} \vec{Q}(\vec{q}, \vec{p}, t) \\ \vec{P}(\vec{q}, \vec{p}, t) \end{pmatrix}.$$

Um die Hamiltonschen Bewegungsgleichungen auf neue Koordinaten umzuschreiben, gehe vor wie zuvor für die [Newtongleichung](#).

• Benötigen die Jacobi-Matrizen

$$A_{ij} = \frac{\partial X_i}{\partial x_j}, \quad B_{ij} = \frac{\partial x_i}{\partial X_j}.$$

• Diese sind die Inversen voneinander:

$$\delta_{ij} = \frac{\partial X_i}{\partial X_j} = \sum_k \frac{\partial X_i}{\partial x_k} \frac{\partial x_k}{\partial X_j} = \sum_k A_{ik} B_{kj} = (A B)_{ij}.$$

• Linke Seite:

$$\frac{d}{dt} x_i(t) = \frac{d}{dt} x_i(\vec{X}(t)) = \sum_j \frac{\partial x_i}{\partial X_j} \dot{X}_j(t)$$

$$\Rightarrow \dot{\vec{X}}(t) = A^{-1} \dot{\vec{X}}(t)$$

• Rechte Seite:

$$\left(\vec{\nabla}_{\vec{x}} H \right)_i = \frac{\partial H}{\partial x_i} = \sum_j \frac{\partial X_j}{\partial x_i} \frac{\partial H}{\partial X_j}$$

$$\Rightarrow \vec{\nabla}_{\vec{x}} H = A^T \vec{\nabla}_{\vec{X}} H.$$

Kombiniert:

$$\dot{\vec{x}}(t) = \mathbb{J} \vec{\nabla}_{\vec{x}} H$$

$$\Leftrightarrow A^{-1} \dot{\vec{X}}(t) = \mathbb{J} A^T \vec{\nabla}_{\vec{x}} H$$

$$\Leftrightarrow \dot{\vec{X}}(t) = (A \mathbb{J} A^T) \vec{\nabla}_{\vec{x}} H$$

$\leadsto$ Form der Hamiltongl. erhalten wenn

$$A \mathbb{J} A^T = \mathbb{J}.$$

Solche Koordinatenwechsel heißen Kanonische Transformationen.

Koordinatenwechsel $\vec{X}(\vec{x})$ kanonisch

$$\Leftrightarrow \text{Jacobi-Matrix } A_{ij} = \frac{\partial X_i}{\partial x_j} \text{ erfüllt } A J A^T = J$$

Erinnerung: Der $\mathbb{R}^N$ mit Skalarprodukt

$$(\vec{x}, \vec{y}) = \sum_i x_i y_i$$

ist der N -dim. euklidische Raum. Seine Symmetriegruppe sind $N \times N$ Matrizen A mit

$$(\vec{x}, \vec{y}) = (A\vec{x}, A\vec{y}) \quad \forall \vec{x}, \vec{y} \in \mathbb{R}^N.$$

Äquivalent:

$$\begin{bmatrix} 1 & & \\ & \ddots & \\ 0 & & 1 \end{bmatrix}$$

$$(A\vec{x}, A\vec{y}) = (A^T A \vec{x}, \vec{y}) \stackrel{!}{=} (\vec{x}, \vec{y}) \quad \Leftrightarrow \quad A^T A = \mathbb{1}$$

$$\Leftrightarrow A^T \mathbb{1} A = \mathbb{1}$$

Def.: $\{ A \mid A^T A = \mathbb{1} \} = O(N)$, die orthogonale Gruppe.

Der $\mathbb{R}^{2N}$ mit innerem Produkt

$$(S) \quad [\vec{x}, \vec{y}] = (\vec{x}, J \vec{y})$$

ist $2N$ -dim. symplektischer Raum. Das innere Produkt $[\cdot, \cdot]$ heißt symplektische Form. Sie ist anti-symmetrisch:

$$[\vec{x}, \vec{y}] = (\vec{x}, J \vec{y}) = (J \vec{y}, \vec{x}) = (\vec{y}, J^T \vec{x}) = -(\vec{y}, J \vec{x}) = -[\vec{y}, \vec{x}].$$

$$\begin{bmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{bmatrix}^T = \begin{bmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix}$$

$$\Rightarrow [\vec{x}, \vec{x}] = -[\vec{x}, \vec{x}] \Rightarrow [\vec{x}, \vec{x}] = 0$$

$\leadsto$ Jeder Vektor ist selbst-orthogonal!

Def.: Die symplektische Gruppe $Sp(2N)$ ist Menge der $2N \times 2N$ -Matrizen A mit

$$(*) \quad [\vec{x}, \vec{y}] = [A\vec{x}, A\vec{y}] \quad \forall \vec{x}, \vec{y}.$$

Äquivalent:

$$[A\vec{x}, A\vec{y}] = (A\vec{x}, J A\vec{y}) = (\vec{x}, A^T J A \vec{y}) \stackrel{!}{=} (\vec{x}, J \vec{y})$$

$$\Leftrightarrow A^T J A = J.$$

Eigenschaften:

$$\bullet \quad A \in Sp \Leftrightarrow A^T \in Sp$$

$$\leadsto \vec{X}(\vec{x}) \text{ kanonisch} \Leftrightarrow \text{Jacobi-Matrix} \in Sp.$$

$$\bullet \quad A \in Sp \Rightarrow \det A = 1.$$

$$\bullet \quad \text{Poisson-Klammer: } \{f, g\} = [\vec{\nabla}_g, \vec{\nabla}_f].$$

$\Delta \nabla \varepsilon!$

Weitere Eigenschaften und Beweisskizzen:

① $S_p(2N)$ ist Gruppe.

Zu zeigen: $A, B \in S_P \Rightarrow \begin{cases} A \cdot B \in S_P, \\ A^{-1} \in S_P. \end{cases}$ Beides folgt direkt aus (*).

② $\gamma \in S_p$.

$$B_{w..} \quad \underbrace{\gamma \gamma \gamma^T}_{=-\gamma} = - \underbrace{\gamma \gamma^2}_{=-11} = \gamma.$$

③ $A \in S_p \Rightarrow A^{-1} = J^{-1} A^T J$

Bzw.: $A^T J A = J \Rightarrow J^{-1} A^T J A = \mathbb{1} \Rightarrow J^{-1} A^T J = A^{-1}$.

④ $A \in S_p \Rightarrow A^T \in S_p.$

$$\text{Bzw.: } A \in S_p \xrightarrow{\textcircled{1}} A^{-1} \in S_p \Rightarrow A^{-T} J A^{-1} = J \Rightarrow \underbrace{J^T A \underbrace{J^{-T} J}_{=J} \underbrace{J^{-1} A^T J}_{=-J}}_{= -J^3 = J} = J$$

⑤ $A \in Sp(2N) \Rightarrow \det A = 1.$

Bew.: Nicht ganz trivial.

Leichter zu sehen: $\det A = \pm 1$. Dann: $(*) \Rightarrow \det(A^T J A) = \det(J) \Rightarrow \det(A)^2 = 1$.

$$\begin{array}{c} \text{"} \\ (\det A)^2 \det(J) \end{array}$$

Dass der 1-Fall nicht auftreten kann zeigen wir hier nicht.

⑥ Für $N=1$ (und nur dort) gilt auch die Umkehrung.

Also: $A \in S_p(\mathbb{Z}) \Leftrightarrow \det A = 1$.

Beweis: Für $\vec{x} = \begin{pmatrix} q \\ p \end{pmatrix}$, $\vec{x}' = \begin{pmatrix} q' \\ p' \end{pmatrix}$: $[\vec{x}, \vec{x}'] = qp' - pq' = \det \begin{pmatrix} q & q' \\ p & p' \end{pmatrix}$.

$$\sim [A\bar{x}', A\bar{x}''] = \det \left(A \begin{pmatrix} q & q' \\ r & r' \end{pmatrix} \right) = \det A [\bar{x}', \bar{x}'].$$

8.5.3 Poissonklammer-Kriterium für kanonische Transformationen

Beh.: $\vec{X}(\vec{x})$ kanonisch $\Leftrightarrow \{X_i, X_j\} = \{x_i, x_j\}$.

Bew.: $\{X_i, X_j\} = [\vec{\nabla}_{\vec{x}} X_j, \vec{\nabla}_{\vec{x}} X_i]$

$$= [A^T \underbrace{\vec{\nabla}_X X_j}_{e_j}, A^T \underbrace{\vec{\nabla}_X X_i}_{e_i}]$$

$$= [e_j, e_i]$$

$$\Leftrightarrow A \in Sp(2N)$$

$$= [\vec{\nabla}_x x_j, \vec{\nabla}_x x_i]$$

$$= \{x_i, x_j\}$$

□

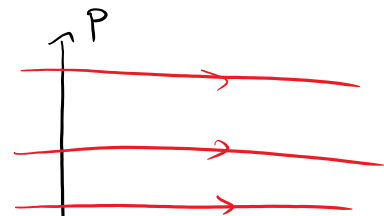
Bsp.: harmonisch. Osz.

$$H(q, p) = \frac{1}{2m} p^2 + \frac{1}{2} m \omega^2 q^2$$

Beh.:
$$\left. \begin{aligned} P(q, p) &= \frac{1}{\omega} H(q, p) \\ Q(q, p) &= \alpha \tan\left(m \omega \frac{q}{p}\right) \end{aligned} \right\} \text{ ist kanonisch.}$$

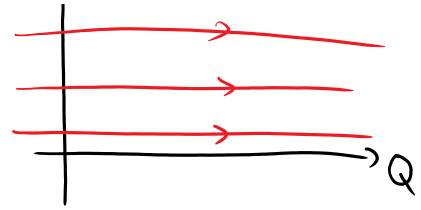
Dann: $H(Q, P) = \omega P$

$$\dot{P} = -\frac{\partial H}{\partial Q} = 0$$



$$\dot{P} = - \frac{\partial H}{\partial Q} = 0$$

$$\dot{Q} = - \frac{\partial H}{\partial P} = \omega$$



Bew.:

$$0 = \{q, q\} \stackrel{!}{=} \{Q, Q\} = 0 \quad \checkmark$$

$$1 = \{p, q\} \stackrel{!}{=} \{P, Q\}$$

$$= \frac{\partial P}{\partial r} \frac{\partial Q}{\partial q} - \frac{\partial P}{\partial q} \frac{\partial Q}{\partial p}$$

$$= \frac{1}{m\omega} \cancel{p} \operatorname{atan}'\left(m\omega \frac{q}{\cancel{p}}\right) \frac{m\omega}{\cancel{p}}$$

$$+ \frac{1}{\omega} \cancel{m} \omega^2 q \operatorname{atan}'\left(m\omega \frac{q}{\cancel{p}}\right) m\omega q \frac{1}{p^2}$$

$$\stackrel{!}{=} \frac{1}{1 + m^2 \omega^2 \frac{q^2}{p^2}} \left(1 + m\omega^2 \frac{q^2}{p^2} \right) = 1 \quad \checkmark$$

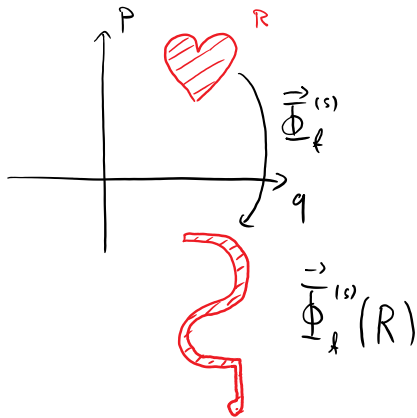
$$\begin{aligned} & \operatorname{atan}'(x) \\ &= \frac{1}{1+x^2} \end{aligned}$$

$$\left[\begin{aligned} H(q, p) &= \frac{1}{2m} p^2 + \frac{1}{2} m \omega^2 q^2 \\ P(q, p) &= \frac{1}{\omega} H(q, p) \\ Q(q, p) &= \operatorname{atan}\left(m\omega \frac{q}{p}\right) \end{aligned} \right]$$

8.5.4 Der Satz von Liouville

Satz Hamiltonsche Flüsse $\vec{\Phi}_f^{(s)}$ sind kanonisch.

Anwendung: Hamiltonsche Flüsse erhalten Phasenraumvolumen.



Bew.:

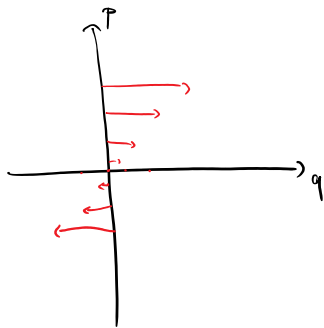
$$\int_{\vec{\Phi}_f^{(s)}(R)} d^{2N} \vec{x} = \int_R \underbrace{|\det A(s)|}_{A(s)_{ij} = \frac{\partial(\vec{\Phi}_f^{(s)}(\vec{x}))_i}{\partial x_j}} d^{2N} \vec{x}$$

$$\in Sp(2N)$$

$$\stackrel{\text{Eigenschaft (5)}}{=} \int_R d^{2N} \vec{x}.$$

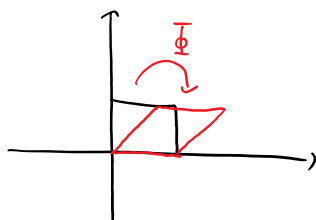
Bsp.: Freie Teilchen (\$N=1\$):

$$H(q, p) = \frac{p^2}{2m}$$



$$\vec{\nabla} H = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} q \\ p \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} p \\ -q \end{pmatrix}$$

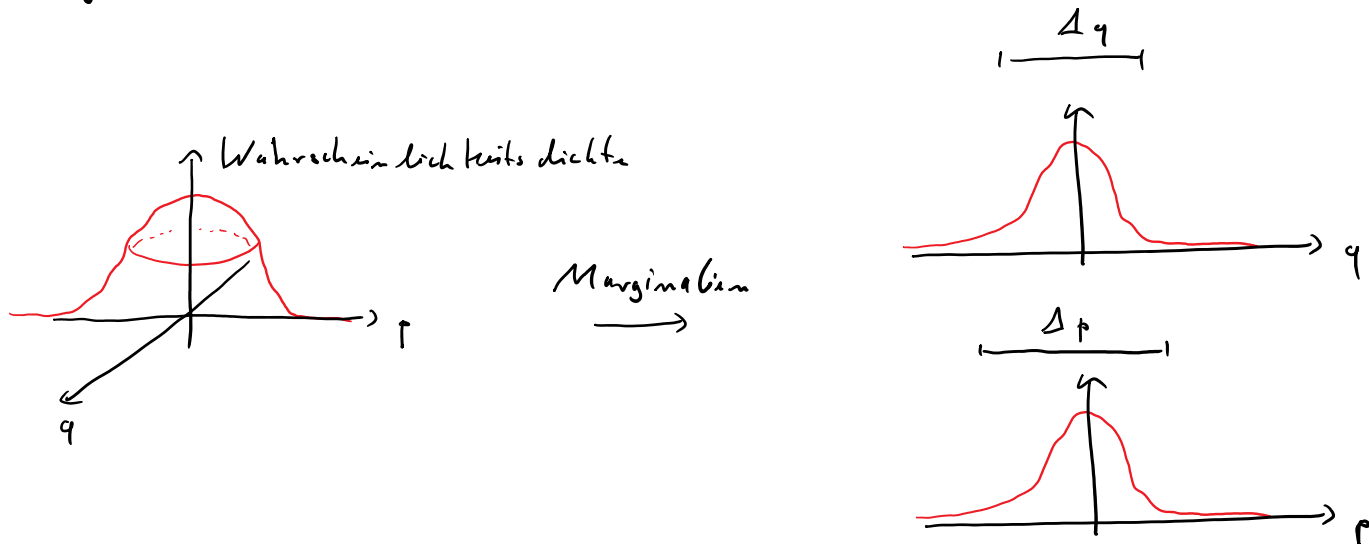
$$\vec{\Phi}_H^{(s)} \begin{pmatrix} q \\ p \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} q + \frac{p-s}{m} \\ p \end{pmatrix} = \underbrace{\begin{pmatrix} 1 & -\frac{p-s}{m} \\ 0 & 1 \end{pmatrix}}_{= A(s) \in Sp(2)} \begin{pmatrix} q \\ p \end{pmatrix} \quad \text{Eigenschaft (6)}$$



\$A(s)\$ ist Scherung, die
Volumen, aber nicht Längen oder Winkel erhält.

Ausblick: Quetschungen im Quantenphasenraum

Es gibt Quantenzustände, die bei Orts- und Impulsmessungen die gleiche Statistik liefern, wie Gauß'sche Wahrscheinlichkeitsverteilungen auf dem Phasenraum:



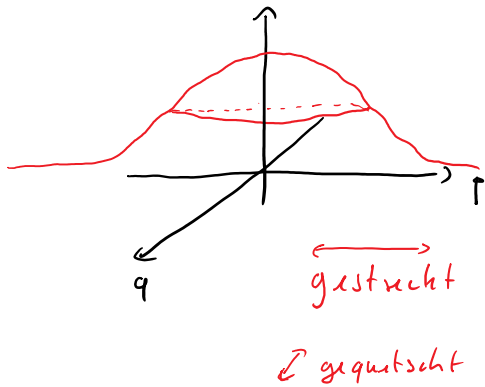
Auf Grund der Unschärferelation $\Delta q \Delta p \geq \hbar/2$, kann die Verteilung nicht beliebig schmal konzentriert sein.

Lineare kanonische Transformationen können quantenmech. realisiert werden. Bsp.: Rotationen $\Phi(\vec{x}) = \begin{bmatrix} \cos s & -\sin s \\ \sin s & \cos s \end{bmatrix} \cdot \vec{x}$

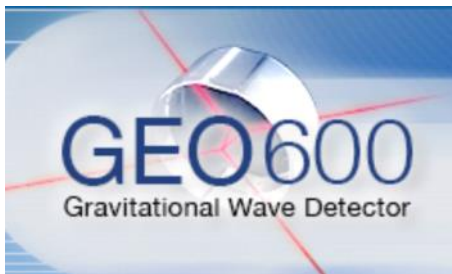
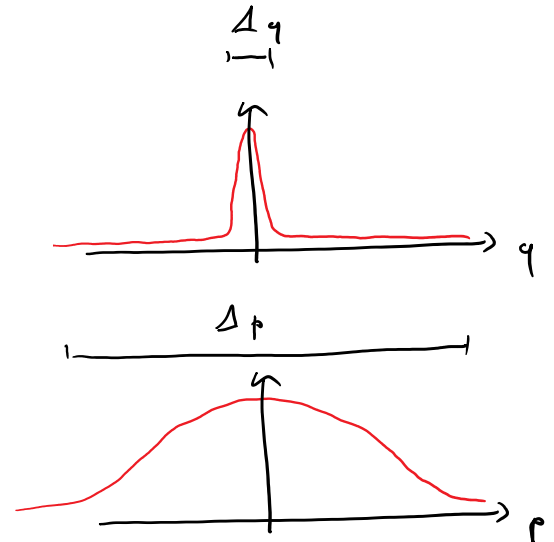
Scherungen $\Phi(\vec{x}) = \begin{bmatrix} 1 & s/m \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \cdot \vec{x}$

"Quetschungen" $\Phi(\vec{x}) = \begin{bmatrix} e^{\kappa} & 0 \\ 0 & e^{-\kappa} \end{bmatrix} \cdot \vec{x}$

Querschnitte reduzieren Unschärfe entlang einer Achse, auf Kosten der anderen:



→



Interferometer, die mit "gequatschtem Licht" arbeiten, erreichen höhere Genauigkeit.

Weltweit führend dabei: GEO600 bei Hannover.

8.5.5 Satz von Liouville (Beweis)

Satz Hamiltonsche Flüsse $\vec{\Phi}_f^{(s)}$ sind kanonisch.

Beweis Zu zeigen: $A(s)_{ij} = \frac{\partial X_i}{\partial x_j} = \frac{\partial (\vec{\Phi}_f^{(s)}(\vec{x}))_i}{\partial x_j} \stackrel{!}{\in} \text{Sp}(2N).$

① Betrachte Familie $A(s) = \mathbb{1} + s \underbrace{M}_{2N \times 2N \text{ Matrix}} + O(s^2).$

$$\boxed{0} \stackrel{!}{=} \left. \frac{d}{ds} \right|_0 (A(s) J A(s)^T) = \left. \frac{d}{ds} \right|_0 (J + s(MJ + JM^T) + O(s^2))$$

$$= MJ + JM^T$$

Solche M heißen

• "infinitesimale sympl. Transf."

oder

• Elemente der Lie algebra $\text{sp}(2N).$

② Für hamilt. Flüsse:

$$\left. \frac{d}{ds} \right|_0 A(s)_{ij} = \left. \frac{d}{ds} \right|_0 \frac{\partial (\vec{\Phi}_f^{(s)}(\vec{x}))_i}{\partial x_j} = \frac{\partial}{\partial x_j} (\vec{x} + J \vec{\nabla} H)_i$$

$$= \delta_{ij} + \sum_k J_{ik} \underbrace{\frac{\partial^2 H}{\partial x_j \partial x_k}}_{\text{Hesse matrix } \tilde{M}}.$$

$$\Rightarrow A(s) = \mathbb{1} + s \underbrace{J \tilde{M}}_M + O(s^2)$$

Damit:

$$\begin{aligned} MJ + JM^T &= J \tilde{M} J + J \tilde{M}^T J^T \\ &\quad \underbrace{\quad}_{\tilde{M}} \quad \underbrace{\quad}_{-J} \\ &= J \tilde{M} J - J \tilde{M} J = 0 \quad \checkmark \end{aligned}$$

$$= \vec{J} \tilde{M} \vec{J} - \vec{J} \tilde{M} \vec{J} = 0. \quad \checkmark$$

③ Nutze: $\vec{\Phi}_f^{(s+t)} = \vec{\Phi}_f^{(s)} \circ \vec{\Phi}_f^{(t)}$ "eiparametrische Gruppe".

$$\Rightarrow A(s+t) = A(s) A(t)$$

Beweis:

$$A(s+t)_{ij} = \frac{\partial (\vec{\Phi}_f^{(s+t)})_i}{\partial x_j} = \frac{\partial (\vec{\Phi}_f^{(s)}(\vec{\Phi}_f^{(t)}(\vec{x})))_i}{\partial x_j}$$

$$= \sum_k A(s)_{ik} A(t)_{kj} \quad \square$$

$$\Rightarrow \frac{d}{ds} A(s) = \frac{d}{dt} \Big|_0 A(s+t) = \frac{d}{dt} \Big|_0 A(s) A(t) = A(s) M.$$

$$\Rightarrow \frac{d}{ds} (A(s) \vec{J} A(s)^T) = A(s) M \vec{J} A(s)^T + A(s) \vec{J} M^T A(s)^T$$

$$= A(s) \underbrace{(M \vec{J} + \vec{J} M^T)}_{=0} A(s)^T = 0. \quad \square$$

8.5.6 Erzeugende Funktionen:
Hauptaussage

① Wähle Fkt. $F: \mathbb{R}^{2N} \rightarrow \mathbb{R}$.

② Definiere $\vec{Q}(\vec{q}, \vec{p})$ in dem

$$p_i = \frac{\partial F(\vec{q}, \vec{Q})}{\partial q_i} \quad i = 1, \dots, N$$

nach $\vec{Q}$ aufgelöst wird.

③ Setze dann

$$P_i = - \frac{\partial F(\vec{q}, \vec{Q}(\vec{q}, \vec{p}))}{\partial Q_i}$$

Beh.: $\vec{X}(\vec{x}) = \begin{pmatrix} \vec{Q}(\vec{q}, \vec{p}) \\ \vec{P}(\vec{q}, \vec{p}) \end{pmatrix}$ ist kanonische Transf.

Bew.:
($N=1$)

$$\{P, Q\} = \frac{\partial P}{\partial p} \bigg|_q \frac{\partial Q}{\partial q} \bigg|_p - \frac{\partial P}{\partial q} \bigg|_p \frac{\partial Q}{\partial p} \bigg|_q$$

Dazu:

$$\frac{\partial P}{\partial p} \bigg|_q = \frac{\partial P}{\partial Q} \bigg|_q \frac{\partial Q}{\partial p} \bigg|_q$$

$$\frac{\partial P}{\partial q} \bigg|_p = \frac{\partial P}{\partial q} \bigg|_Q + \frac{\partial P}{\partial Q} \bigg|_q \frac{\partial Q}{\partial q} \bigg|_p$$

$$\downarrow \frac{\partial P}{\partial p} \bigg|_q \frac{\partial Q}{\partial q} \bigg|_p - \frac{\partial P}{\partial Q} \bigg|_q \frac{\partial Q}{\partial p} \bigg|_q$$

Def.:

$$p(q, Q) = \frac{\partial F(q, Q)}{\partial q} = \frac{\partial F}{\partial q} \bigg|_Q$$

$$\Rightarrow Q(q, p)$$

$$\rightarrow P(q, Q) = - \frac{\partial F(q, Q)}{\partial Q} = - \frac{\partial F}{\partial Q} \bigg|_q$$

$$\Rightarrow P(q, p) = P(q, Q(q, p))$$

$$= \cancel{\frac{\partial P}{\partial Q}} \bigg|_q \cancel{\frac{\partial Q}{\partial p}} \bigg|_q \cancel{\frac{\partial Q}{\partial q}} \bigg|_p - \left(\frac{\partial P}{\partial q} \bigg|_Q + \cancel{\frac{\partial P}{\partial Q}} \bigg|_q \cancel{\frac{\partial Q}{\partial q}} \bigg|_p \right) \frac{\partial Q}{\partial p} \bigg|_q$$

$$= - \frac{\partial P}{\partial q} \bigg|_Q \frac{\partial Q}{\partial p} \bigg|_q = \frac{\partial Q}{\partial p} \bigg|_q \frac{\partial^2 F}{\partial Q \partial q} = \frac{\partial Q}{\partial p} \bigg|_q \frac{\partial P}{\partial Q} \bigg|_q$$

$$= \frac{\partial Q}{\partial Q} = 1.$$

□

Ziel hier ist es, weitere kanonische Transf. zu finden.

— Dazu:

Auch die Hamiltonschen Gleichungen können aus einem Stationaritätsprinzip abgeleitet werden:

$(\vec{q}(t), \vec{p}(t))$ löst Hamiltongl.

⇔ Die Kurve ist stationär für das Funktional

$$(*) \quad \int_{t_0}^{t_1} L(\vec{q}(\cdot), \dot{\vec{q}}(\cdot)) dt = \int_{t_0}^{t_1} (\vec{p}(t) \cdot \dot{\vec{q}}(t) - H(\vec{q}(t), \vec{p}(t))) dt$$

bzgl. Variationen $\delta \vec{q}(\cdot), \delta \vec{p}(\cdot)$ mit $\delta \vec{q}(t_0/t_1) = 0$

Bew.: Wie bei ELG ... $\square$

Anm.: • $\vec{p}(t_0/t_1)$ muss unter Variationen nicht festgehalten werden.
• Wenn $H = \vec{p} \cdot \dot{\vec{q}} - L$ durch Legendre-Transf. aus einer Lagrange-Fkt. hervorgeht, dann ist der Integrand in (*) einfach L . In diesem Fall ist (*) mit dem zuvor eingeführten Prinzip identisch. (*) gilt aber allgemein.

Seien nun $\vec{Q}, \vec{P}$ neue Koordinaten, s.d. es eine Funktion F auf dem Phasenraum gibt, s.d. entlang jeder Bahn

$$(\square) \quad \vec{p} \cdot \dot{\vec{q}} = \vec{P} \cdot \dot{\vec{Q}} + \frac{d}{dt} F$$

gilt. Dann ist (für beliebige Hamilton-Fkt.):

$$S'[(\vec{Q}(\cdot), \vec{P}(\cdot))] = S'[(\vec{q}(\cdot), \vec{p}(\cdot))] + \underbrace{F(t_0) - F(t_1)}_{\text{const.}}$$

Da der letzte Term nicht von der Bahn abhängt, ist

$$(\vec{q}(\cdot), \vec{p}(\cdot)) \text{ stationär} \Leftrightarrow (\vec{Q}(\cdot), \vec{P}(\cdot)) \text{ stationär}$$

Aber auch:



$$\dot{q}_i = \frac{\partial H}{\partial p_i}, \quad \dot{p}_i = -\frac{\partial H}{\partial q_i}$$

$$Q_i = \frac{\partial H}{\partial P_i}, \quad P_i = -\frac{\partial H}{\partial Q_i}$$

In anderen Worten: Wenn $(\square)$ mit geeignetem F gilt, sind $\vec{Q}, \vec{P}$ kanonisch.

(Zumindest lokal) kann man für jede kanonische Transf. ein solches F finden. Das folgt aus der Theorie der Differentialformen - und soll uns hier nicht weiter beschäftigen...

Sinn dieser Umformulierung ist, dass man die Konstruktion umkehren kann, und aus $\vec{p}, \vec{q}$ und F kanonische $\vec{Q}, \vec{P}$ erzeugen kann.

Das geht so:

① Wähle ein $F: \mathbb{R}^{2N} \rightarrow \mathbb{R}$.

② Definiere $\vec{Q}(\vec{q}, \vec{p})$ in dem

$$P_i = \frac{\partial F(\vec{q}, \vec{Q})}{\partial q_i}$$

nach $\vec{Q}$ aufgelöst wird.

③ Setze dann

$$P_i(\vec{q}, \vec{p}) = - \frac{\partial F(\vec{q}, \vec{Q}(\vec{q}, \vec{p}))}{\partial Q_i}.$$

Dann ist

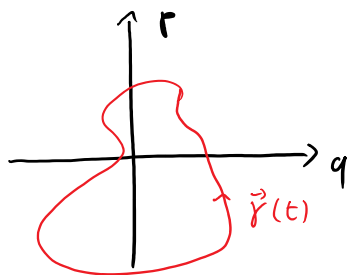
$$\begin{aligned} \frac{d}{dt} F(\vec{q}(t), \vec{Q}(t)) &= \sum_i \frac{\partial F}{\partial q_i} \dot{q}_i + \sum_i \frac{\partial F}{\partial Q_i} \dot{Q}_i \\ &= \vec{P} \cdot \dot{\vec{q}} - \vec{P} \cdot \dot{\vec{Q}}, \end{aligned}$$

aber das ist (□)! Die durch ① - ③ definierten $\vec{Q}$, $\vec{P}$ sind also kanonisch!

F ist die Erzeugende des Koordinatenwechsels.

Die Technik kann auf viele Arten verallgemeinert werden (z.B. auf zeitabhängige Transformationen, oder man kann F als Fkt. anderer Koordinaten ausdrücken...)

— Ausblick: Mehr zum Wirkungsintegral —————



Sei $N=1$ und

$$\vec{\gamma}: [0, T] \rightarrow \mathbb{R}^2$$

$$\vec{\gamma}(t) = \begin{pmatrix} q(t) \\ p(t) \end{pmatrix}$$

eine geschlossene Trajektorie: $\vec{\gamma}(0) = \vec{\gamma}(T)$.

Dann ist

$$\oint_{\gamma} p dq := \int_{t=0}^T p(t) \dot{q}(t) dt = \text{von } \gamma \text{ eingeschlossene Fläche.}$$

$\uparrow$
 Satz von Green
 $\Uparrow$
 (c.l.L.)

(Stöhr)

Da kanonische Transformationen Volumen erhalten, ist

$$\oint_{\gamma} P dQ = \oint_{\gamma} p dq$$

für beliebige kanonische Koordinaten (Q, P) . (Das folgt auch aus (17) ...).

Die Fläche ist also eine koordinatenunabhängige Eigenschaft der Bahn.

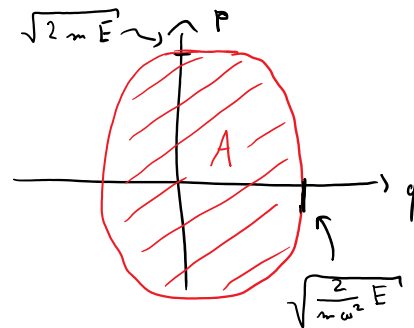
Anfang des 20. Jahrhunderts kam das Wirkungsintegral kurzzeitig zu besonderer Prominenz. Bevor die moderne Quantentheorie entwickelt war, wurde eine ad hoc-Modifizierung der Hamiltonschen Mechanik postuliert:

Die **Bohr-Sommerfeldsche Quantisierungsbedingung** sagt, dass geschlossene Bahnen nur dann realisiert werden können, wenn das Wirkungsintegral ein ganzzahliges Vielfaches des **Planckschen Wirkungsquantums** $h = 6.63 \times 10^{-34}$ Js ist.

Die klassische Hamiltonmechanik zusammen mit der Quantisierungsbedingung kann für einige quantenmechanische Systeme richtige Vorhersagen machen - z.B. für die Energieniveaus des harmonischen Oszillators und des Wasserstoffatoms. Eine systematische Theorie konnte man auf ihr aber nicht aufbauen. Ab den 1930er Jahren wurde diese "alte Quantentheorie" durch die heute akzeptierte Version ersetzt.

$$\oint_{\gamma} p dq = m h \quad m \in \mathbb{N}$$

Harmonischer Oszillator:



Fläche der Ellipse

$$= \pi E \frac{2}{\omega} \stackrel{!}{=} m h$$

$$\Leftrightarrow E = \frac{h}{2\pi} m \omega = \hbar m \omega$$

9.1 Langzeitverhalten dynamischer Systeme

Ziel: Verstehe das Langzeitverhalten dynamischer System.

Beispielfragen:

- Sind Bewegungen periodisch?
- Wie stabil sind Lösungen unter kleinen Störungen?
- Gibt es *universelle* Phänomene, also qualitative Eigenschaften von Lösungen, die nicht vom Detail der Bewegungsgleichungen abhängen?

Ein dynamisches System besteht aus:

- Ein Zustandsraum M (z.B. $M = \mathbb{R}^{2N}$)
- Abbildungen $\bar{\Phi}^{(t)}: M \rightarrow M$ mit

$t \in \begin{cases} \mathbb{R} \\ \mathbb{R}_{\geq 0} \\ \mathbb{Z} \\ \mathbb{N}_0 \end{cases}$	reversibel, kontinuierlich
	inversibel, "
	reversibel, diskret
	inversibel, "

so dass

- $\bar{\Phi}^{(0)}(x) = x$

- $\bar{\Phi}^{(t_2)}(\bar{\Phi}^{(t_1)}(x)) = \bar{\Phi}^{(t_2+t_1)}(x)$ "Halbgruppe"

9.2 Die Logistische Gleichung

↑
"Das Hasen-im-Park-Modell"

Zunächst schauen wir uns ein radikal simples Modellsystem an, das überraschend, bereits hochkomplexes Verhalten zeigt. Chaos in der Hamiltonschen Mechanik ist dann das Thema des nächsten Kapitels. (Der Grund für diesen Umweg ist, dass alle Hamiltonschen Systeme mit einem Freiheitsgrad integrabel sind - die einfachsten chaotischen Systeme leben also in einem vierdimensionalen Phasenraum und sind viel schwieriger zu visualisieren als das leichte Beispiel hier).

$$\mathcal{M} = [0, 1]$$

$\mathcal{M} \ni x$ Hasenpopulation im Grüngürtel

$x = 0$ keine Hasen

$x = 1$ Maximum

$$t \in \mathbb{N}_0$$

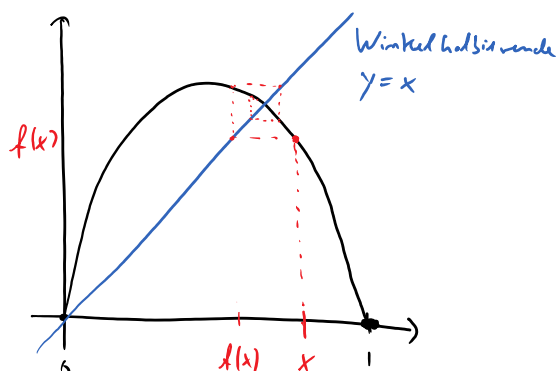
$\Phi^{(t)}(x)$ = Population nach t Jahren

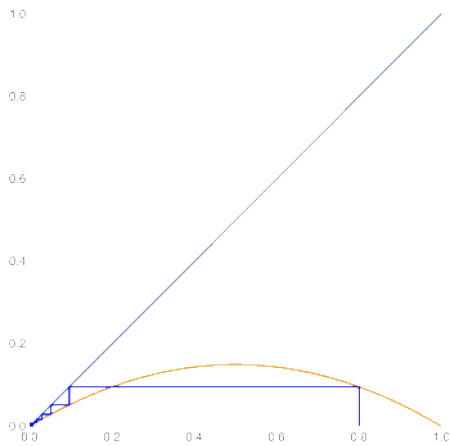
$$\Phi^{(1)}(x) =: f(x)$$

Ansatz:

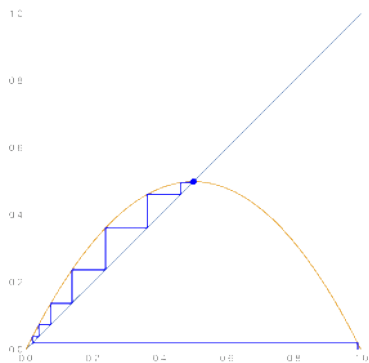
$$f(x) = r \times \underbrace{(1-x)}_{\text{Populationsdruck}}$$

potentielle Eltern
↓

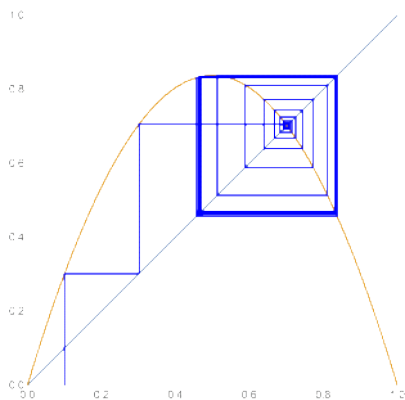




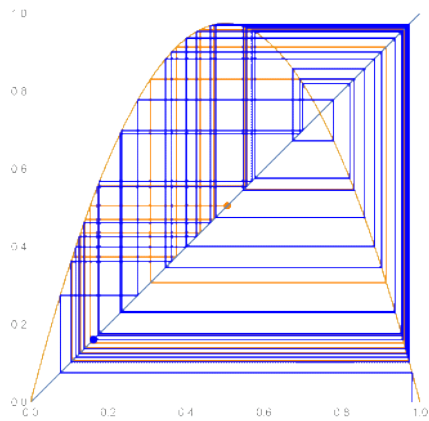
$r < 1 \leadsto$ exponentielles Schrumpfen.



$r = 2 \leadsto$ Fixpunkt



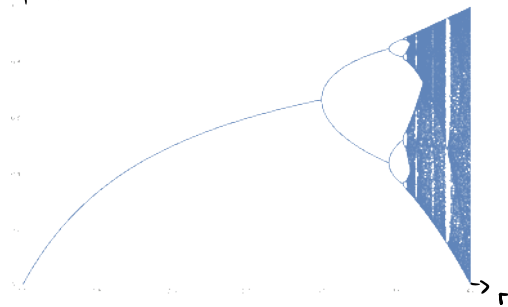
$r = 3,35 \leadsto$ "Schweinezyklus".



$$r = 3,9$$

- Keine Struktur erkennbar
- Unstabil gegenüber Störungen

Fixpunkte



— Bifurkationsdiagramm —

9.3 Periodische Bahnen und Fixpunkte

Sei $x_0 \in M$. Die Menge

$$x_0, x_1 = \Phi^{(1)}(x_0), x_2 = \Phi^{(2)}(x_0) = \Phi^{(2)}(x_0), x_3 = \dots$$

heißt die Bahn vom x_0 unter Φ
(engl. orbit)

- Die Bahn hat Periode p wenn $x_p = x_0$.
- Fixpunkt: x_0 mit $\Phi^{(1)}(x_0) = x_0$ ist Bahn mit Periode = 1.

Bsp.: FP der Log. Gl.

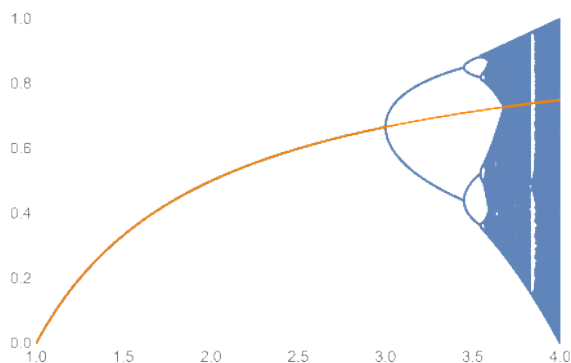
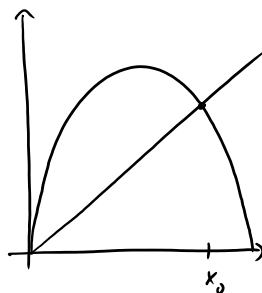
$$f(x_0) \stackrel{!}{=} x_0$$

$$\Leftrightarrow r x_0 (1 - x_0) = x_0$$

$$\Leftrightarrow 1 - x_0 = 1/r$$

$\Leftrightarrow$

$$x_0 = 1 - 1/r$$



Die orangene Linie ist $1 - 1/r$. Für $r \leq 3$ stimmt die Numerik mit der Theorie überein. Aber was passiert dann? Der Fixpunkt scheint zu verschwinden - obwohl die dreizeilige einfache Rechnung oben beweist, dass er weiterhin existiert?

...die Lösung des scheinbaren Widerspruchs besteht darin, dass der Fixpunkt bei $r = 3$ instabil wird. Wie die Ruhelage des Pendels am oberen Totpunkt existiert er weiterhin prinzipiell, wird aber durch die Numerik, die mit zufälligen Anfangswerten operiert, nie gefunden. Um das mathematisch einzusehen, nehmen wir nun eine Stabilitätsanalyse von Fixpunkten vor.

9.4 Der Lyapunov-Exponent

Sei $x_0 \in M$.

Betrachte Störung s :

$$\Phi(x_0 + s) = \Phi(x_0) + \Phi'(x_0) \cdot s + O(s^2)$$

$$\Phi(\Phi(x_0 + s)) = \underbrace{\Phi(\Phi(x_0))}_{=x_1} + \underbrace{\Phi'(\Phi(x_0))}_{=x_1} \Phi'(x_0) \cdot s + O(s^2)$$

$\vdots$

$$\Phi^{(p)}(x_0 + s) = \Phi^{(p)}(x_0) + \underbrace{\left(\prod_{i=0}^{p-1} \Phi'(x_i) \right)}_{\mu} \cdot s + O(s^2)$$

Nehme an: x_0 hat Periode p .

$\leadsto \mu$ = Produkt der Abl. entlang der Bahn.

$$\leadsto \Phi^{(p \cdot k)}(x_0 + s) = x_0 + \mu^k s + O(s^2)$$

$\lambda := \log |\mu|$ Lyapunov-Exponent.

Damit:

$$\begin{cases} |\mu| < 1 \Leftrightarrow \lambda < 0 & \leadsto \text{stabil} \\ |\mu| > 1 \Leftrightarrow \lambda > 0 & \leadsto \text{unstabil} \end{cases}$$

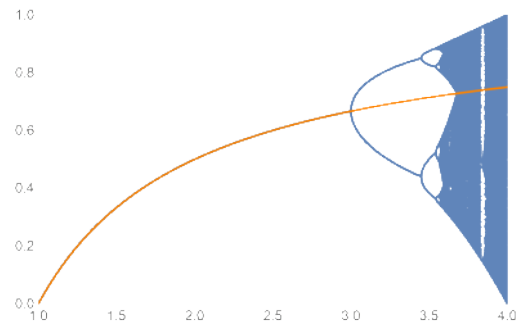
Damit:

$$\begin{cases} |\mu| < 1 \Leftrightarrow \lambda < 0 & \leadsto \text{stabil} \\ |\mu| > 1 \Leftrightarrow \lambda > 0 & \leadsto \text{unstabil} \end{cases}$$

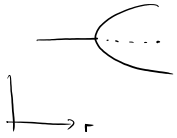
Bsp.: FP der log. Gl.

$$x_0 = 1 - 1/r, \quad \mu = f'(x_0) = r(1 - 2x_0) = r(1 - 2 + 2/r) = 2 - r.$$

$\leadsto$ Stabil $\Leftrightarrow r < 3$.



9.5 Bifurkationen



Wir verstehen nun, warum der FP mit Periode 1 aus dem Bifurkationsdiagramm verschwindet. Als nächstes schauen wir uns an, warum sich an seiner statt eine "Stimmgabelform" (*pitchfork bifurcation*) ausbildet.

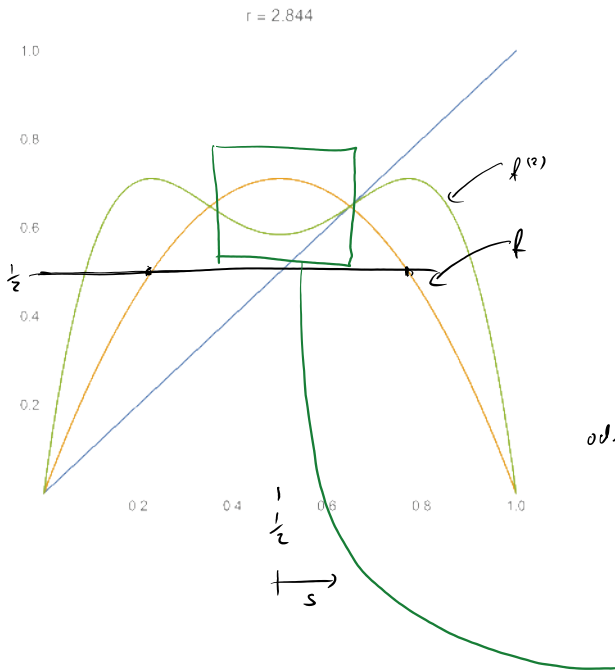
Der interessanteste Aspekt der Analyse wird sein, dass lediglich *qualitative Eigenschaften* von f_r eingehen. Wir erwarten daher also, dass das Entstehen von Stimmgabelbifurkationen auch für andere Modelle auftritt, und nicht von der präzisen Form von f als umgedrehte Parabel abhängt.

Man nennt solche Eigenschaften *universell*. Die Beobachtung, dass ausgerechnet der Weg ins Chaos nicht "chaotisch" abläuft, sondern nach universellen Regeln abläuft, ist eine zentrale Entdeckung der Theorie komplexer Systeme.

Betrachte $f_r, f_r^{(2)}$

①

Zunächst leiten wir die Aussagen über die Form von $f^{(2)}$ ab. Wir nehmen dabei lediglich an, dass f genau bei $1/2$ ein Maximum hat.



$f^{(2)}$ hat drei Extrema.

Denn:

$$0 \stackrel{!}{=} \frac{d}{dx} f(f(x)) \\ = f'(f(x)) \cdot f'(x)$$

innere Abl. = 0 $\Leftrightarrow x = 1/2$ (1 Lsg.)

oder

Äußer Abl. = 0 $\Leftrightarrow f(x) = 1/2$ (2 Lsg.).

Im Kasten:

$$f^{(2)}(1/2 + s) \approx f(1/2) + f(1/2 + s) \cdot \underbrace{f'(f(1/2))}_{< 0}$$

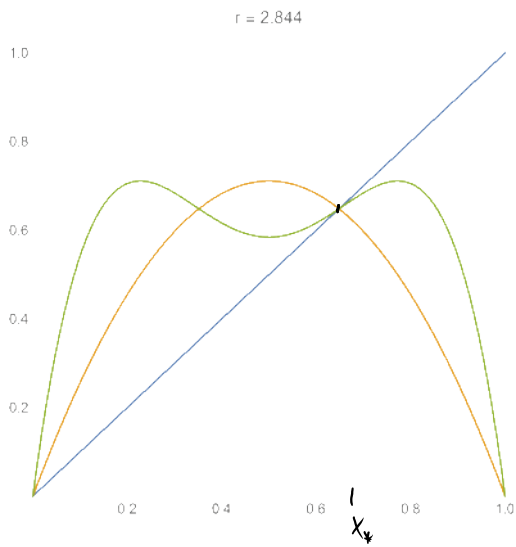
$$f^{(2)} \text{ um } 1/2 \approx f \text{ um } 1/2,$$

verschoben und y-Achse
reskaliert.

②

Fixpunkte von $f, f^{(2)}$

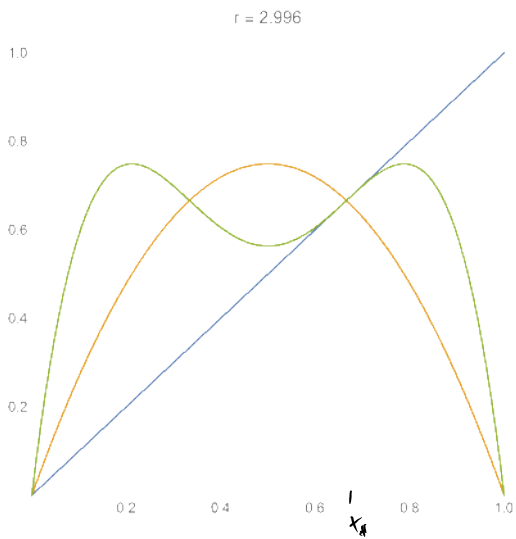
II Fixpunkte von $f, f^{(2)}$



$$\underline{r < 3}$$

$$|f'(x_*)| < 1 \leadsto \text{stabile F.P.}$$

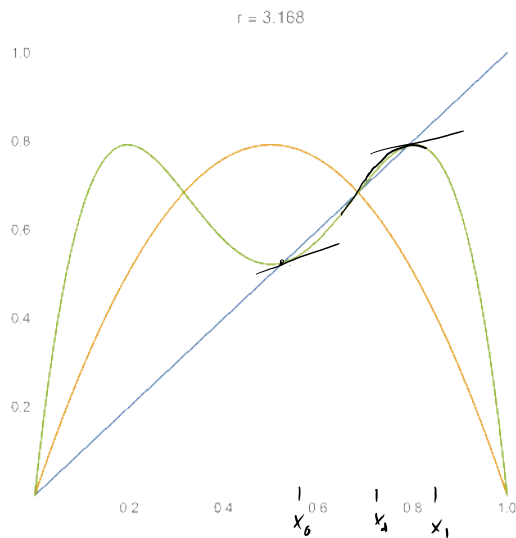
$$\Rightarrow (f^{(2)})'(x_*) = (f'(x_*))^2 < 1$$



$$\underline{r = 3}$$

$$|f'(x_*)| = 1$$

$$\Rightarrow (f^{(2)})'(x_*) = (f'(x_*))^2 = 1$$



$$\Gamma > 3$$

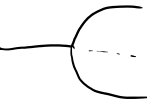
$$\Rightarrow (f^{(2)})'(x_*) > 1$$

$\Rightarrow$ Neu, stabile

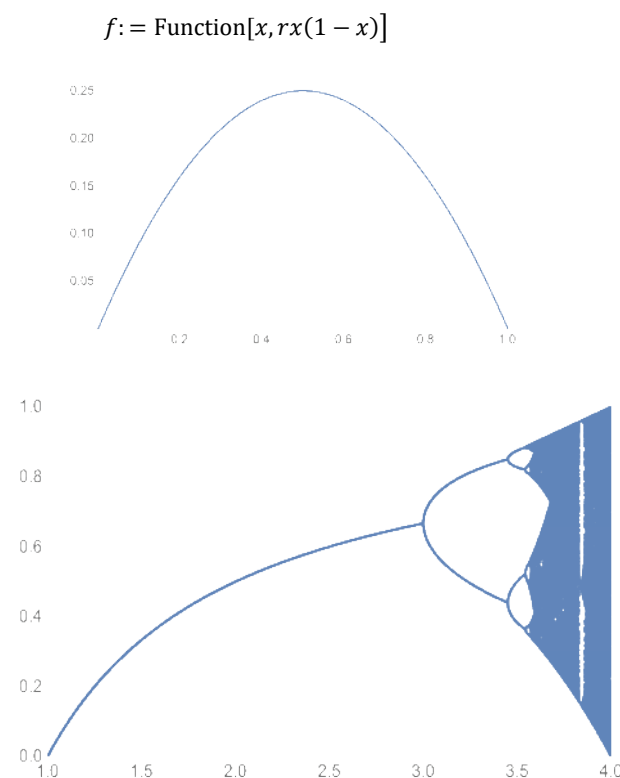
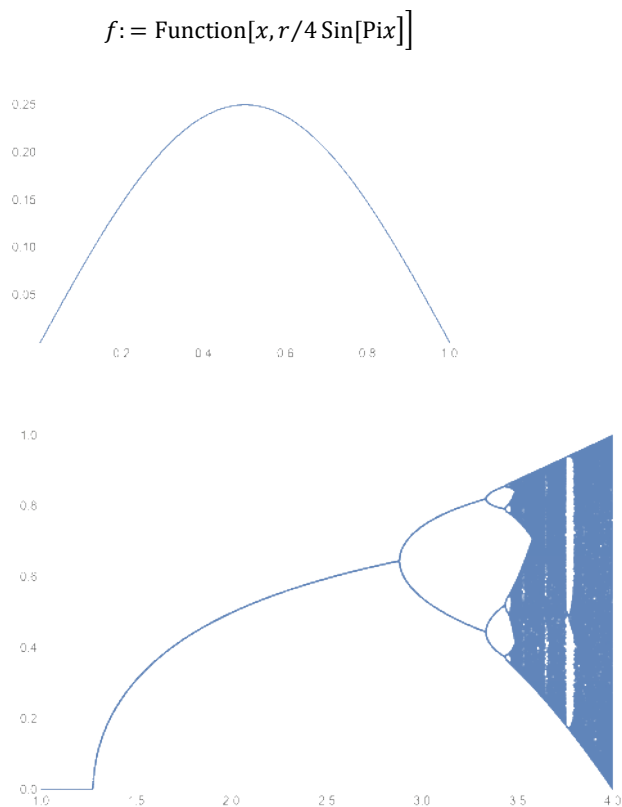
F.P. x_0, x_1 von $f^{(2)}$
entstehen.

$\Rightarrow \{x_0, x_1\}$ Periode-2 - Bahn von f .

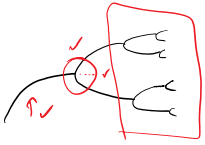
Also, $f^{(2)}$ hat S'-Form, die

 - Bifurkation erklärt!

Wie versprochen, ging die genau funktionale Form von f in die Analyse nicht ein. Wir sollten also vergleichbare Bifurkationen auch für andere Funktionen finden. Probieren wir es aus:

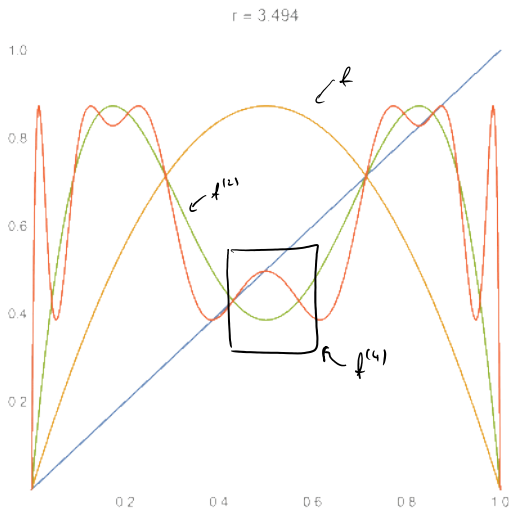


9.6 Bifurkationskaskaden



Wir verstehen nun die erste Stimmgabel. Visuell besonders auffällig ist natürlich die Bifurkations*kaskade*, also die immer feineren Verzweigungen des Diagramms.

Den Mechanismus dahinter schauen wir uns nun kurz an. Wir werden sehen, dass auch dieser Mechanismus nur grobe Information über f benötigt - also auch universell ist. (Und tatsächlich, dass Sinus-Modell auf der letzten Seite zeigt auch eine solche Kaskade).

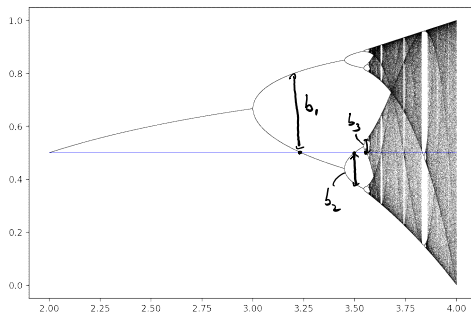


- $f^{(4)}$ verhält sich zu $f^{(2)}$,
wie $f^{(2)}$ zu f .
- $f^{(2)}$ hat um $x = \frac{1}{2}$ die gleiche
Form (bis auf Verschiebung und
Skalierung) wie f um $\frac{1}{2}$.

⇒ Bifurkationsmechanismus wiederholt sich...
... 2-er Bahnen werden instabil,
erzeugen stabil F.P. von $f^{(4)}$, ...

Das Modell wurde berühmt, weil nicht nur das *qualitative* Verhalten des Wegs ins Chaos universell ist, sondern es *quantitative* universelle Aspekte gibt.

Betrachtet man z.B. den Durchmesser b_i der i -ten Stimmgabel. Es bestimmt eine "Längenskala" der i -ten Bifurkation. Wir werden argumentieren, dass im Limes $n \rightarrow \infty$, das Verhältnis sukzessiver Skalen gegen eine universelle Konstante konvergiert, nämlich gegen die zweite Feigenbaumkonstante $\alpha = 2.5029 \dots$. Der Wert hängt nicht von den Details der Konstruktion ab, taucht in vielen anderen selbstähnlichen Figuren auf, und kann als fundamentale mathematische Konstante wie π oder e angesehen werden.



$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{b_{n+1}}{b_n} = -\alpha = -2.5029 \dots$$

Überblick über das Argument:

- Wir betrachten nur das Verhalten für Parameter x in der Nähe des Maximums, also $1/2$.

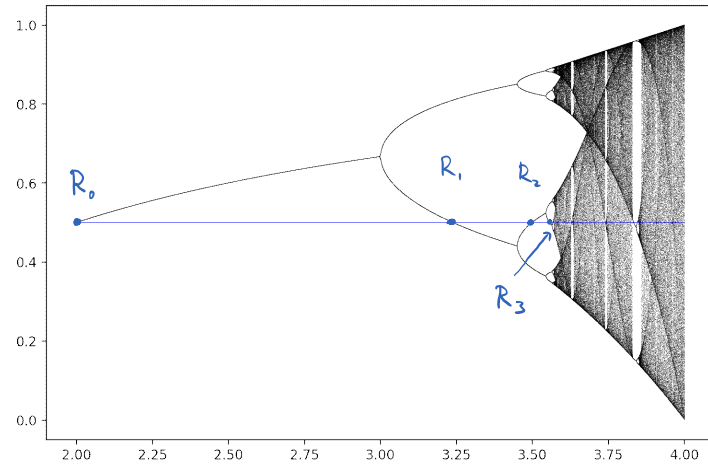
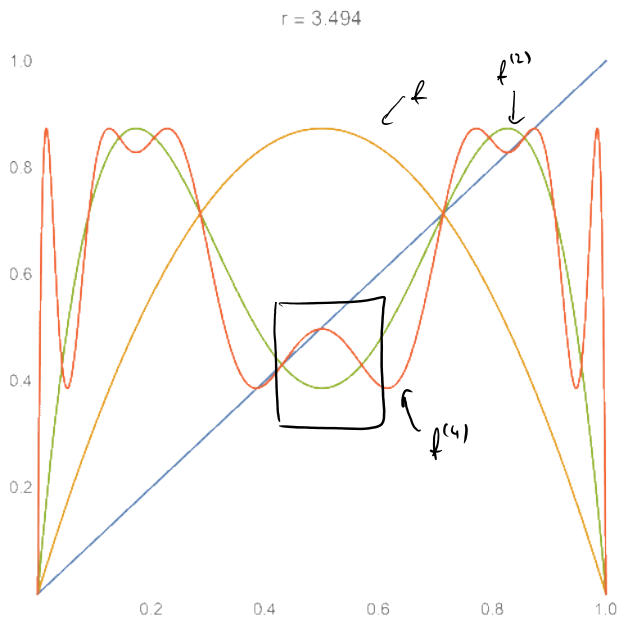
Quantitative Universality for a Class of Nonlinear Transformations

Mitchell J. Feigenbaum¹

Received October 31, 1977

A large class of recursion relations $x_{n+1} = \lambda f(x_n)$ exhibiting infinite bifurcation is shown to possess a rich structure of recursion structure essentially independent of the recursion function. The functions considered all have a unique differentiable maximum $\bar{x}$. With $\bar{f}(x) = f(x) - |x - \bar{x}|^p$ (for $|x - \bar{x}|$ sufficiently small), $p > 1$, the universal details depend only upon p . In particular, the local structure of high-order stability sets is shown to approach universality, rescaling in successive bifurcations, asymptotically by the ratio α ($\alpha = 2.5029076750957 \dots$ for $p = 2$). This structure is determined by a universal function $g^*(x)$, where the 2^n th iterate of f , $f^{[2^n]}$, converges locally to $\alpha^{-n} g^*(x)$ for large n . For the class of f 's considered, there exists a λ_c such that a 2-point stable limit cycle including $\bar{x}$ exists; $\lambda_1 = 3$, $\lambda_2 = 2.8$ for $p = 2$, $\lambda_1 = 2.60000121$, $\lambda_2 = 2.5$ for $p = 3$. The inclusion $\bar{x}$

9.7 Superstabile Bahnen



Beobachtung zuvor:

Um $x = 1/2$ herum, verhält sich f^{2^n} wie reskalierte Version $f^{2^{n-1}}$.

Ziel hier:

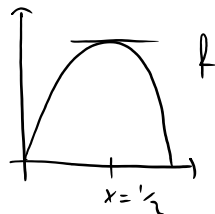
Erfasse diese Selbstähnlichkeit präziser, durch Betrachtung **superstabiler Bahnen**

Def.: Eine Bahn $x_0, \dots, x_{p-1}$ ist super-stabil

$$\mu = \left(f^{(p)} \right)'(x_0) = 0.$$

Erinnerung:

$$\mu = \prod_{i=0}^{p-1} f'(x_i)$$

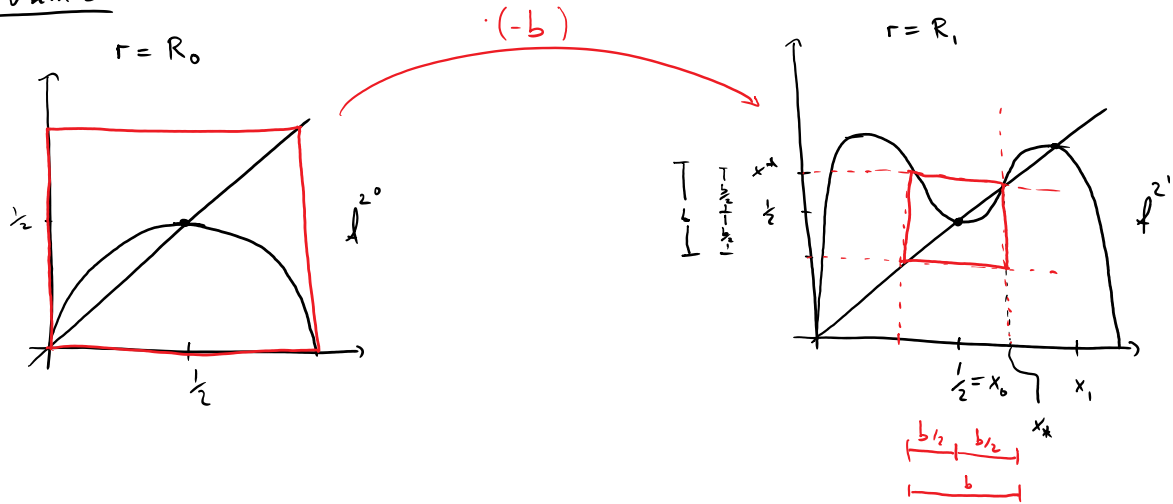


} Bahn ist s.s. $\Leftrightarrow \frac{1}{2} \in \text{Bahn}$.

Sei R_n der Wert von r , wo Bahn mit Periode 2^n s.s. wird.

Sei R_m der Wert von r , wo Bahn mit Periode 2^m s.s. wird.

Relevanz



Informierte Hoffnung: Mit $a_n = 1/b_n$, Fkt.

$$a_n \left(f_{R_m}^{2^m} \left(\frac{1}{2} + \frac{s}{a_n} \right) - \frac{1}{2} \right)$$

ähneln sich.

Hoffe weiter: Es gibt ein $\alpha \in \mathbb{R}$, s.d. für alle i :

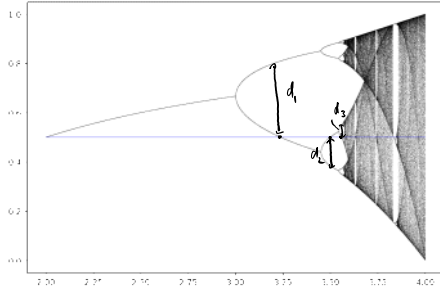
$$\lim_{n \rightarrow \infty} (-\alpha)^n \left(f_{R_{m+i}}^{2^m} \left(\frac{1}{2} + \frac{s}{(-\alpha)^n} \right) - \frac{1}{2} \right) =: g_i(s)$$

existiert.

9.8 Feigenbaum-Universalität

Überraschende Erkenntnis: Der Skalenfaktor α ist universell:

Sein *exakter* numerischer Wert hängt nur von der Ordnung des Maximums von f ab.



$$\frac{d_i}{d_{i+1}} \rightarrow \alpha = 2,5029 \dots$$

Argumentieren mit

$$g_i = \lim_{n \rightarrow \infty} (-\alpha)^n \left(f_{R_{n+i}}^{2^n} \left(\frac{1}{2} + \frac{s}{(-\alpha)^n} \right) - \frac{1}{2} \right)$$

Nur Werte von f um $x = \frac{1}{2}$ herum gehen ein.

$$\text{Taylor: } f\left(\frac{1}{2} + s\right) = f\left(\frac{1}{2}\right) + a_2 s^2 + \underbrace{\sum_{i \geq 2} a_i s^i}_{\text{vernachlässigbar.}}$$

Für z gerade, $a_z < 0$.

vernachlässigbar.

Damit: Definieren Doppelungsfunktional

$$T[g](s) = (-\alpha) g\left(g\left(\frac{s}{-\alpha}\right)\right)$$

$$\Rightarrow T[g_i] = \dots = g_{i-1}.$$

$$\Rightarrow \text{Mit } a := \lim a_i \quad \text{gilt}$$

$\Rightarrow$ Mit $g := \lim_{i \rightarrow \infty} g_i$ gilt

$$g(s) = T[g](s) = (-2) g\left(g\left(\frac{s}{-2}\right)\right) \quad (\overline{F})$$

Feigenbaum - Cvitanovic - Gd.

Fakt: $(\overline{F})$ legt α eindeutig fest.

(Analogie zu Eigenwerten in der L.A.)

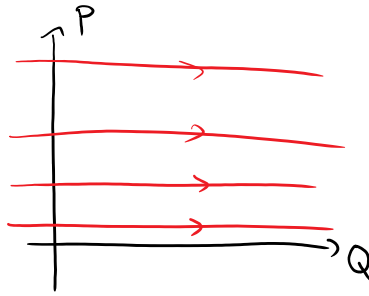
Zur Berechnung: Wähle Potenzreihenansatz $g(s) = \sum_{i=0}^{\infty} a_i s^i$ und setze ein.

10.1 Integrabilität

$$H(Q, P) = \omega P$$

$$\dot{P} = -\frac{\partial H}{\partial Q} = 0$$

$$\dot{Q} = -\frac{\partial H}{\partial P} = \omega$$



Zuvor gezeigt: Fluss des harmonischen Osz. kann durch kanonische Trafo "geglättet" werden.

Allgemeiner: Gegeben System mit N FHG. Schön wäre eine kanonische Trafo $(\vec{q}, \vec{p}) \mapsto (\vec{\vartheta}, \vec{I})$ s.d. $H = H(\vec{I})$ nicht von den ϑ 's abhängt.

Dann:

① Die BwGls

$$\dot{I}_i = \frac{\partial H}{\partial I_i}, \quad \dot{\vartheta}_i = -\frac{\partial H}{\partial \vartheta_i} = 0$$

sind direkt lösbar ("integrierbar"):

$$I_i(t) = I_i(0), \quad \vartheta_i(t) = \omega_i t \quad \text{mit} \quad \omega_i = \frac{\partial H}{\partial I_i}(\vec{I}(0)).$$

② $\Rightarrow I_i$ EHG

③ $\Rightarrow$ Da die Trafo kanonisch ist, $\{I_i, I_j\} = 0$.

Man sagt dazu: I_i stehen in Involution.

Def.: System mit N F.H.G. ist integrabel wenn es N unabh.
E.H.G. $\vec{F}_1, \dots, \vec{F}_N$ gibt, die zueinander in Involution stehen.

Dann [Arnold-Liouville]: Es gibt eine kon. Trans.

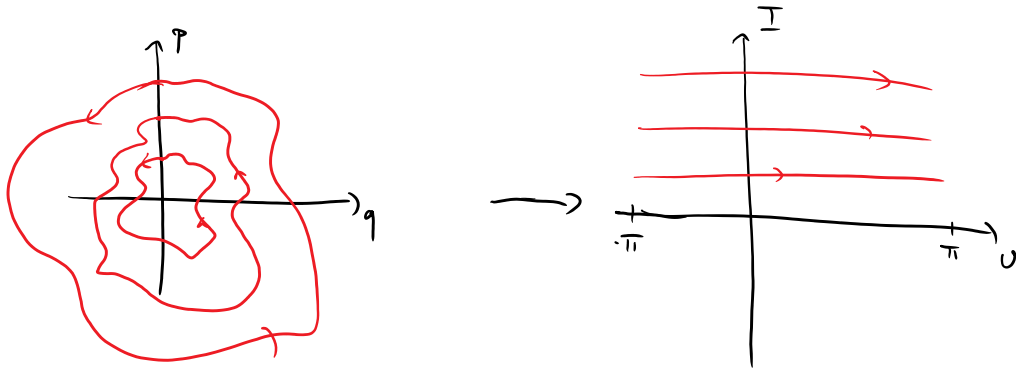
$$\vec{J}(q, p), \quad \vec{I}(\vec{F}(\vec{q}, \vec{p}))$$

$$\text{s.d. } H = H(\vec{I}).$$

10.2 Beispiele für integrable Systeme

- ① Da H erhalten ist, und $\{H, H\} = 0$, sind alle Systeme mit $N=1$ integrabel.

Geometrisch:



- ② Teilchen im Zentralpotential.

EHGs:

- H
- L_x, L_y, L_z

Aber: Drehimpuls k. nicht in Involution. $\{L_x, L_y\} = -L_z$ (und zyklisch).

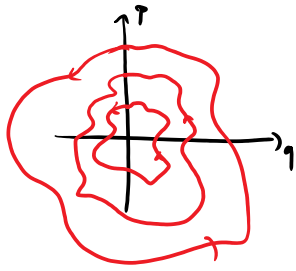
Trick: Betrachte $F_1 = H$, $F_2 = \|\vec{L}\|^2$, $F_3 = L_z$.

$$\text{Dann: } \{F_2, F_3\} = \{L_x^2 + L_y^2 + L_z^2, L_z\}$$

$$= 2 L_x \{L_x, L_z\} + 2 L_y \{L_y, L_z\}$$

$$= 2 L_x L_y - 2 L_y L_x = 0. \quad \ddot{\smile}$$

10.3 Tori und Poincaré-Schnitte

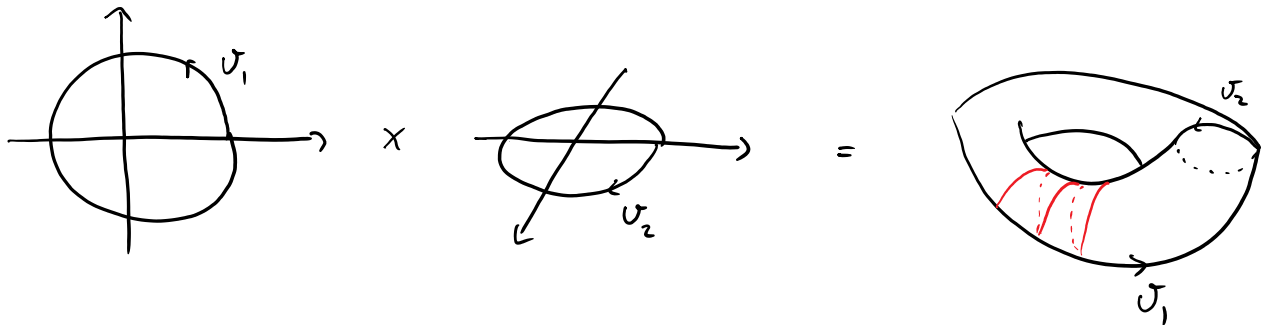


Bahnen für $N=1$.

Wie sehen gebundene Bahnen Hamiltonscher Systeme für $N=2$ aus?

Zunächst: int. Systeme.

$$\varphi_i(t) = \varphi_i(0) + \omega_i t \quad \in [-\pi, \pi]$$



Zwei Fälle:

① ω_1 und ω_2 im rationalen Verhältnis.

$$\frac{\omega_1}{\omega_2} = \frac{k}{l} \in \mathbb{Q} \quad \Rightarrow \quad \text{Für } t \text{ V.F. von } \frac{2\pi}{\omega_2} \cdot l \text{ fällt } \vec{\varphi}(t) \text{ auf sich selbst.}$$

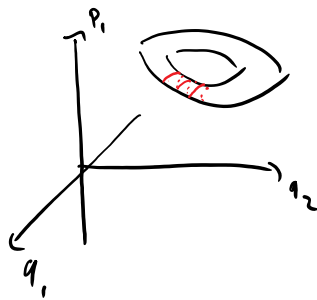
$\Rightarrow$ 1-D Kurve $\subset$ 2-D Torus $\subset$ 4-D Phasenraum
"Resonanter Torus".

$$\textcircled{\text{II}} \quad \frac{\omega_1}{\omega_2} \in \mathbb{Q} \quad \Rightarrow \quad \overline{\text{Kurve}} = \text{Torus}.$$

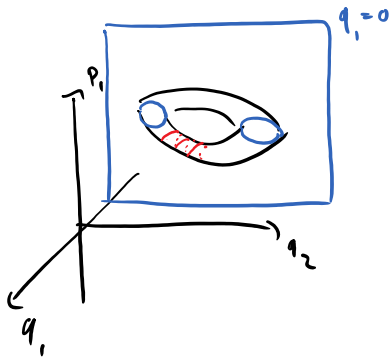
Allgemeiner: Zur Darst. von Kurven $\begin{pmatrix} \vec{q} \\ \vec{p} \end{pmatrix}(t) \in \mathbb{R}^4$.

1. Schritt Nutzen Energieerh. $H(q_1, q_2, p_1, p_2) = E. \quad (*)$

$\Rightarrow$ Gegeben $(q_1, q_2, p_1) \leadsto$ generisch kann $(*)$ nach p_2 aufgelöst werden.

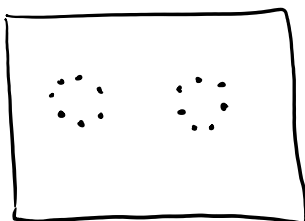


2. Schritt Oft, übersichtlicher mit 2-D Ebene zu schneiden.

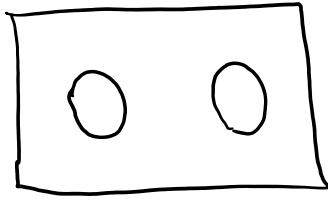


$\leadsto$ "Poincaré-Schnitt".

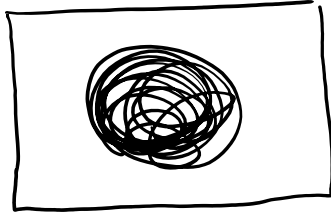
Erwartete Bilder



$\leadsto$ Integral, resonant.



→ Integrabel, nicht res.



→ nicht integrabel.

Es ergibt sich folgendes Bild: Die Bahnen eines integrablen Systems mit N Freiheitsgraden sind (quasi-) periodisch, und liegen auf N -dimensionalen Tori im $2N$ -dimensionalen Phasenraum.

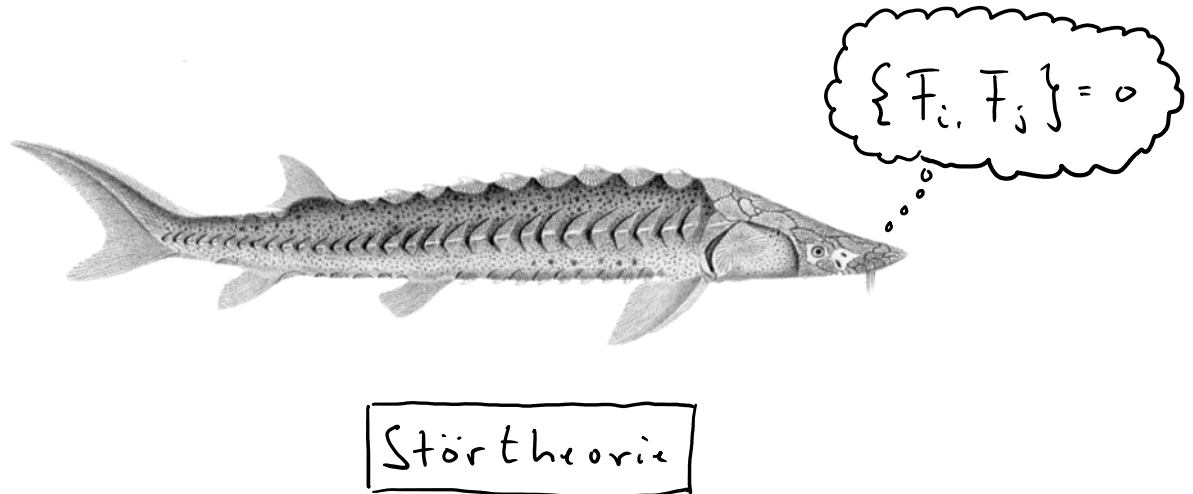
Integrable Systeme gelten als das Musterbeispiel geordneter Bewegung (wie chaotisches Verhalten aussieht, werden wir später sehen).

Die Rechnung, die die Integrabilität eines Teilchens mit Zentralpotential gezeigt hat, lässt sich leicht auf n Teilchen im Zentralpotential verallgemeinern (jedes neue Teilchen hat 3 FHG - aber seine Energie, seine Drehimpuls-z-Komponente und sein Gesamtdrehimpuls sind drei EHGs; alle stehen in Involution zueinander). Wenn man die Kräfte zwischen den Planeten vernachlässigt, ist das Sonnensystem also integrabel. Da diese Kräfte klein sind - verglichen mit der Anziehungskraft der Sonne - kann man versuchen, das Sonnensystem als "Störung" eines idealen, integrablen Systems mit Hilfe der klassischen Störtheorie zu behandeln. Für lange Zeit war es eine der heißesten Fragen der Physik (und Mathematik), ob schwach gestörte Systeme weiterhin quasi-periodische Orbits auf Tori haben. In der ersten Hälfte des 20. Jahrhunderts gab das KAM-Theorem im Prinzip eine positive Antwort darauf - allerdings unter vielen restriktiven Bedingungen (z.B. überleben resonante Tori nicht), und nur für sehr kleine Störungen. In unserem Sonnensystem sind die Kopplungen zwischen den Planeten zu stark - selbst wenn die Sonne unendlich lang scheinen würde, würde das System nicht überleben (tut mir Leid, die schlechte Nachricht überbringen zu müssen).

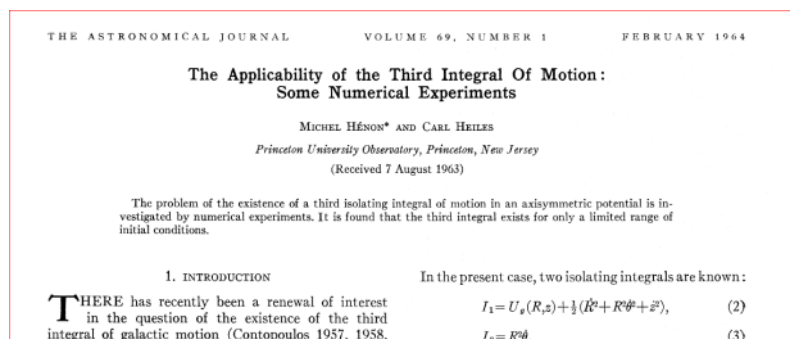
Während die Himmelsmechaniker des 19. Jahrhunderts zeigen wollten, dass mechanische Systeme stabil und integrabel sind, hoffte eine andere Gruppe auf das gegenteilige Resultat: Die junge statistische Physik. Boltzmann hatte vorgeschlagen, makroskopische Systeme so zu beschreiben, als würden sie zufällig jeden Zustand annehmen, der mit der Gesamtenergie kompatibel ist. Mit Hilfe dieses Axioms konnte man die Vorhersagen der Thermodynamik erklären - eine äußerst erfolgreiche Theorie, die aber bis dahin keine mikroskopische Rechtfertigung hatte. Das Problem ist nur: Warum war Boltzmanns Annahme gerechtfertigt? Dies ist eine Diskussion, die bis heute anhält. Ein früher Erklärungsansatz war die **Ergodenhypothese**. Sie besagt, dass die Trajektorien mechanischer Systeme alle mit der Energie verträglichen Zustände gleich häufig durchlaufen. Die Mittlung über zufällige Zustände in der statistischen Physik kann man dann als Zeitmittlung über eine Trajektorie verstehen. Sind mechanische Systeme ergodisch? Integrale sind das sicher nicht! Die Menge der Zustände gegebener Energie ist $(2N-1)$ -dimensional, die Tori integrierbarer Systeme haben aber nur N Dimensionen. Ein integrables System kann

"die meisten" Zustände gegebener Energie also nie erreichen. Aber vielleicht sind integrable Systeme die Ausnahme...

Welche mechanischen Systeme sind nun integrabel, stabil, chaotisch, ergodisch? Dies sind sehr schwierige Fragen, die bis heute nicht vollständig verstanden sind. Seit Mitte der 70er Jahre spielen Computersimulationen eine große Rolle für diese Probleme. Das werden wir uns als nächstes ansehen...



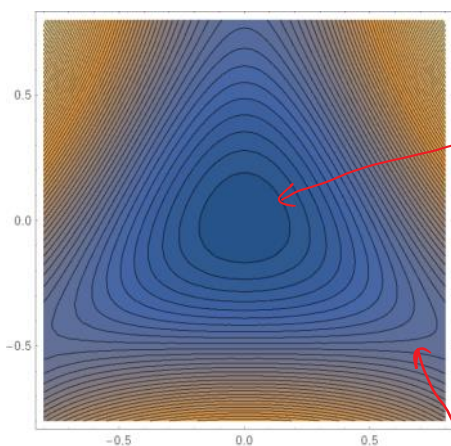
10.4 Chaos im Hénon-Heiles-System



"Star in cylindrically symmetric galactic potential".

$$H = \underbrace{\frac{1}{2} (p_1^2 + p_2^2)}_{\text{harmonisches Potential}} + \underbrace{q_1^2 q_2 - \frac{1}{3} q_2^3}_{\text{anharmonische Terme}}$$

Potential



q_1, q_2 klein $\rightarrow$ Terme 3. Ordnung vernachlässigbar
 $\rightarrow$ harmonisches Potential
 $\rightarrow$ integrables Verhalten

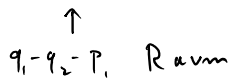
q_1, q_2 groß $\rightarrow$ anharmonische Terme
 $\rightarrow$ Verhalten unklar.

Numerik:

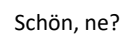
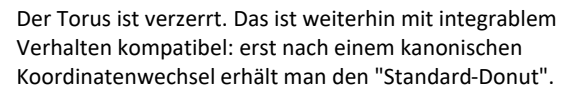
Mathematica: Löse DGL numerisch
 (Code auf Webseite)

```
solveHenons[x0_, y0_, py_, e_, tF_] := Reap@NDSolve[{{
  y1'[t] == y3[t],
  y2'[t] == y4[t],
  y3'[t] == -y1[t] (1 + 2 y2[t]),
  y4'[t] == -y2[t]^2 + (-1 + y2[t]) y2[t]},
  {y1[0] == x0, y2[0] == y0, y3[0] == Sqrt[2/3 y0^3 + 2 e - x0^2 - y0^2 - 2 x0^2 y0 - py^2], y4[0] == py}},
  {y1[t], y2[t], y3[t], y4[t]}, {t, tF}, Method -> {"EventLocator", "Event" -> y1[t], "EventAction" -> Sow[{y2[t], y4[t]}], "EventLocationMethod" -> "LinearInterpolation",
  "Method" -> {"SymplecticPartitionedRungeKutta", "DifferenceOrder" -> 4, "PositionVariables" -> {y1[t], y2[t]}}},
  StartingStepSize -> 0.25, MaxSteps -> Infinity]
```

```
visualize[0.02, 0.02, 0.1, 0.02, 5000]
```



Auf der Webseite des Kurses ist das Mathematica-Notebook zum Herunterladen bereitgestellt. Mit Mathematica (z.B. im CIP-Pool nutzbar) kann man die 3D-Trajektorie drehen.

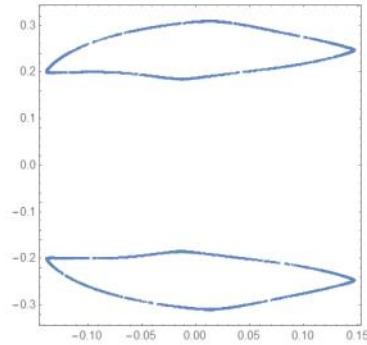


```

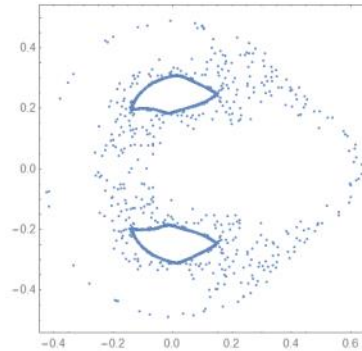
In[11]:= visualize[0.02, 0.02, 0.19, 1 / 8, 20000]
visualize[0.02, 0.02, 0.19, 1 / 8, 30000]
visualize[0.02, 0.02, 0.19, 1 / 8, 100000]

```

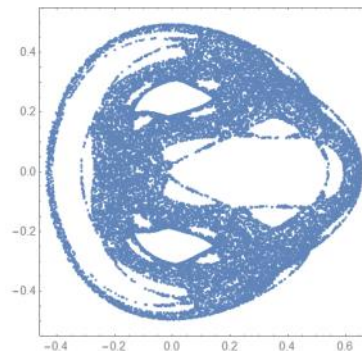
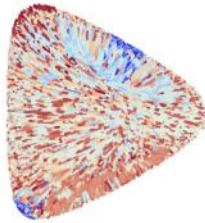
Out[11]=



Out[12]=



Out[13]=



Jetzt wird's spannender.

Wir wählen eine höhere Energie.

Nach 20k Zeiteinheiten sieht die Trajektorie und der Poincare-Schnitt noch integrabel aus.

...nach 30k Zeiteinheiten verlässt die Trajektorie den Torus!

(Achtung: Die Skalierung der Achsen hat sich verglichen mit dem letzten Bild geändert).

...nach 50k Zeiteinheiten sehen wir nun eindeutig nicht-integrables Verhalten.

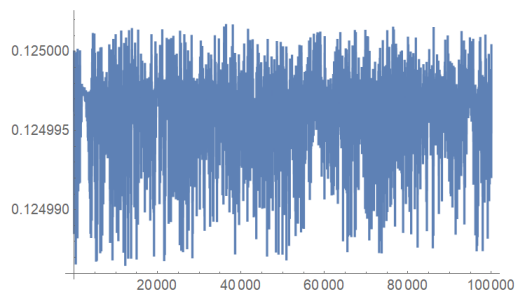
Der Poincare-Schnitt ist eine komplizierte zwei-dimensionale Fläche. Der topologische Abschluss der Trajektorie ist also eine drei-dimensionale Untermenge des vierdimensionalen Phasenraums. Da ein Torus zwei-dimensional ist, haben wir den integrablen Bereich hiermit verlassen.

Das Muster sieht nicht so aus, als ob man eine analytische Beschreibung finden könnte! Tatsächlich treten in solchen Probleme häufig fraktale Muster auf.

Interessant ist, dass wir während der ersten 20k Zeiteinheiten keine Spur von Chaos gesehen haben. Das sollte uns nachdenklich stimmen: Es zeigt, dass es nicht leicht ist, aus numerischen oder empirischen Beobachtungen auf Ordnung zu schließen. Man kann nur hoffen, dass der Keim des Chaos in unserem Sonnensystem nicht gleichermaßen angelegt ist.

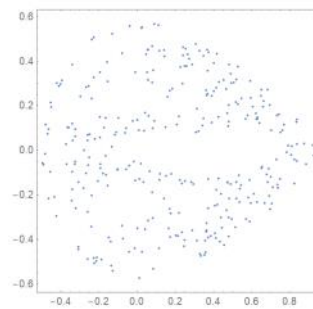
Noch ein Konsistenzcheck: Wenn man Differentialgleichungen für lange Zeiten numerisch integriert, können sich numerische Fehler aufaddieren. Vielleicht ist der späte Anfang des Chaos einfach ein Artefakt, weil der Löser durch numerische Fehler mehr und mehr Energie in das System pumpt. Wir plotten also Energie über Zeit für 100k Zeiteinheiten. Das Diagramm unten zeigt, dass Energie im Rahmen kleiner numerischer Fehler erhalten bleibt. Gut.

```
Plot[Evaluate[energyHenons[solveHenons[0.02, 0.02, 0.19, 1/8, 100000]]], {t, 0, 100000}]
```



```
In[16]:= visualize[0.02, 0.02, 0.19, 1/6, 1000]
```

```
Out[16]=
```

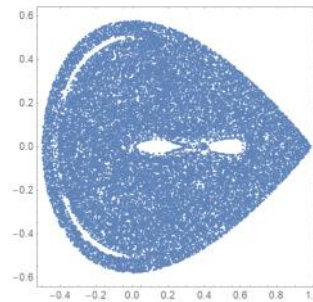
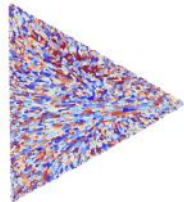


Wir erhöhen die Energie weiter. $E=1/6$ ist die höchste Energie, bei der die Lösungen noch gebunden sind.

Oben: 1k Zeiteinheiten, unten 100k Zeiteinheiten.

```
In[17]:= visualize[0.02, 0.02, 0.19, 1/6, 100000]
```

```
Out[17]=
```

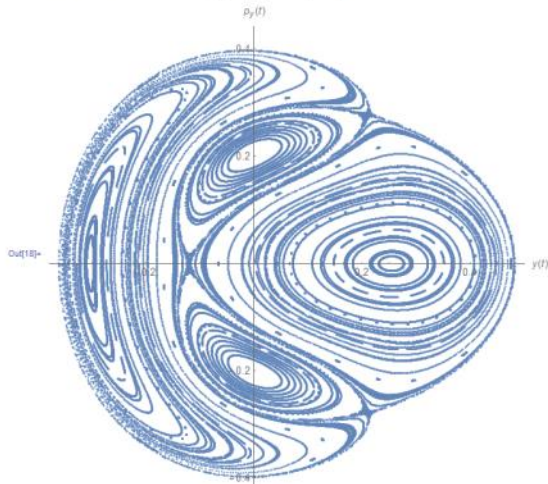


Im Poincare-Schnitt scheinen bis auf vier weiße Regionen alle Bereiche gleichmäßig bedeckt zu sein. Eine "glatte Struktur" ist nicht mehr erkennbar.


```

In[18]: surfaceOfSectionEnergy[1 / 12, 5000, 50]
        surfaceOfSectionEnergy[1 / 8, 5000, 50]
        surfaceOfSectionEnergy[1 / 6, 5000, 50]

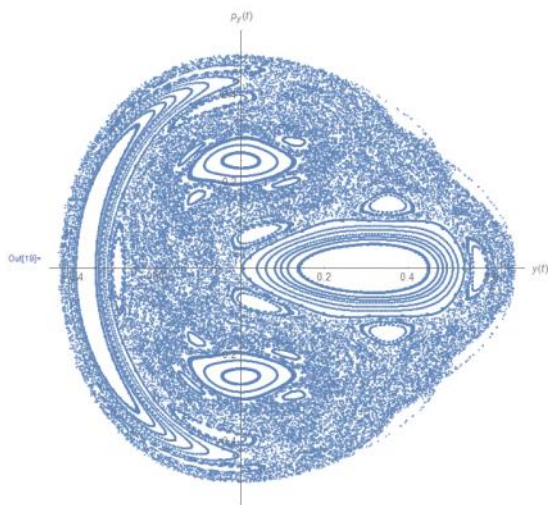
```



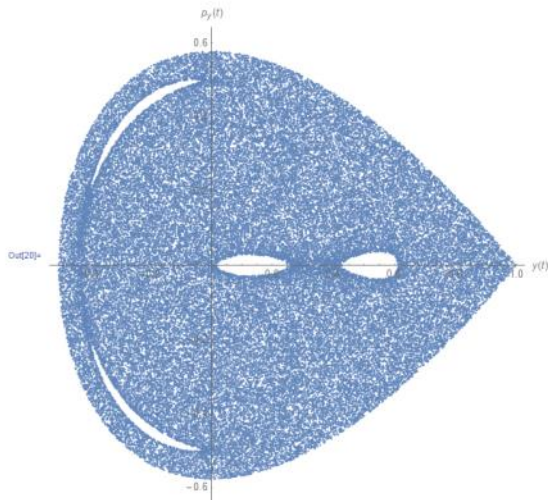
In den drei Diagrammen sind jeweils 50 Trajektorien mit gegebener Energie und zufälligen Anfangsbedingungen für je 5k Zeiteinheiten aufgetragen.

Die Energien sind: $1/12$, $1/8$, $1/6$.

Bei $E=1/12$ sieht man glatte Trajektorien, mit einigen Resonanzen.



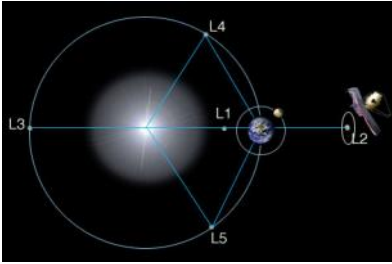
Bei $E=1/8$ verbleiben einige wenige glatte Bahnen. Die meisten ergeben jedoch chaotische Bilder.



Bei $E=1/6$ sind keine glatten Bahnen mehr erkennbar.

Interessant ist: Das Portrait der 50 zufälligen Bahnen hier sieht genauso aus, wie das Portrait der einen Bahn für $E=1/6$, die wir oben geplottet haben. Dieses Verhalten (Zeitmittel einer Bahn entspricht zufällig gewählten Punkten mit gegebener Energie) scheint ergodisch zu sein.

Wo ist Webb?

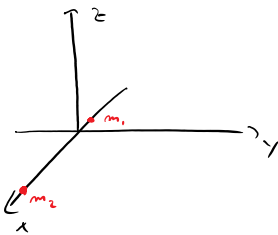


Mit Jahrzehnten Verspätung und Kosten, die das ursprüngliche Budget um ein Vielfaches überschreiten, ist das James Webb-Infrarotteleskop seit Anfang 2022 auf seiner Station am 2. Lagrange-Punkt des Sonnen-Erde-Systems angelangt.

Unser Ziel hier ist es, den Ort dieses Lagrange-Punkts zu bestimmen.

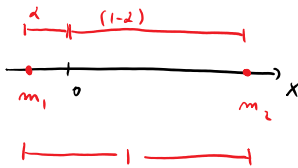
[Bilder: [NASA](#)]

I Erinnerung: Das Zweikörperproblem



Wir betrachten eine kreisförmige Kepler-Bahn. Wie üblich wählen wir Koordinaten so, dass die Ekliptik mit der x-y-Ebene zusammenfällt. Ursprung ist der Schwerpunkt. Die Ebene legen wir so, dass die Körper zum Zeitpunkt $t = 0$ auf der x-Achse liegen.

Wir messen Längen in Einheiten des Abstands der beiden Körper (für das Erde-Sonnen-System also in astronomischen Einheiten $1 \text{ AU} \approx 150 \times 10^6 \text{ km}$).

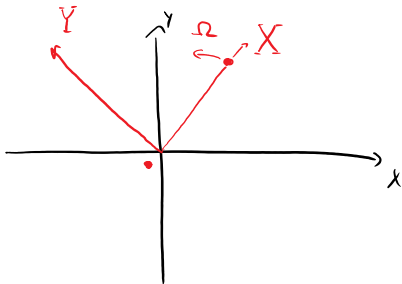


$$M = m_1 + m_2$$

$$d = \frac{m_2}{M} \Rightarrow \begin{cases} m_2 = d M \\ m_1 = (1-d) M \end{cases}$$

Aus der [Formel für den Schwerpunkt](#) ergibt sich die Lage der Körper auf der x-Achse bei $t = 0$.

Nun wählen wir Koordinaten die sich mit den Körpern mitdrehen:



$$\vec{q} = \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} \quad \vec{Q} = \begin{pmatrix} X \\ Y \\ Z \end{pmatrix}$$

$$\vec{q} = R(t) \vec{Q}$$

$$R(t) = \begin{bmatrix} \cos \Omega t & -\sin \Omega t & 0 \\ \sin \Omega t & \cos \Omega t & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

$$\Rightarrow \dot{\vec{q}} = \dot{R} \vec{Q} + R \dot{\vec{Q}}$$

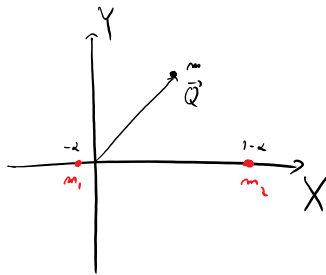
$$= \underbrace{R(\Omega \vec{e}_z)}_{=: \vec{\Omega}} \times \vec{Q} + R \dot{\vec{Q}}$$

Für die Rechnung benötigen wir später den expliziten Wert der Kreisfrequenz. Wir hatten ihn bei der Behandlung des Zweikörperproblems nicht ausgerechnet. Nicht schwierig - aber für diese Rechnung schlagen wir den Wert einfach nach:

$$\Omega = \frac{2\pi}{T} = \sqrt{\frac{GM}{a^3}} \stackrel{\substack{\uparrow \\ a=1 \text{ in A.E.}}}{=} \sqrt{GM}$$



Das reduzierte Dreikörperproblem



Die beiden Planeten erzeugen ein zeitabhängiges Gravitationspotential. Wir betrachten nun die Bewegung eines Körpers mit vergleichsweise geringer Masse $m \ll m_1, m_2$ in diesem Potential. Der Einfluß des kleinen Körpers auf die Planeten wird dabei vernachlässigt (daher "reduziert").

Konkret rechnen wir die Lagrange-Fkt. im mitrotierenden Bezugssystem aus.

$$\begin{aligned} T &= \frac{1}{2} m \|\dot{\vec{q}}\|^2 = \frac{1}{2} m \|\vec{R} \vec{\Omega} \times \vec{Q} + \vec{R} \dot{\vec{Q}}\|^2 \\ &= \frac{1}{2} m \|\dot{\vec{Q}}\|^2 + \frac{1}{2} m \|\vec{\Omega} \times \vec{Q}\|^2 + m (\dot{\vec{Q}}, \vec{\Omega} \times \vec{Q}) \\ &= \frac{1}{2} m \Omega^2 (X^2 + Y^2) \leftarrow \\ &= \frac{1}{2} m GM (X^2 + Y^2) \end{aligned}$$

Vereinfachung: Wir nehmen an, dass sich der Körper initial in der Ekliptik bewegt. Dann wird er die Ebene nicht verlassen, da alle Kräfte in ihr enthalten sind. Damit kann das Kreuzprodukt explizit ausgerechnet werden.

$$\begin{aligned} U &= -Gm m_1 \frac{1}{\sqrt{Y^2 + (X+\alpha)^2}} - Gm m_2 \frac{1}{\sqrt{Y^2 + (X+\alpha-1)^2}} \\ &= -m GM \frac{1-\alpha}{\sqrt{Y^2 + (X+\alpha)^2}} - m GM \frac{\alpha}{\sqrt{Y^2 + (X+\alpha-1)^2}} \end{aligned}$$

Euler-Lagrange-Gleichung (in vektorieller Notation):

$$\frac{d}{dt} \frac{\partial L}{\partial \dot{Q}_i} = \frac{\partial L}{\partial Q_i}$$

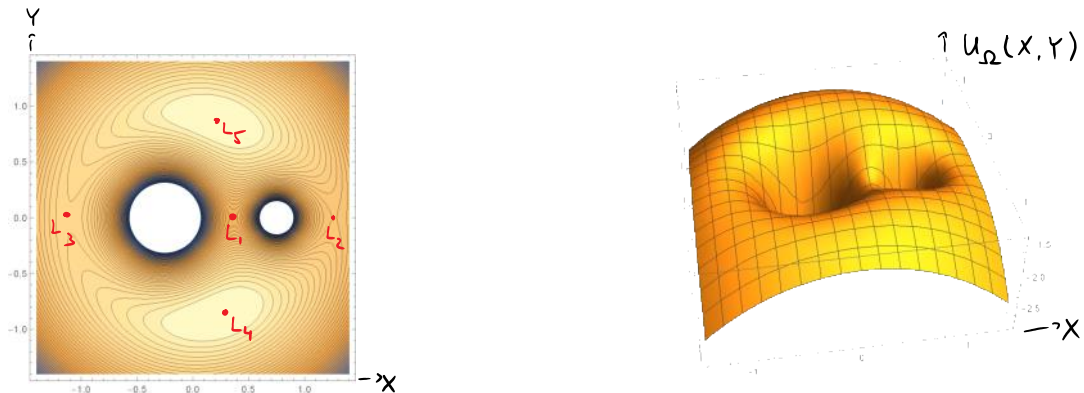
$$\Rightarrow \frac{d}{dt} \vec{\nabla}_{\dot{Q}} L = \vec{\nabla}_Q L$$

$$\Rightarrow m \ddot{\vec{Q}} + m \vec{\Omega} \times \dot{\vec{Q}} = - \underbrace{\vec{\nabla}_Q \left(-\frac{1}{2} m \Omega^2 (X^2 + Y^2) + U \right)}_{\text{"verallgemeinertes Potential" } U_{\Omega}}$$

Wir suchen nun nach Bahnen $\vec{Q}(t)$, die im mitrotierenden Bezugssystem konstant sind.

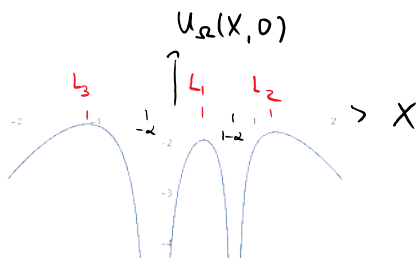
Wähle dazu einen Punkt $\vec{Q}_0$ und betrachte die Anfangsbedingungen $\vec{Q}(0) = \vec{Q}_0, \dot{\vec{Q}}(0) = 0$. Aus der ELG folgt dann, dass die Beschleunigung verschwindet - und damit $\vec{Q}(t) = \vec{Q}_0$ ist - genau dann, wenn $\vec{Q}_0$ ein stationärer Punkt des verallgemeinerten Potentials ist.

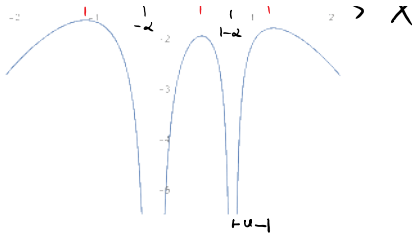
Ein Plot zeigt fünf stationäre Punkte:



Wir schränken uns nun auf die drei Lösungen ein, die auf der X -Achse liegen. Aufgrund der Spiegelsymmetrie des verallgemeinerten Potentials unter $Y \mapsto -Y$, verschwindet der Gradient in Y -Richtung. Die stationären Punkte des Potentials auf der X -Achse sind also mit den stationären Punkte der eindimensionalen Funktion $U_{\Omega}(X, 0)$ identisch.

Hier ein Plot, in dem die drei stationären Punkte auf der Achse klar erkennbar sind:





Ziel nun: Verstehe die Lage von L_2 analytisch.

Für $u \geq 0$, definiere:

$$f(u) := \frac{-1}{mGM} U_{\Omega}(1-\alpha+u, 0) = \frac{1}{2}(1-\alpha+u)^2 + \frac{1-\alpha}{1+u} + \frac{\alpha}{u}$$

Stationaritätsbedingung:

$$0 \stackrel{!}{=} f'(u) = (1-\alpha+u) - \frac{1-\alpha}{(1+u)^2} - \frac{\alpha}{u^2}$$

$$\Leftrightarrow \begin{aligned} & \cdot (-u^2(1+u)^2) \quad \text{separ. Terme mit } \alpha \\ & u^2(1+u)^2(1+u) - u^2 = \alpha \left[-(1+u)^2 u^2 + u^2 - (1+u)^2 \right] \end{aligned}$$

$$\Leftrightarrow 3u^3 + 3u^4 + u^5 = \alpha \left[1 + 2u + u^2 + 2u^3 + u^4 \right] \quad (*)$$

Eine explizite Lösung von (*) für $u(\alpha)$ ist leider nicht bekannt. :-)

Allerdings ist für das Sonne-Erde-System $\alpha = \frac{\text{Erdmasse}}{\text{Sonnenmasse}} \approx 3 \cdot 10^{-6}$ sehr klein. Da $u(0) = 0$, ist damit auch u klein. Dies rechtfertigt, nur die jeweils niedrigsten Potenzen von u und α zu betrachten: nämlich $3u^3$ und α . Es bleibt damit

$$u \approx \left(\frac{\alpha}{3} \right)^{1/3} \approx 1/100$$

Die Näherung suggeriert also, dass der Abstand Erde- L_2 etwa 1/100 astronomische Einheiten beträgt, ca. 1,5m km. Das stimmt mit der NASA-Infografik zu Webb überein:



Da ist Webb.