

Übersicht

<http://www.thp.uni-koeln.de/gross/>

Themen

Newtonsche Mechanik:

- Modellannahmen
- Das Zweikörper- und das Keplerproblem
- Wichtige Symmetrien und Erhaltungsgroessen
- Konservative Kraefte und Potentiale
- Gekoppelte Teilchen, Eingschwingungen

Analytische Mechanik

- Variationsprinzipien, Lagrange-Formalismus
- Allgemeine Koordinaten und Zwangsbedingungen
- Satz von Noether
- Theorie starrer Koerper
- Hamiltonformalismus, Legendre-Transformation
- Phasenraumfluesse, Poissonklammer, symplektische Struktur des Phasenraums
- Kanonische Transformationen, Satz von Liouville

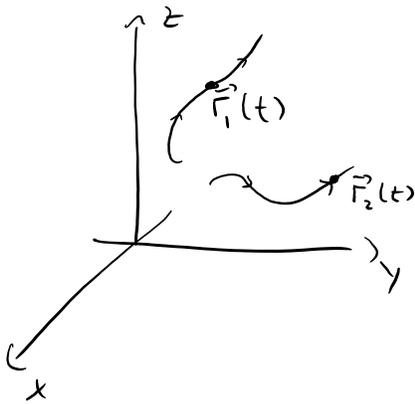
Grundlagen der Chaostheorie

- Integrabilitaet
- Chaos in einfachen Modellsystemen, Hamiltonsches Chaos

Literatur

- Florian Scheck: *Theoretische Physik 1: Mechanik*
- Kuypers: *Klassische Mechanik* (Viele Beispiele)
- Goldstein: *Klassische Mechanik* (Klassiker)
- Vladimir Arnol'd: *Mathematical Methods of Classical Mechanics* (Mathematisch präzise)
- David Tong: *Lectures on Classical Dynamics* (online)
- Michael Tabor: *Chaos and Integrability in Non-Linear Systems* (Chaostheorie)

Modell: Punktmassen bewegen sich im \mathbb{R}^3 .



Teilchen i hat

- (träge) Masse m_i
- Zu jeder Zeit $t \in \mathbb{R}$,
Position im Raum:

$$\vec{r}_i(t) = \begin{bmatrix} x_i(t) \\ y_i(t) \\ z_i(t) \end{bmatrix}$$

Unmittelbares Ziel: mache Aussagen über Dynamik $\vec{r}_i(t)$.

Modell vs. Wirklichkeit:

- Tatsächliche mechanische Körper sind ausgedehnt. Es ist nicht offensichtlich, dass man mit der stark vereinfachenden Annahme von Punktmassen ein erfolgreiches Modell bauen kann. Wir werden aber beweisen, dass man in vielen Fällen ein System gekoppelter Punktteilchen durch die Gesamtmasse im Schwerpunkt ersetzen kann. Das macht den Erfolg der Theorie weniger überraschend.
- In der speziellen Relativitätstheorie wird gezeigt, dass Massen nicht erhalten ist. Für geringe Geschwindigkeiten fällt das nicht ins Gewicht.
- In der allgemeinen Relativitätstheorie wird gezeigt, dass die tatsächliche Geometrie nicht der Geometrie des 3-dimensionalen euklidischen Raums entspricht. Dies wird relevant auf kosmischen Skalen, oder in der Präsenz starker Gravitation.
- In der Quantenmechanik wird gezeigt, dass man Teilchen keinen definitiven Ort zuweisen kann (nicht mal, wenn man annimmt, dass er unbekannt ist). Für Teilchen, die stark mit der Umgebung wechselwirken (z.B. große Teilchen, die an EM-Felder koppeln), kann dies aber in guter Näherung angekommen werden.

Klassische Mechanik:

Richtig? Mmh...

Nützlich? Und wie!!



...

Dynamik $\vec{r}(t)$ durch Bewegungsgleichungen beschrieben.

BWG. stellen Bed. an Zeitableitungen

der Bahnen:

$$\begin{aligned}\vec{v}_i(t) &= \partial_t \vec{r}_i(t) && \text{(Momentan-)} \\ &= \dot{\vec{r}}_i(t) && \text{Geschwindigkeit} \\ &= \begin{bmatrix} \dot{x}_i(t) \\ \dot{y}_i(t) \\ \dot{z}_i(t) \end{bmatrix}.\end{aligned}$$

$$\vec{a}_i(t) = \frac{\partial^2}{\partial t^2} \vec{r}_i(t) = \ddot{\vec{r}}_i(t). \quad \text{Beschleunig.}$$

Nicht offensichtlich: Newton entwickelte dazu Konzept der Ableitung.
(und, unabh., Leibniz!)

Drei Zutaten:

- ① Ein Bezugssystem \mathcal{I} ist inertial wenn für die Bahnen von Teilchen, die unter keinem äußeren Einfluß stehen,

gilt: $\ddot{\vec{r}}_i(t) = 0$. $\left[\begin{array}{l} (\Rightarrow \vec{r}_i(t) = \vec{r}_i(t_0) + t \cdot \dot{\vec{r}}_i(t_0) \\ \text{"geradlinig, gleichförmig"} \end{array} \right]$

Es ist nicht sehr klar, wie man feststellen soll, dass "kein äußerer Einfluß" wirkt. Die Definition ist daher nicht besonders befriedigend. In der Praxis ist ein relativ zur Erdoberfläche fixiertes Koordinatensystem eine annehmbare Annäherung an ein Inertialsystem. Ein im luftleeren Raum frei fallendes System (z.B. im Orbit um die Erde) ist deutlich besser.

Wenn nicht explizit anders angegeben, gehen wir im Folgenden davon aus, dass Koordinaten bezgl. eines Inertialsystems angegeben werden.

- ② Das Newtonsche Gesetz: $\ddot{\vec{r}}_i(t) = \frac{\vec{F}_i(\vec{r}(t), \dot{\vec{r}}(t), t)}{m_i}$ (*)
("F=m·a")

beschreibt Beschleunigung durch den Kraftvektor \vec{F} .

I.d.R. hängt \vec{F} höchstens von Position, Geschwindigkeiten und der Zeit ab.

Im Moment ist (*) rein deskriptiv. Um Vorhersagen zu machen, braucht man:

- ③ Regeln, um \vec{F} in gegebener, phys. Situation zu berechnen.

Dazu: (3.1) das Superpositionsprinzip besagt, dass

Dazu: (3.1) das Superpositionsprinzip besagt, dass die Gesamtkraft die auf ein Teilchen wirkt, die \sum aller individuellen Kräfte ist.

(3.2) Eine Aufzählung aller fundamentalen Kraftgesetze.

Wichtigsten Bsp.:

Gravitation: $\vec{F}_{ij}(\vec{r}) = -G m_i m_j \frac{\vec{r}_j - \vec{r}_i}{\|\vec{r}_j - \vec{r}_i\|^2}$

\swarrow
 durch Teilchen i \searrow
 i, j auf Teilchen j



Elektrostatik: $\vec{F}_{ij}(\vec{r}) = k e_i e_j \frac{\vec{r}_j - \vec{r}_i}{\|\vec{r}_j - \vec{r}_i\|^3}$

Alle fundamentalen Kräfte erfüllen

$$\vec{F}_{ij} = -\vec{F}_{ji} \quad (i \neq j)$$

"actio = re-actio".

Die drei "Zutaten" sind angelehnt an, aber nicht identisch mit, den "Drei Newtonschen Gesetzen".

Tatsächlich sind die "Gesetze" von Newton keine Gesetze im modernen Sinn. D.h. sie sind nicht ein vollständiges System von Axiomen, aus denen sich die Theorie ableiten lässt.

Das erste Gesetz "In Abwesenheit äußerer Einflüsse bewegen sich Teilchen geradlinig und gleichförmig" ist eher eine Definition (nämlich eines Inertialsystems) als ein Gesetz.

Das zweite Gesetz " $F = m a$ " ist auch mehr Definition (der Kraft) als ein Gesetz, das Vorhersagen ermöglicht. Schließlich ist **jede** Bahn damit kompatibel - man setze einfach $F(t) := m a(t)$. Erst zusammen mit spezifischen Kraftgesetzen erhält man eine Theorie, die geprüft werden kann.

Das dritte Gesetz "Kraft = Gegenkraft" schränkt die möglichen Kraftgesetze ein wenig ein. Hieraus kann man schon erste Konsequenzen ableiten (z.B. Impulserhaltung -- dazu später mehr). Aber warum ausgerechnet dieser eine Aspekt fundamentaler Kräfte den Status eines Gesetzes erlangt hat, und deren anderen Eigenschaften nicht, ist nicht offenbar.

Man sieht hier einen Unterschied zwischen mathematischer und physikalischer Tradition.

Mathematiker sind "Geschichtsrevisionisten". Sie erforschen eine Theorie - und sobald sie gut verstanden ist, wird die ursprüngliche Formulierung vergessen, und durch eine minimalistische, stringente Version ersetzt.

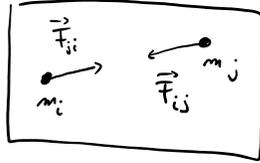
Physiker sind eher Traditionsbewusst und wiederholen alten Konzepte, auch wenn sie aus moderner Sicht nicht mehr ideal sind.

(Philosophen sind natürlich noch um einiges extremer. Dort wird die Meinung der ursprünglichen Autoren so hoch geschätzt, dass man sogar Originalquellen liest... Abstrus, oder?)

Das Zweikörperproblem und das Keplerproblem

Ein Kraftgesetz der Form

$$\vec{F}_i = f_{ij}(\|\vec{r}_i - \vec{r}_j\|) \frac{\vec{r}_i - \vec{r}_j}{\|\vec{r}_i - \vec{r}_j\|}$$



heißt Zentralkraft.

Gravitation ist Z-Kraft mit

$$(G) \quad f_{ij}(r) = -G m_i m_j \frac{1}{r^2}$$

\swarrow Gravitationsk. \nwarrow Massen

Elektrostatik

$$(E) \quad f_{ij}(r) = \epsilon_0 q_i q_j \frac{1}{r^2}$$

\swarrow Dielektrizitätsk. \nwarrow Ladungen

Zweikörperproblem: Löse BWG. für zwei Teilchen unter einer Zentralkraft:

$$(Z) \quad \vec{r} := \vec{r}_1 - \vec{r}_2$$

$$\vec{F} := \vec{F}_{21} = f(\|\vec{r}\|) \frac{\vec{r}}{\|\vec{r}\|}$$

Keplerproblem: Spezialfall, wenn

$$(K) \quad f(r) = -\frac{\alpha}{r^2}$$

für eine Konstante α . Bsp.: (G), (E).

Hier werden wir (Z) und (K) lösen.

Wann ist ein mechanisches Problem "gelöst"?

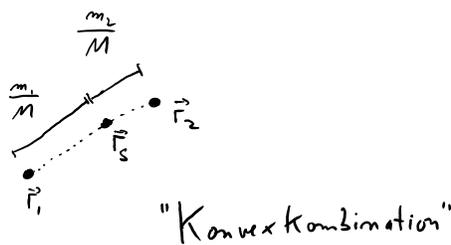
Von ideal zu realistisch:

1. Leite explizite Form von $r(t)$ ab. Dies ist sehr selten möglich (freies Teilchen, harmonische Schwingungen, kreisförmige Planetenbahnen, ...).
2. Schreibe $r(t)$ in Form eindimensionaler Integrale, für die es möglicherweise keine elementare Lösung gibt. Dies wird in der Mechanik als "Lösung" akzeptiert. Das Auswerten der Integrale - im Allgemeinen numerisch - ist nicht mehr Aufgabe der Mechanik, sondern der (numerischen) Mathematik oder der Computerphysik. Wir werden diese Form für das Zweikörperproblem erreichen.
3. Finde wesentlichen Eigenschaften der Lösungen. Dies ist weniger gut definiert (was ist "wesentlich")? Für das Keplerproblem heißt es z.B., dass wir die **Form der Bahnen** explizit beschreiben können, auch wenn es schwierig ist, den **zeitlichen Verlauf** direkt anzugeben.

Bis auf Weiteres nehmen wir (2) an, mit allgemeinem Abstandsverhalten $f(r)$.

① Separation von Schwerpunkt- und Relativbewegung.

$$\underline{\text{Def.}} := \begin{cases} M = m_1 + m_2 & \text{Gesamtmasse} \\ \vec{r}_S := \frac{1}{M} (m_1 \vec{r}_1 + m_2 \vec{r}_2) & \text{Schwerpunkt} \\ \vec{r} = \vec{r}_1 - \vec{r}_2 & \text{Relativkoordinate} \end{cases}$$



Aus \vec{r}_S, \vec{r} können \vec{r}_1, \vec{r}_2 berechnet werden:

$$\vec{r}_1 = \frac{1}{2} \left(\frac{M}{m_1} \vec{r}_S + m_1 m_2 \vec{r} \right), \dots$$

→ Es reicht, das Problem für \vec{r}, \vec{r}_S zu lösen.
(Koordinatenwechsel).

Warum würde man das wollen? Daher:

Def.:

$$\vec{p}_S := M \dot{\vec{r}}_S \quad \text{Schwerpunktsimpuls}$$

$$\Rightarrow \frac{d}{dt} \vec{p}_S(t)$$

(*)

$$\Rightarrow \frac{d}{dt} \vec{p}_S(t) \quad (*)$$

$$= \frac{d}{dt} (m_1 \dot{\vec{r}}_1 + m_2 \dot{\vec{r}}_2) = m_1 \ddot{\vec{r}}_1 + m_2 \ddot{\vec{r}}_2 \stackrel{\substack{\rightarrow \\ \text{Newton}}}{=} \vec{F}_{21} + \vec{F}_{12} \stackrel{\substack{\rightarrow \\ \text{Z}}}{=} \vec{0}$$

$$\Rightarrow \text{Erhaltungsgröße!}$$

~> BW Gl. für Schwerpunkt- und Relativkoordinaten:

$$\boxed{\ddot{\vec{r}}_S \stackrel{\substack{\rightarrow \\ (*)}}{=} \vec{0}}$$

$$\boxed{\ddot{\vec{r}} = \ddot{\vec{r}}_1 - \ddot{\vec{r}}_2 = \frac{1}{m_1} \vec{F}_2(\vec{r}) + \frac{1}{m_2} \vec{F}_{12}(\vec{r})}$$

$$= \frac{M}{m_1 m_2} \vec{F}_{21}(\vec{r})$$

$$\boxed{= \frac{1}{\mu} \vec{F}_{21}(\vec{r})} \quad \mu := \frac{m_1 m_2}{M}$$

"reduzierte Masse"

~> effektiv: zwei ungekoppelte 1-Teilchenprobleme:

(a) $\ddot{\vec{r}}_S = \vec{0} \quad \leadsto$ Trivial lösbar. Schwerpunktsbewegung ist geradlinig, gleichförmig

(b) $\ddot{\vec{r}} = \frac{1}{\mu} \vec{F}_{21}(\vec{r})$

Wir haben zunächst eine Erhaltungsgröße gefunden (die Schwerpunktschwindigkeit). Diese hat dann einen Koordinatenwechsel suggeriert, der die Zahl der noch zu behandelnden Freiheitsgrade von sechs auf drei (nämlich die Relativkoordinaten) reduziert hat.

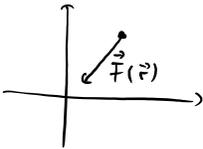
Motiviert durch diesen Erfolg, werden wir in den nächsten Schritten versuchen, weitere Erhaltungsgrößen zu finden.

In späteren Kapiteln der Vorlesung werden wir eine systematische Theorie kennen lernen, die Symmetrien, Erhaltungsgrößen und die Reduktion von Freiheitsgraden verbindet.

② Drehimpulserhaltung

Es bleibt zu lösen: $\ddot{\vec{r}} = \frac{1}{\mu} \vec{F}_{21}(\vec{r})$.

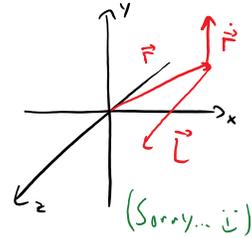
(Z) $\Rightarrow \vec{F}_{21}(\vec{r}) = \vec{F}(\vec{r}) = f(\|\vec{r}\|) \underbrace{\frac{\vec{r}}{\|\vec{r}\|}}_{=: \vec{r}_0}$



Def.: $\vec{L} := \mu \vec{r} \times \dot{\vec{r}}$.

Unter Einfluß beliebiger Zentralkraft gilt:

$$\frac{d}{dt} \vec{L} = \mu (\underbrace{\dot{\vec{r}} \times \dot{\vec{r}}}_{=0} + \vec{r} \times \ddot{\vec{r}})$$



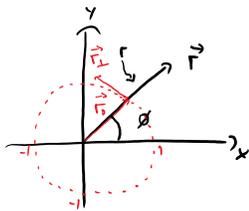
$$= f(\|\vec{r}\|) \vec{r} \times \vec{r}_0 = 0 \quad \leadsto \text{Erhaltungsgröße!}$$

\Rightarrow • $\vec{r}, \dot{\vec{r}}$ liegen in Ebene \perp zu \vec{L} ! (Ekliptik)

Wähle Koordinaten so, dass dies x-y-Ebene ist.

$\leadsto z=0$ ist erhalten, das Problem nunmehr 2-D!

• Auch erhalten: $\|\vec{L}\|$. Dazu: Wähle in x-y-Ebene Polarkoordinaten:



$$\vec{r}(t) = \begin{bmatrix} x(t) \\ y(t) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} r(t) \cos \phi(t) \\ r(t) \sin \phi(t) \end{bmatrix}$$

$$\vec{r}_0(t) := \frac{\vec{r}(t)}{\|\vec{r}(t)\|} = \begin{bmatrix} \cos \phi(t) \\ \sin \phi(t) \end{bmatrix}$$

N.R.: $\dot{\vec{r}}(t) = \frac{d}{dt} (r(t), \vec{r}_0(t)) = \underbrace{\begin{bmatrix} -\sin \phi(t) \\ \cos \phi(t) \end{bmatrix}}_{\dot{\phi}(t)} \dot{\phi}(t) =: \dot{\phi}(t) \vec{r}_\perp(t)$

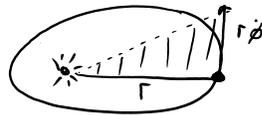
(*)
$$= \dot{r}(t) \vec{r}_0(t) + r(t) \dot{\vec{r}}_0(t) = \dot{r}(t) \vec{r}_0(t) + r(t) \dot{\phi}(t) \vec{r}_\perp(t)$$

$$\leadsto \vec{L} = \mu \vec{r} \times \dot{\vec{r}} = \mu r^2(t) \dot{\phi}(t) \underbrace{\vec{r}_0(t) \times \vec{r}_\perp(t)}_{= \vec{e}_z}$$

$$\leadsto \|\vec{L}\| = \mu r^2(t) \dot{\phi}(t) =: l \quad \text{erhalten.}$$

$$\leadsto \|\vec{L}\| = \mu r^2(t) \dot{\phi}(t) =: l \quad = \vec{L}_z \quad \text{erhalten.}$$

$$\Leftrightarrow r^2 \dot{\phi} = \frac{l}{\mu}$$



2. Keplersche Gesetz:

Überstrichene Fläche / Zeit
 $= \frac{1}{2} \dot{r} \dot{\phi} = \frac{1}{2} \frac{l}{\mu} = \text{konst.}$

③ Energie

$$(z) \Rightarrow \vec{F}(\vec{r}) = f(r) \vec{r}_0.$$

Absurde Idee: Integriere f auf: $V(r) := - \int_{r_0}^r f(r') dr'$

Dann: $E := \frac{1}{2} \mu \|\dot{\vec{r}}\|^2 + V(r)$ ist erhalten.

beliebiger, aber fester, Wert. Hat nichts mit \vec{r}_0 zu tun. Genaue von Integral Konv.

Bew.: $\frac{d}{dt} E(\vec{r}(t), \dot{\vec{r}}(t)) = \frac{1}{2} \mu \frac{d}{dt} (\dot{\vec{r}}(t), \dot{\vec{r}}(t)) + \frac{d}{dt} V(r(t))$

$$= \mu \underbrace{(\ddot{\vec{r}}_0, \dot{\vec{r}})}_{= \frac{1}{\mu} f(r) \vec{r}_0} + \underbrace{\left(\frac{\partial V}{\partial r} \right)}_{-f(r)} \underbrace{\frac{d}{dt} r(t)}_{(\dot{\vec{r}}(t), \vec{r}_0(t))}$$

$$= f(r) \left((\dot{\vec{r}}_0, \dot{\vec{r}}) - (\dot{\vec{r}}, \vec{r}_0) \right)$$

$$= 0. \quad \square$$

\leadsto Setze $l = \mu r^2 \dot{\phi}$ im Ausdruck für E ein:

$$E = \frac{1}{2} \mu \|\dot{\vec{r}}\|^2 + V(r)$$

$$\stackrel{(*)}{=} \frac{1}{2} \mu \left(\dot{r}^2 + \underbrace{(r \dot{\phi})^2}_{\frac{l^2}{r \mu}} \right) + V(r)$$

$$= \frac{1}{2} \mu \dot{r}^2 + \frac{1}{2} \frac{l^2}{r^2 \mu} + V(r)$$

$r = r, \dot{r} = \dot{r}, \ddot{r} = \ddot{r}, \dots, n_2 = 1, 7 \frac{1}{2}$ Lineare DGL 1. Ordnung

$$= \frac{1}{2} \mu \dot{r}^2 + \frac{1}{2} \frac{l^2}{r^2 \mu} + V(r)$$

$$(*) \quad \Leftrightarrow \dot{r} = \pm \left[\frac{2}{\mu} \left(E - V - \frac{1}{2} \frac{l^2}{r^2 \mu} \right) \right]^{\frac{1}{2}}$$

Lineare DGL 1. Ordnung

für $r(t)$, entkoppelt vom ϕ !

Zur Lösung von (*), nehme an $r(t)$ (lokal) umkehrbar $\leadsto t(r)$.

Satz über implizite Fkt.:

$$\frac{dr(t)}{dt} = g(r(t)) \Leftrightarrow \frac{dt(r)}{dr} = g(r)$$

Mit (*):

$$\frac{dt(r)}{dr} = \frac{1}{\pm \left[\frac{2}{\mu} \left(E - V(r) - \frac{1}{2} \frac{l^2}{r^2 \mu} \right) \right]^{\frac{1}{2}}} \quad \leadsto \quad t(r) \leadsto r(t) \leadsto \phi(t) \quad \square$$

1-D Integral Invertieren 1-D Int.
 $\dot{\phi} = \frac{l}{\mu r^2}$

Damit haben wir das Zweikörperproblem auf zwei eindimensionale Integrale reduziert!

Im Sinne des 2. oben genannten Kriteriums gilt es damit als "gelöst".

Es ergeben sich für einfache Potentiale $V(r)$ sogenannte "elliptische Integrale", über die viel bekannt ist - eine Lösung durch elementare Funktionen existiert aber im Allgemeinen nicht.

Ammerkung I

Die Methode, mit der wir (*) gelöst haben, funktioniert allgemeiner, und

heißt Trennung der Variablen.

Allgemein: DGL der Form

$$(S) \quad \frac{d}{dt} r(t) = g(t) h(r(t))$$

mit Funktionen g, h . (In (*): $g(t) = 1$, $h(r) = \pm \left[\frac{2}{\mu} \left(E - V(r) - \frac{1}{2} \frac{l^2}{r^2 \mu} \right) \right]^{\frac{1}{2}}$)

Wähle t_0, r_0 und setze

t

r

Wähle t_0, r_0 und setze

$$G(t) = \int_{t_0}^t g(s) ds \quad H(r) = \int_{r_0}^r \frac{1}{h(s)} ds$$

Wenn H (lokal) invertierbar ist, löst

$$x(t) := H^{-1}(G(t))$$

die DGL (*). Beweis:

$$\frac{d}{dt} x(t) = (H^{-1})'(G(t)) \cdot G'(t) = \frac{1}{H'(H^{-1}(G(t)))} g(t) = \frac{1}{H'(x(t))} g(t) = h(x(t)) g(t).$$

-Anmerkung II-

Die Aussage des Satzes über impl. Fkt. wird in Naturwissenschaften häufig so dargestellt:

$$(?) \quad \frac{dr}{dt} = \frac{1}{\frac{dt}{dr}}$$

Darf man das? Nun...:

Der Ausdruck $(dr)/(dt)$ wurde als Notation für die Ableitung $r'(t)$ eingeführt. Auch wenn er wie ein Bruch geschrieben wird, **ist es kein Bruch!** Es ist also ein Kategorienfehler, wenn man Rechenregeln für Brüche anwendet. Die Formel (?) ist also in keinsten Weise eine mathematisch korrekte Herleitung für den Zusammenhang zwischen der Ableitung einer Funktion und ihrer Umkehrfunktion.

Allerdings ist die Ableitung über den Limes eines Differenzenquotienten definiert. Wenn man statt mit dem Limes mit kleinen, aber endlichen Differenzen arbeitet, erhält man einen echten Bruch, der die Ableitung gut approximieren sollte. Daher bekommt man in der Praxis oft korrekte Ergebnisse, wenn man mit den Differentialen wie mit Zahlen rechnet.

Gerade für DGLs ist das nützlich. Hier ist es legitim, mit jedem noch so fragwürdigen Trick mögliche Lösungen der DGL zu produzieren - schließlich kann man immer leicht durch einsetzen prüfen, ob eine so gefundene Funktion wirklich eine Lösung ist!

Also: Keine Scheu vor dem Rechnen mit Differentialen wie mit Zahlen - aber bitte immer das Ergebnis unabhängig überprüfen.

④ Runge-Lenz-Vektor

Wir schränken uns nun auf das Kepler-Problem (K) ein, also:

$$(K) \quad f(r) = -\frac{\alpha}{r^2}.$$

$$\underline{\text{Def.}}: \quad \vec{A} := \mu \dot{\vec{r}} \times \vec{L} - \mu \alpha \vec{r}_0 \quad \underline{\text{RL-Vektor}}$$

Beh.: \vec{A} ist Erhaltungsgröße. Bew.: Ü-Zettel!

Beh.: \vec{A} liegt in x-y-Ebene.

Bew.: " $\dot{\vec{r}} \times \vec{L} \perp \vec{L}$, $\vec{r}_0 \in \text{x-y-Ebene} \dots$ ".

→ Rotiere Koordinatensystem so, dass $\vec{A} = \|\vec{A}\| \vec{e}_x$.

Damit:

$$(1) \quad (\vec{A}, \vec{r}) = \|\vec{A}\| r \cos \phi$$

$$\begin{aligned} (2) \quad (\vec{A}, \vec{r}) &= \underbrace{\mu (\dot{\vec{r}} \times \vec{L}, \vec{r})}_{\text{Lin.-Alg.}} - \mu \alpha (\vec{r}_0, \vec{r}) = \ell^2 - \mu \alpha r \\ &= \mu (\vec{r} \times \dot{\vec{r}}, \vec{L}) \\ &= (\vec{L}, \vec{L}) = \ell^2 \end{aligned}$$

$$\text{Also: } \|\vec{A}\| r \cos \phi = \ell^2 - \mu \alpha r$$

$$r = \frac{p}{1 + \epsilon \cos \phi}$$

$$\epsilon = \frac{\|\vec{A}\|}{\alpha p} \quad (\text{numerische})$$

Exzentrizität

$$p = \frac{L^2}{\alpha \mu} \quad \text{Halbparameter}$$

Polar darstellung

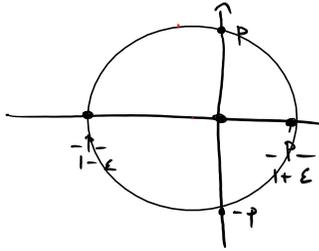
lines

Kegelschnitts.

(\Leftrightarrow)

Fälle:

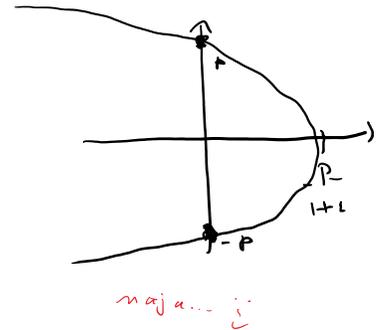
gebund. Lsg. $\left\{ \begin{array}{l} \underline{\epsilon = 0} \rightarrow \text{Kreis mit Radius } r = p = \frac{L^2}{\mu \alpha} \\ \underline{0 < \epsilon < 1} \end{array} \right.$



\rightarrow Ellipse (s.u.)

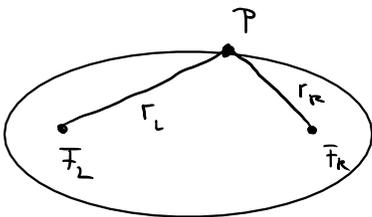
"Erstes Keplersches Gesetz"

Streu- Lsg. $\left\{ \begin{array}{l} \underline{\epsilon = 1} \rightarrow \text{Parabel} \\ \underline{\epsilon > 1} \rightarrow \text{Hyperbel} \end{array} \right.$



maja... i

III Ellipsen



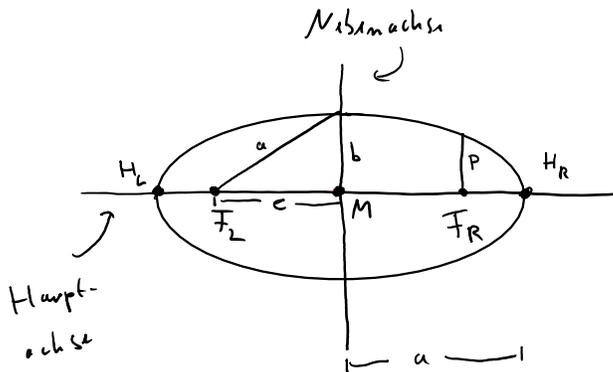
Menge aller Punkte P in Ebene, s.d.

Summe der Abstände $\overline{F_L P} = r_L$, $\overline{F_R P} = r_R$

zu zwei gegebenen Punkten F_L, F_R gleich

gegebenen Konstante $2a$ ist.

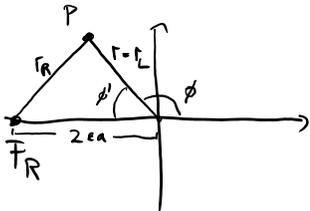
~) "Gärtnerkonstruktion".



- M - Mittelpunkt
- F_L / F_R - Brennpunkte
- a / b - große/kleine Halbachse
- e - lineare Exzentrizität
- $\varepsilon = \frac{e}{a}$ - (numerische) Exz.
- p - Halbparameter
- H_L / H_R - Hauptschritte

Beh.: Die Menge $\left\{ (r, \phi) \mid r = \frac{p}{1 + \varepsilon \cos \phi}, \phi \in [0, 2\pi) \right\}$ sind die Polarkoordinaten einer Ellipse.

Bew.: Wähle $F_R := \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}$, $F_L := \begin{pmatrix} 0 \\ -2\varepsilon a \end{pmatrix}$, $a := \frac{p}{(1 - \varepsilon^2)}$.



Z.z.: $r_R = 2a - r_L$.

Dazu: Kosinussatz $\leadsto r_R^2 = 4\varepsilon^2 a^2 + r_L^2 - 4\varepsilon a r_L \overset{= -\cos \phi'}{\cos \phi'}$

$$r_L = \frac{p}{1 + \varepsilon \cos \phi} \Rightarrow r_L \varepsilon \cos \phi = p - r_L$$

$$= r^2 + 4\varepsilon^2 a^2 + 4ap - 4ar$$

$a = \frac{p}{1 - \varepsilon^2}$

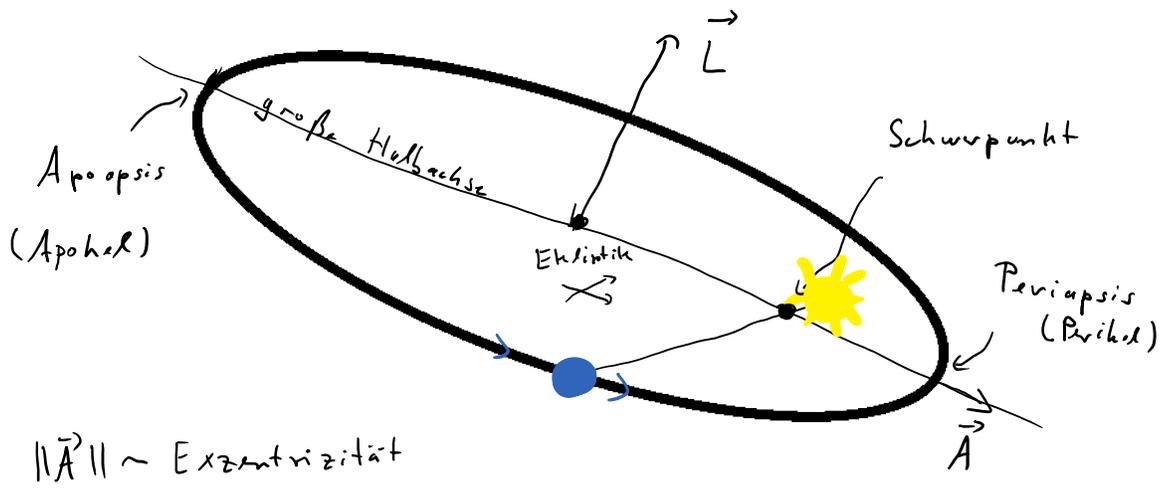
$$= r^2 - 4ar + 4a(\varepsilon^2 a + p)$$

$$= \varepsilon^2 a + a(1 - \varepsilon^2) = a$$

$$= r^2 - 4ar + 4a^2$$

$$= (r - 2a)^2 \quad \square$$

Insbesondere liegt der rechte Brennpunkt im Ursprung, und die x-/y-Achse ist Haupt-/Nebenachse.



$\|\vec{A}\| \sim \text{Exzentrizität}$

$\|\vec{L}\| \sim r^2 \dot{\phi} / 2$ "Flächengeschwindigkeit"

Wir betrachten System mit n Teilchen

- mit Massen m_1, \dots, m_n
- Positionen $\vec{r}_1, \dots, \vec{r}_n$
- inneren Zentralkräften

$$\vec{F}_{ij} = f(\|\vec{r}_i - \vec{r}_j\|) \frac{\vec{r}_j - \vec{r}_i}{\|\vec{r}_j - \vec{r}_i\|}$$

- äußeren Kräften

$$\vec{K}_j(\vec{r}, \dot{\vec{r}}, t) \quad (\vec{r} = (\vec{r}_1, \dots, \vec{r}_n) \in \mathbb{R}^{3n})$$

System heißt abgeschlossen wenn $\vec{K}_i = 0 \quad \forall i$.

$\leadsto 3n$ gekoppelte Bewegungsgleichungen:

$$\begin{aligned} \ddot{\vec{r}}_1 &= \frac{1}{m_1} (\vec{F}_{21} + \dots + \vec{F}_{n1} + \vec{K}_1) \\ (*) \quad \ddot{\vec{r}}_2 &= \frac{1}{m_2} (\vec{F}_{12} + \dots + \vec{F}_{n2} + \vec{K}_2) \\ &\vdots \\ \ddot{\vec{r}}_n &= \frac{1}{m_n} (\vec{F}_{1n} + \dots + \vec{F}_{(n-1)n} + \vec{K}_n) \end{aligned}$$

Es gelten folgende Erhaltungssätze:

① Schwerpunktsatz, Impulserhaltung

Def.:

$$M = \sum_j m_j \quad \text{Gesamtmasse}$$

$$\vec{r}_s = \frac{1}{M} \sum_j m_j \vec{r}_j \quad \text{Schwerpunkt}$$

$$\begin{aligned} \vec{P} &= \sum_j m_j \dot{\vec{r}}_j \quad \text{Gesamtimpuls} \\ &= M \dot{\vec{r}}_s \end{aligned}$$

Durch Aufsummieren der Zeilen von (*) und mit Anti-Symmetrie $F_{ij} = -F_{ji}$:

$$\boxed{\ddot{\vec{r}}_s = \frac{1}{M} \vec{K}} \quad \text{Schwerpunktsatz}$$

$\Gamma_S \quad M \quad K$ Schwerpunktsatz

$$\Rightarrow \frac{d}{dt} \vec{P} = \frac{d}{dt} M \dot{\vec{r}}_S = \sum_i \vec{K}_i \quad \text{äußere Gesamtkraft}$$

\Rightarrow Für abg. Systeme: Gesamtimpuls ist erhalten.

$$\Rightarrow \vec{r}_S(t) = \vec{r}_S(0) + \frac{1}{M} \vec{P} t$$

$$\Leftrightarrow \vec{r}_S(t) - \frac{1}{M} \vec{P} \cdot t \quad \text{initialer Schwerpkt. erhalten.}$$

② Drehimpuls

Def.: $\vec{L} = \sum_j m_j \vec{r}_j \times \dot{\vec{r}}_j$ Gesamtdrehimpuls

$$\begin{aligned} \Rightarrow \frac{d}{dt} \vec{L} &= \sum_j m_j \dot{\vec{r}}_j \times \dot{\vec{r}}_j + \sum_j m_j \vec{r}_j \times \ddot{\vec{r}}_j \\ &= \sum_{i \neq j} \underbrace{\vec{r}_j \times \vec{F}_{ij}}_{\vec{r}_j \times (\vec{r}_j - \vec{r}_i) \frac{f_{ij}}{\|\vec{r}_j - \vec{r}_i\|}} + \sum_i \vec{r}_i \times \vec{K}_i \\ &= \sum_{i \neq j} \vec{r}_j \times \vec{r}_i \frac{f_{ij}}{\|\vec{r}_j - \vec{r}_i\|} = 0 \end{aligned} \quad =: \text{Drehmoment } \vec{N}_i$$

$$= \sum_j \vec{N}_j \quad \text{Gesamtdrehmoment}$$

Für aut. Syst.: Gesamtdrehimpuls ist erhalten.

③ Energie

Wähle ein r_0 , und setze

$$V_{ij}(r) = - \int_{r_0}^r f_{ij}(r') dr'$$

Im Allg. wird angenommen, dass $f(r) \rightarrow 0$ für $r \rightarrow \infty$ schnell genug, dass das Integral für $r_0 = \infty$ Sinn macht. \leadsto Wähl dann $r_0 = \infty$.

Def.: $T(\dot{\vec{r}}) = \frac{1}{2} \sum_j m_j \|\dot{\vec{r}}_j\|^2$ Kinetische Energie

$$D_{\text{def}}: T(\dot{\vec{r}}) = \frac{1}{2} \sum_j m_j \|\dot{\vec{r}}_j\|^2$$

Kinetische Energie

$$V(\vec{r}) = \sum_{i < j} V_{ij}(\|\vec{r}_j - \vec{r}_i\|)$$

Potentielle Energie (der inneren Kräfte)

$$E(\vec{r}, \dot{\vec{r}}) = T + V$$

Energie

Domit:

$$\begin{aligned} \underbrace{\vec{\nabla}_j}_{\begin{pmatrix} \frac{\partial}{\partial x_j} \\ \frac{\partial}{\partial y_j} \\ \frac{\partial}{\partial z_j} \end{pmatrix}} V_{ij}(\|\vec{r}_j - \vec{r}_i\|) &= \underbrace{V'_{ij}(\|\vec{r}_j - \vec{r}_i\|)}_{-f_{ij}(\|\vec{r}_j - \vec{r}_i\|)} \underbrace{\vec{\nabla}_j \|\vec{r}_j - \vec{r}_i\|}_{= \vec{\nabla}_j \left((x_j - x_i)^2 + \dots + (z_j - z_i)^2 \right)^{\frac{1}{2}}} \\ &= \frac{1}{\|\vec{r}_j - \vec{r}_i\|} (\vec{r}_j - \vec{r}_i) \\ &= -\vec{F}_{ij}(\|\vec{r}_j - \vec{r}_i\|) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \frac{d}{dt} T(\dot{\vec{r}}(t)) &= \frac{1}{2} \sum_j m_j \frac{d}{dt} (\dot{\vec{r}}_j, \dot{\vec{r}}_j) \\ &= \sum_j (m_j \ddot{\vec{r}}_j, \dot{\vec{r}}_j) \\ &= \sum_{i \neq j} (\vec{F}_{ij}, \dot{\vec{r}}_j) + \sum_j (\vec{K}_j, \dot{\vec{r}}_j) \end{aligned}$$

$$\frac{d}{dt} U(\vec{r}(t)) = \sum_{i < j} \frac{d}{dt} V_{ij}(\|\vec{r}_j(t) - \vec{r}_i(t)\|)$$

Strategie: Kettenregel:

$$\frac{d}{dt} V = \frac{d}{dt} g(h(t))$$

Kann wählen:

$$\textcircled{1} g(r) = V(r)$$

$$h(t) = \|\vec{r}_j(t) - \vec{r}_i(t)\|$$

→ Kofler-Rechnung.

Oder:

$$\textcircled{2} g(\vec{r}_i, \vec{r}_j) = V(\|\vec{r}_j - \vec{r}_i\|)$$

$$h(t) = (\vec{r}_i^T(t), \vec{r}_j(t))$$

Letzteres ist etwas

schwieriger, aber mit Rechnung

für Potential von \vec{K} kompatibel

$$\begin{aligned} &= \sum_{i < j} \left[\left(\vec{\nabla}_j V_{ij}(\|\vec{r}_j - \vec{r}_i\|), \dot{\vec{r}}_j \right) + \left(\vec{\nabla}_i V_{ij}(\|\vec{r}_j - \vec{r}_i\|), \dot{\vec{r}}_i \right) \right] \\ &= \sum_{i \neq j} (\vec{F}_{ij}, \dot{\vec{r}}_j) \end{aligned}$$

$$\Rightarrow \boxed{\frac{d}{dt} E(\vec{r}(t), \dot{\vec{r}}(t)) = \sum_j (\underbrace{K_j, \dot{\vec{r}}_j}_{\text{Leistung}})} \quad (*)$$

Schwieriger, aber mit Rechnung
für Potential von \vec{K} kompatibel
(s.u.). Daher: Wähle ②.

Leistung

Energie-Änderung = Leistung äußere Kräfte.

In abgeschlossenen Systemen ist Energie erhalten.

Bisher haben wir nur den Zentralkräften ein Potential zugeordnet,
und sie so bei der Energie berücksichtigt.

Betrachte nun den Fall:

$$\vec{K}_j = \vec{K}_j(\vec{r}) = -\vec{\nabla}_j V(\vec{r})$$

für geeignetes Potential $V(\vec{r})$. \leadsto Solche Kräfte heißen Konservativ.

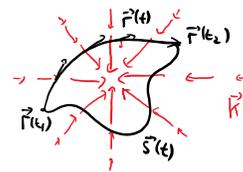
— Erinnerung (math. Methoden):

Für Vektorfeld $\vec{K}_j(\vec{r})$ ist äquivalent:

① \vec{K}_j ist Gradientenfeld, also $\exists V$ s.d. $\vec{K}_j(\vec{r}) = -\vec{\nabla}_j V(\vec{r})$.

② Wegintegrale

$$(W) \int_{t_1}^{t_2} (\vec{K}_j(\vec{r}(t)), \dot{\vec{r}}(t)) dt$$



sind wegunabhängig: sie hängen nur vom Anfangs- und Endpunkt
 $\vec{r}(t_1), \vec{r}(t_2)$ ab.

Desweiteren gilt für Gradientenfelder \vec{K}_j :

$$\textcircled{3} \text{rot } \vec{K}_j = \vec{\nabla}_j \times \vec{K}_j = 0.$$

$$\textcircled{3} \quad \text{rot } \vec{v}_j = \vec{v}_j \cdot \text{rot } \vec{v}_j$$

Auf einfach zusammenh. Gebieten ist $\textcircled{3}$ zu $\textcircled{1}$ und $\textcircled{2}$ äquivalent.
 ↗ "ohne Löcher"

• Physikalisch: (W) ist Wegintegral der Leistung = Arbeit.

Zurück zur Energieerhaltung. Für konservative Kräfte, setze:

$$E_g(\vec{r}, \dot{\vec{r}}) = T(\dot{\vec{r}}) + U(\vec{r}) + \sum_j \vec{V}_j(\vec{r}) \quad \text{Gesamtenergie}$$

Mit $\frac{d}{dt} V_j(\vec{r}(t)) \underset{\text{wie zuvor}}{=} (\vec{V}_j \cdot \dot{V}_j(\vec{r}(t)), \dot{\vec{r}}_j(t)) = - (\vec{K}_j, \dot{\vec{r}}_j) \rightsquigarrow$ - Leistung am j-ten Teilchen.

$$\Rightarrow \frac{d}{dt} E_g(\vec{r}(t), \dot{\vec{r}}(t)) = 0.$$

Für konservative Kraftfelder ist Energie erhalten.

Anmerkung:

In der Newtonschen Mechanik ist die Kraft eine fundamentale Größe.

Der Begriff des Potentials wird als formaler mathematischer Ausdruck eingeführt, um (für den Spezialfall konservativer Kräfte) die Erhaltungsgröße Energie definieren zu können.

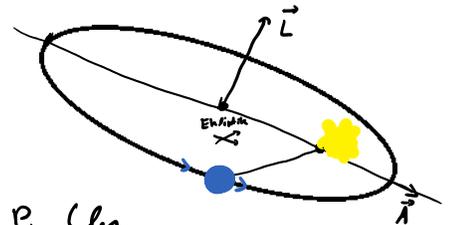
Überraschenderweise stellt später heraus, dass Potentiale fundamentaler als Kräfte sind: In der QM sind die Bewegungsgleichungen über Potentiale definiert. Kräfte hingegen können in Quantensystemen i.d.R. nicht definiert werden.

Insgesamt: 3 Komp. des Impuls
 + 3 " " " initialen Schwerpunktts
 + 3 " " " Drehimpuls
 + Energie

$$\vec{r}_i = 10$$

EHG für abg. Systeme.

Signifikanz \rightsquigarrow später.



Bei der Behandlung des Zwei-körper-Prob.

haben wir das Koordinatensystem dem Problem

angepasst:

- Ursprung = Schwerpunkt,

- $\vec{e}_z \parallel \vec{L}$,

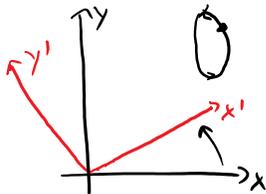
- $\vec{e}_x \parallel \vec{A}$.

Frage hier: Warum war das OK?

Welche Freiheit haben wir im Allgemeinen?

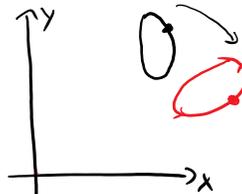
Zwei Interpretationen von Trafo:

Passiv



Beschreibe gegebene phys. Bahn
bzgl. eines transl. Bezugssystems.

Aktiv



Transformiere Bahn, halte
Bezugssystem fest.

Passive Trafo $\hat{=}$ Inverse der akt. Trafo.

Eine Transl. ist pass. Symmetrie, wenn sie BWGd. invariant läßt.

" " " akt. Symmetrie, " " Lösungen der BWGd. auf
Lösungen abbildet.

Im Folgenden: passive Betrachtungsweise.

Zunächst: Beschränke auf affine Trafos der Form:

$$\vec{r}_j \mapsto \vec{r}'_j = M \vec{r}_j + \vec{v} \cdot t + \vec{a} \quad \begin{array}{l} M \text{ invertierbare } 3 \times 3 \text{ Matrix,} \\ \vec{v}, \vec{a} \in \mathbb{R}^3. \end{array}$$

Im dem Fall transformiert sich Geschw. und Beschleunigung so:

$$\dot{\vec{r}}'_j(t) = M \dot{\vec{r}}_j(t) + \vec{v}, \quad \ddot{\vec{r}}'_j(t) = M \ddot{\vec{r}}_j(t).$$

Die Symmetrien der BWGl. hängen vom Kraftgesetz ab:

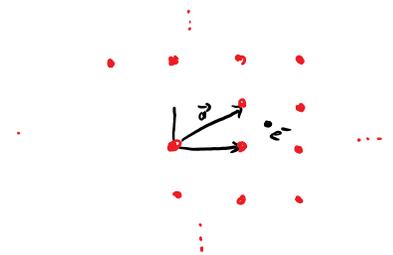
① BWGl. sind invariant unter der Translation $\vec{r}' = \vec{r} + \vec{a}$

$$\Leftrightarrow \vec{F}_j(\vec{r}_1, \dots, \vec{r}_m, \dot{\vec{r}}, t) = \vec{F}_j(\vec{r}_1 - \vec{a}, \dots, \vec{r}_m - \vec{a}, \dot{\vec{r}}, t)$$

Bew.: $\ddot{\vec{r}}'_j = \ddot{\vec{r}}_j = \frac{1}{m_j} \vec{F}_j(\vec{r}_1, \dots, \vec{r}_m, \dot{\vec{r}}, t) = \frac{1}{m_j} \vec{F}_j(\vec{r}'_1 - \vec{a}, \dots, \vec{r}'_m - \vec{a}, \dot{\vec{r}}', t) \quad \square$

Bsp.: • Zentralkräfte $\vec{F}_{ij}(\vec{r}, \dot{\vec{r}}, t) = \vec{F}_{ij}(\vec{r}_j - \vec{r}_i) \rightarrow$ Invariant unter beliebigen Translationen.

- Elektron im E-Feld eines Ionengitters:
Invariant unter Gittervektoren \vec{a} .



2) B.W.Gl. sind invariant unter Relativbewegung $\vec{r}' = \vec{r} + \vec{v}t$
 $\Leftrightarrow \vec{F}_j(\vec{r}_1, \dots, \vec{r}_n, \dot{\vec{r}}_1, \dots, \dot{\vec{r}}_n, t) = \vec{F}_j(\vec{r}_1 + \vec{v}t, \dots, \dot{\vec{r}}_1 + \vec{v}, \dots, t)$

3) B.W.Gl. sind invariant unter Linearem Transf. $\vec{r}' = M\vec{r}$
 $\Leftrightarrow \vec{F}_j(M\vec{r}_1, \dots, M\vec{r}_n, M\dot{\vec{r}}_1, \dots, M\dot{\vec{r}}_n, t) = M\vec{F}_j(\vec{r}_1, \dot{\vec{r}}_1, t)$

Bzw.: $\ddot{\vec{r}}'_j = M\ddot{\vec{r}}_j = \frac{1}{m_j} M\vec{F}_j(\vec{r}_1, \dot{\vec{r}}_1, t) = \frac{1}{m_j} M\vec{F}_j(M^{-1}\vec{r}'_1, \dots, M^{-1}\dot{\vec{r}}'_1, \dots, t)$ □

Bsp.: • zK für M , die Längen erhalten: $\|M(\vec{r}'_j - \vec{r}''_j)\| = \|\vec{r}'_j - \vec{r}''_j\|$. (*)

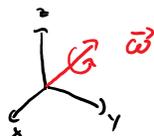
Orth. Gruppe
 Zu (*): $\|Mv\| = \|v\| \Leftrightarrow (v, v) = (Mv, Mv) = (M^T M v, v)$
 $\Leftrightarrow M^T M = \mathbb{1} \leftarrow$ Einheitsmatrix $\begin{pmatrix} 1 & & 0 \\ & \ddots & \\ & & 1 \end{pmatrix}$.
 [Bzw: " \Leftarrow " trivial. " \Rightarrow " Polarisationsgleichung.]

$\{M \mid M^T M = \mathbb{1}\} =: O(3) \rightsquigarrow$ Orthogonale Gruppe

$$\begin{aligned} M \in O(3) &\Rightarrow (\det M)^2 = \det M \cdot \det M \\ &= \det M^T \cdot \det M \\ &= \det(M^T M) = \det \mathbb{1} = 1. \Rightarrow \det M = \pm 1 \end{aligned}$$

$\{M \mid M \in O(3), \det M = +1\} =: SO(3) \rightsquigarrow$ Spezielle Orthogonale Gruppe

$\hat{=}$ Rotationen



Drehachse $\hat{=}$ $\vec{\omega}_0$

Winkel $\hat{=}$ $\|\omega\|$

$\in [0, 2\pi)$

\rightsquigarrow 3 Parameter.

Bsp. für $M \in O(3)$, $\det M = -1$: Spiegelung $M_z = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \end{bmatrix}$.

④ Transformation der Zeitkoordinate

Def.: $\tau(t) = \lambda t + t_0$ $t_0 \in \mathbb{R}$, $\lambda \in \{\pm 1\}$.

$$\left[\begin{array}{l} \text{N.R.: } t(\tau) = \frac{1}{\lambda} (\tau - t_0) \\ \frac{d\vec{r}}{d\tau} = \frac{d\vec{r}}{dt} \frac{dt}{d\tau} = \frac{1}{\lambda} \frac{d\vec{r}}{dt} = \lambda \frac{d\vec{r}}{d\tau} \\ \Rightarrow \frac{d^2\vec{r}}{(d\tau)^2} = \frac{1}{\lambda^2} \frac{d^2\vec{r}}{(dt)^2} = \frac{d^2\vec{r}}{dt^2} \end{array} \right]$$

\leadsto B/W/Gl. sind invariant unter

- $t \mapsto -t \Leftrightarrow \vec{F}(\vec{r}, \dot{\vec{r}}, t) = \vec{F}(\vec{r}, -\dot{\vec{r}}, -t)$

- $t \mapsto t + t_0 \Leftrightarrow \vec{F}(\vec{r}, \dot{\vec{r}}, t) = \vec{F}(\vec{r}, \dot{\vec{r}}, t - t_0)$

Für \mathbb{Z}^k : Invariant unter

$$\begin{pmatrix} \vec{r}_j \\ t \end{pmatrix} \mapsto \begin{pmatrix} R\vec{r}_j + \vec{v}t + \vec{a} \\ \lambda t + t_0 \end{pmatrix}$$

$$\vec{v}, \vec{a} \in \mathbb{R}^3$$

$$R \in SO(3)$$

$$t_0 \in \mathbb{R}$$

$$\lambda \in \{\pm 1\}$$

Galileo-Gruppe

/ 10 Kont. Parameter

- Anmerkung -

Scheck:

Definition 1.2 Inertialsystem

Bezugssysteme, in denen das Gesetz (I) im kräftefreien Fall die Form $\ddot{r}(t) = 0$ hat, heißen Inertialsysteme.

1.13 Galilei-Transformationen

Man macht sich leicht klar, dass die allgemeinste Transformation g , die Inertialsysteme auf Inertialsysteme abbildet, folgende Form haben muss:

$$\begin{aligned} \underset{g}{r} &\rightarrow \underset{g}{r}' = \mathbf{R}\mathbf{r} + \mathbf{w}t + \mathbf{a} & \text{mit } \mathbf{R} \in O(3), \det \mathbf{R} = +1 \text{ oder } -1, \\ \underset{g}{t} &\rightarrow \underset{g}{t}' = \lambda t + s & \text{mit } \lambda = +1 \text{ oder } -1 \end{aligned} \quad (1.32)$$

(Damit $\vec{r} \mapsto G\vec{r}$ eine Koordinatentransformation ist)

Das ist so nicht richtig. $\vec{r} \mapsto \vec{r}' = G\vec{r}$, mit G invertierbar, aber nicht orthogonal, bildet ebenfalls Inertialsysteme auf Inertialsysteme ab:

$$\ddot{\vec{r}}' = \frac{d^2}{(dt')^2} (G\vec{r}) = G\ddot{\vec{r}} = 0.$$

(Vergl. Arnold, p 11).

"Physics is that subset of human experience which can be reduced to coupled harmonic oscillators" -- Michael Peskin

Man kann erfolgreich Physik machen, ohne z.B. den Kreisel zu verstehen. Aber die Theorie in diesem Abschnitt ist überall und absolut notwendig!!!

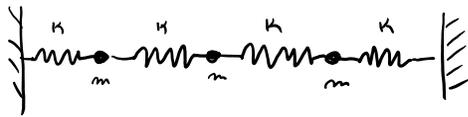
Betrachte System mit N Freiheitsgraden: $\vec{r}(t) \in \mathbb{R}^N$.

BWGl:

$$\ddot{\vec{r}}(t) = \vec{f}(\vec{r})$$

- Bsp.: • N Teilchen in 1-D, $f_i(\vec{r}) = \frac{1}{m_i} F_i(\vec{r})$
 • $N/3$ " " 3-D, ...

\vec{x} ist Gleichgewichts Konfiguration wenn $f(\vec{x}) = 0$.



($\Rightarrow \vec{r}(t) = \vec{x}$ löst BWGl.)

Setze $\vec{r}(t) = \vec{\delta}(t) + \vec{x}$ und Taylor:

$$f_j(\vec{x} + \vec{\delta}) = \overbrace{f_j(\vec{x})}^0 + \sum_i \frac{\partial f_j}{\partial r_i}(\vec{x}) \cdot \delta_i + \underbrace{O(\delta^2)}_{\text{für kleine } \delta \text{ vernachlässigbar.}}$$

Def: Matrix M mit Elementen

$$M_{ji} = \frac{\partial f_j}{\partial r_i}(\vec{x})$$

\Rightarrow Um \vec{x} linearisierte BWGl.:

$$\ddot{\vec{\delta}}(t) = M \vec{\delta}(t) \quad (*)$$

Zentrale Erkenntnis: (*) in Eigenbasis von M lösbar!

Dazu: Seien λ_k die Eigenwerte, \vec{v}_k Rechts-Eigenvektoren von M :

$$M \vec{v}_k = \lambda_k \vec{v}_k.$$

Entwickelt:

$$\vec{\delta}(t) = c_k(t) \vec{v}_k.$$

Mit (*):

$$\sum_k \ddot{c}_k(t) \vec{v}_k(t) = \lambda_k c_k(t) \vec{v}_k \iff \ddot{c}_k(t) = \lambda_k c_k(t) \quad k=1, \dots, N$$

N entkoppelte lineare 1-D Gleichungen!! ("Leichter wirds nicht.")

Nehme nun an, dass alle $\lambda_k < 0$ sind. (Andere Fälle \rightarrow ü-Zettel).

Setze

$$\lambda_k = -\omega_k^2.$$

$$\Rightarrow \forall a_k, b_k \in \mathbb{C}, \quad c_k = a_k e^{i\omega_k t} + b_k e^{-i\omega_k t} \quad \text{löst B/W/Gl.}$$

$$= (a_k + b_k) \cos(\omega_k t) + i(a_k - b_k) \sin(\omega_k t)$$

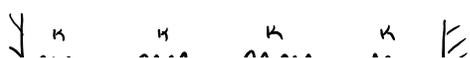
harmonische Schwingungen.

\rightarrow 2 unabhängige Lsg. für jede der N DGL 2. Ordnung. \rightarrow Dies sind alle Lsg. \checkmark

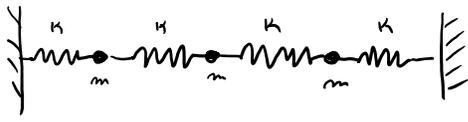
\rightarrow Die \vec{v}_k heißen Normalmoden.

Einzigste "Schwierigkeit": Finde Normalmoden = Eigenbasis von M .

Bsp.: Harmonische Kette



N gekoppelte Massen m im 1-D.



N gekoppelte Massen m in 1-D.

Hookesche Gesetz:



$$f_j(\vec{\delta}) = \frac{1}{m} (k(\delta_{j-1} - \delta_j) - k(\delta_j - \delta_{j+1}))$$

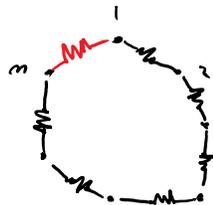
$$= \frac{k}{m} (\delta_{j-1} - 2\delta_j + \delta_{j+1})$$

$$\Rightarrow M = \frac{k}{m} \begin{bmatrix} -2 & 1 & & & \\ 1 & -2 & 1 & & \\ & 1 & -2 & 1 & \\ & & \ddots & \ddots & \ddots \\ & & & 1 & -2 \\ & & & & 1 & -2 \end{bmatrix}$$

M kann explizit diagonalisiert werden. Hier rechnen wir zwei Varianten, die besonders leicht sind:

① Zyklische Randbedingungen

Vernachlässige Randeffekte,
durch Kopplung der 1.
mit der N Masse.



$$M = \frac{k}{m} \begin{bmatrix} -2 & 1 & & & -1 \\ 1 & -2 & 1 & & \\ & 1 & -2 & 1 & \\ & & \ddots & \ddots & \ddots \\ & & & 1 & -2 \\ -1 & & & & 1 & -2 \end{bmatrix}$$

$\Rightarrow M$ ist zyklische Matrix: $M_{ji} = g(i-j \bmod N)$.

$$\mathbb{Z}: \begin{array}{|c|c|c|c|c|c|c|} \hline \dots & N-2 & N-1 & 0 & 1 & 2 & \dots & N-1 & N & N+1 & \dots \\ \hline \end{array}$$

$$\downarrow \bmod N$$

$$\mathbb{Z}_N: \begin{array}{|c|c|c|c|c|c|c|} \hline \dots & N-2 & N-1 & 0 & 1 & 2 & \dots & -1 & 0 & 1 & \dots \\ \hline \end{array}$$

Hier:

| | | | | | | | |
|--------------------------|-----------|----|---|---|-----|-------|-------|
| $\frac{m}{k} g(\lambda)$ | λ | 0 | 1 | 2 | ... | $N-2$ | $N-1$ |
| | | -2 | 1 | 0 | ... | 0 | 1 |

Zyklische Matrizen können durch (diskrete) Fourier-Transforme diag. werden.

Def.:

\vec{b}_k Vektor mit Elementen $(b_k)_j = e^{\frac{2\pi i}{N} k \cdot j} / \sqrt{N}$.

$\Rightarrow \{ \vec{b}_k \}_{k=0}^{m-1}$ ist die (diskrete) Fourier-Basis.

Beh.: Sei M zyklische Matrix. Dann:

① Eigenbasis von $M =$ Fourier-Basis.

$$M \vec{b}_k = \lambda_k \vec{b}_k$$

② Eigenwerte sind die Fourier-Transforme von g :

$$\lambda_k = \hat{g}(k) = \frac{1}{\sqrt{N}} \sum_l g(l) e^{\frac{2\pi i}{N} k l}$$

Für harmonische Kette: $\lambda_k = \hat{g}(k) = \left(-2 + 1 \cdot e^{\frac{2\pi i}{N} k} + 1 \cdot e^{\frac{2\pi i}{N} k(N-1)} \right) \cdot \frac{1}{m}$

$$= 2 \cos\left(k \frac{2\pi}{N}\right)$$

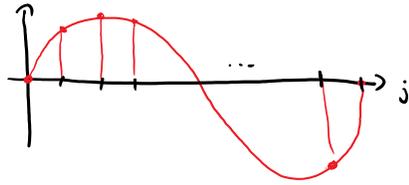
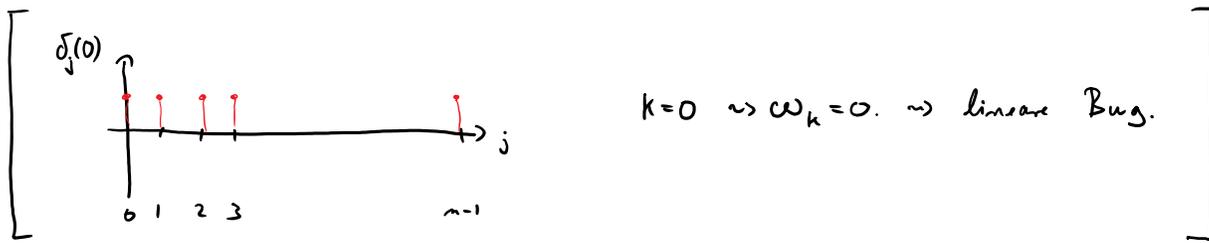
$$= \frac{2k}{m} \left(\cos\left(k \frac{2\pi}{N}\right) - 1 \right)$$

$$\left(\begin{array}{l} \xrightarrow[n \rightarrow \infty]{k \ll m} -\frac{1}{m} \left(k \frac{2\pi}{N} \right)^2 \\ \rightarrow \text{Dispersionsrelation} \quad \omega_k \approx \sqrt{\frac{k}{m}} k \frac{2\pi}{N} \\ \begin{array}{cc} \uparrow & \uparrow \\ \text{Frequenz} & \text{"Wellenzahl"} \end{array} \end{array} \right) \begin{array}{l} \text{"Gitterkonstante"} \\ \downarrow \end{array}$$

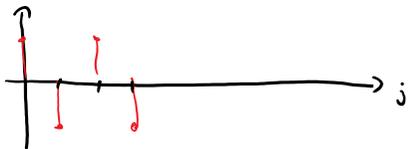
Da $\lambda_k = \lambda_{-k} \Rightarrow$ kann auch folgende Eigenvektoren wählen:

$$\frac{1}{2} \left(\vec{b}_k + \vec{b}_{-k} \right)_j = \cos\left(j \cdot k \frac{2\pi}{N}\right), \quad \frac{1}{2i} \left(\vec{b}_k - \vec{b}_{-k} \right)_j = \sin\left(j \cdot k \frac{2\pi}{N}\right).$$

\Rightarrow reelle, harmonische Eigenmoden. "Stehende Wellen".



⋮



Bew.: [der Behauptung zu zyklischen Matrizen]

$$\begin{aligned}
 (M \vec{b}_k)_j &= \frac{1}{\sqrt{N}} \sum_i M_{ji} e^{\frac{2\pi i}{N} k \cdot i} \\
 &= \frac{1}{\sqrt{N}} \sum_i \underbrace{g(i-j \bmod N)}_{=: l} e^{\frac{2\pi i}{N} k \cdot i} \\
 &\quad \Rightarrow i = l+j \bmod N \\
 &= \frac{1}{\sqrt{N}} \sum_l g(l) e^{\frac{2\pi i}{N} k(l+j)} \\
 &= \underbrace{e^{\frac{2\pi i}{N} k \cdot j}}_{(b_k)_j} \underbrace{\sum_l g(l) e^{\frac{2\pi i}{N} k \cdot l}}_{=\hat{g}(k)}.
 \end{aligned}$$

□

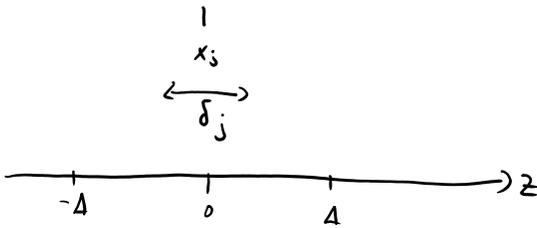
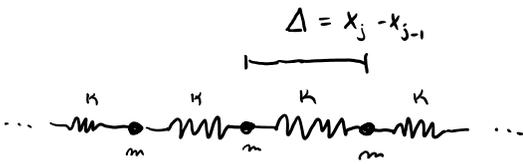
② Kontinuumslimit

$$\Delta = x_j - x_{j-1}$$

Für $z \in \mathbb{R}$, setze

$$\delta(z) = \Delta$$

"1. Ordnung"



für $z \in \mathbb{K}$, setze

$$\delta(z) = \delta_{\lfloor z/\Delta \rfloor} \quad \text{"Verschiebungsfeld"}$$

BW Gl.:

$$m \frac{d^2}{dt^2} \delta(z, t) = k (\delta(z-\Delta) - 2\delta(z) + \delta(z+\Delta))$$

$$\Rightarrow \frac{m}{4} \frac{d^2}{dt^2} \delta(z, t) = (k\Delta) \frac{\frac{\delta(z+\Delta) - \delta(z)}{\Delta} - \frac{\delta(z) - \delta(z-\Delta)}{\Delta}}{\Delta}$$

$$\xrightarrow{\Delta \rightarrow 0} \rho \frac{d^2}{dt^2} \delta(z, t) = E \frac{d^2}{dz^2} \delta(z, t)$$

Massendichte: $\frac{m}{4} \rightarrow \rho$

Elastizitätsmodul: $k\Delta \rightarrow E$

$$\Leftrightarrow \left[\frac{d^2}{dt^2} - \frac{E}{\rho} \frac{d^2}{dz^2} \right] \delta = 0.$$

Lösungen: $\delta_k(z, t) = e^{i(kz - \omega t)} \quad \omega(k) = \sqrt{\frac{E}{\rho}} k \quad (\text{vergleiche oben})$

Anwendung: Klangfarbe einer Gitarrensaiten.

→ FEMTO-Projekt.

Variationsrechnung

Ein Funktional ist eine Funktion, die jeder Bahnkurve $\vec{q}(\cdot): [t_0, t_1] \rightarrow \mathbb{R}^N$ eine Zahl zuordnet.

Wir interessieren uns nur für Funktionale, die "Integralform" haben - nämlich so:

Wähle eine Lagrange-Fkt.

$$L: \mathbb{R}^N \times \mathbb{R}^N \times \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R},$$

$$L(\vec{x}, \vec{v}, t) \in \mathbb{R},$$

\uparrow \uparrow \nwarrow
 "Ort" "Geschwindigkeit" "Zeit"

Jedes L definiert ein Wirkungsfunktional

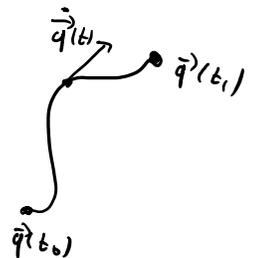
$$S[\vec{q}(\cdot)] := \int_{t_0}^{t_1} L(\vec{q}(t), \dot{\vec{q}}(t), t) dt.$$

Bsp.: Bogenlänge

$$L(\vec{x}, \vec{v}, t) = \|\vec{v}\|$$

$$\rightarrow S[\vec{q}(\cdot)] = \int_{t_0}^{t_1} L(\vec{q}(t), \dot{\vec{q}}(t), t) dt$$

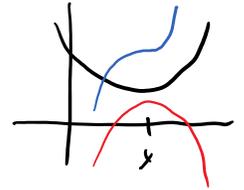
$$= \int_{t_0}^{t_1} \|\dot{\vec{q}}(t)\| dt = \text{Länge der Kurve.}$$



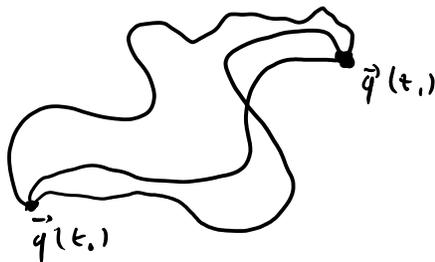
Eine natürliche Frage ist, bei welchen Bahnen die Wirkung stationär ist.

In der 1-D Analysis ist Fkt. $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ stationär bei x wenn $f'(x) = \left. \frac{d}{dx} \right|_x f(x+\epsilon) = 0$.

Dies entspricht lokalem Minimum / Max. / Wendepunkt.

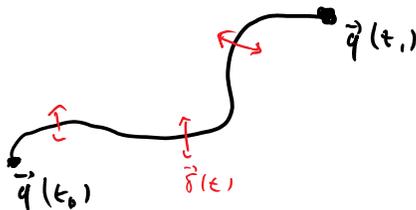


Für Funktionen ist Def.-Bereich nicht \mathbb{R} , sondern Mengen aller Bahnen, die zu Zeiten t_0, t_1 an gegebenen Orten $\vec{q}(t_0), \vec{q}(t_1)$ sind.



Grob gesprochen:

S' ist bei $\vec{q}(\cdot)$ stationär, wenn "die Wirkung unter kleinen Variationen der Bahn unverändert bleibt".



Präzise:

Def.: $\vec{q}(\cdot)$ ist stationär, wenn für alle Variationen $\vec{\delta}: [t_0, t_1] \rightarrow \mathbb{R}^N$, $\vec{\delta}(t_0) = \vec{\delta}(t_1) = 0$ gilt:

$$d \left[\int_{t_0}^{t_1} L(\vec{q}, \dot{\vec{q}}, t) dt \right] = 0$$

Def.: $\vec{q}(\cdot)$ ist stationär, wenn für alle Variationen $\delta: [t_0, t_1] \rightarrow \mathbb{R}^n$, $\delta(t_0) = \delta(t_1) = 0$ gilt:

$$\frac{d}{d\varepsilon} \bigg|_{\varepsilon=0} S[\vec{q}(\cdot) + \varepsilon \vec{\delta}(\cdot)] = 0.$$

Wie kann man feststellen, ob $\vec{q}(\cdot)$ stationär ist? Dazu:

$$\begin{aligned} \frac{d}{d\varepsilon} \bigg|_{\varepsilon=0} S[\vec{q}(\cdot) + \varepsilon \vec{\delta}(\cdot)] &= \frac{d}{d\varepsilon} \bigg|_{\varepsilon=0} \int_{t_0}^{t_1} L(\vec{q}(t) + \varepsilon \vec{\delta}(t), \dot{\vec{q}}(t) + \varepsilon \dot{\vec{\delta}}(t), t) dt \\ &= \int_{t_0}^{t_1} \left[\sum_j \frac{\partial L}{\partial q_j}(\vec{q}(t), \dot{\vec{q}}(t), t) \delta_j(t) + \sum_j \underbrace{\frac{\partial L}{\partial \dot{q}_j}(\vec{q}(t), \dot{\vec{q}}(t), t) \dot{\delta}_j(t)}_{=: \frac{\partial L}{\partial \dot{q}_j}} \right] dt \\ &= \int_{t_0}^{t_1} \sum_j \left(\frac{\partial L}{\partial q_j} - \frac{d}{dt} \frac{\partial L}{\partial \dot{q}_j} \right) \delta_j dt \stackrel{!}{=} 0 \quad \forall \vec{\delta}(t). \end{aligned}$$

partielle Integration, $\vec{\delta}(t_0) = \vec{\delta}(t_1) = 0$

(ELG)

$$\forall j: \frac{\partial L}{\partial q_j} - \frac{d}{dt} \frac{\partial L}{\partial \dot{q}_j} = 0$$

Euler-Lagrange-Gleichung

Beweis [der Äquivalenz]:

" \Leftarrow " Trivial.

" \Rightarrow " Nehme an $\exists \delta_j$ s.d. (ELG) bei δ_j verletzt ist.

Sei $g(t)$ beliebige Fkt., s.d.

$$g(t) > 0, \quad g(t_0) = g(t_1) = 0, \quad g(t') = 1.$$

$$\text{Setze: } \delta_j = \left(\frac{\partial L}{\partial q_j} - \frac{d}{dt} \frac{\partial L}{\partial \dot{q}_j} \right) g \quad \delta_j = 0 \quad j \neq j'$$

Dann folgt:

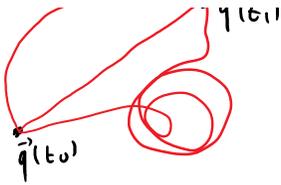
$$\frac{d}{d\varepsilon} \bigg|_{\varepsilon=0} S[\vec{q}(\cdot) + \varepsilon \vec{\delta}(\cdot)] > 0. \quad \square$$

Bsp.: Bogenlänge

$$L(\vec{x}, \vec{v}, t) = \|\vec{v}\|.$$

Gegeben zwei Pkt. $\vec{q}(t_0), \vec{q}(t_1)$, welche Kurven zwischen ihnen sind wohl stationär



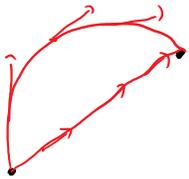


Kurven zwischen ihnen sind wohl stationär für die Bogenlänge?

$$ELG: \quad \frac{d}{dt} \frac{\partial L}{\partial \dot{r}_i} = \frac{d}{dt} \frac{\dot{r}_i}{\|\dot{r}\|} = 0 \quad \forall i=1, \dots, N$$

$$\Rightarrow \frac{d}{dt} \frac{\dot{q}(t)}{\|\dot{q}(t)\|} = 0 \quad \Leftrightarrow \text{Richtung der Tangente ist konstant}$$

$\Leftrightarrow \vec{q}(\bar{t}_0, t, \bar{t})$ ist Gerade (nicht notw. gleichförmig durchlaufen).



Kurven mit stationärer Länge heißen Geodäten. Wir haben gezeigt, dass die Menge der Geodäten im Euklidischen Raum genau die Menge der Gerade ist. Also nicht sehr interessant. Bald werden wir auch Geodäten auf der Sphäre ausrechnen - vielleicht etwas interessanter.

Geodäten auf gekrümmten Geometrien spielen in der Allgemeinen Relativitätstheorie eine große Rolle. Dort bewegen sich Teilchen (und z.B. Licht) in Abwesenheit nicht-gravitativer Kräfte auf Geodäten der Raumzeit. Sowohl Licht, das durch ein schwarzes Loch abgelenkt wird, wie auch ein Ball, der entlang einer Parabel fliegt, folgen also - von der richtigen Geometrie aus betrachtet - stationären Kurven. Dies verallgemeinert die "geradlinige, gleichförmige" Bewegung Newtons.

Zurück zur Mechanik

Für mechanische Systeme mit Potentialkräften, sind die Lsg. der Newton-Gleichungen = den stationären Kurven der Wirkung, die durch die Lagrange-Fkt.

$$L(\vec{r}, \dot{\vec{r}}) = T(\dot{\vec{r}}) - V(\vec{r}) \quad (\text{"natürliche Form"})$$

definiert wird.

Genaue:

Genaue: Betrachte System mit N Freiheitsgraden

$$m_j \ddot{r}_j = F_j(\vec{r}, \dot{\vec{r}}) \quad j=1, \dots, N$$

$$\vec{F} = -\vec{\nabla} V(\vec{r})$$

$$T = \sum_j m_j \dot{r}_j^2.$$

Mit

$$L(\vec{r}, \dot{\vec{r}}) = T(\dot{\vec{r}}) - V(\vec{r}).$$

$$\leadsto \frac{\partial L}{\partial r_j} = -\frac{\partial V}{\partial r_j} = F_j, \quad \frac{\partial L}{\partial \dot{r}_j} = \frac{\partial T}{\partial \dot{r}_j} = \frac{\partial}{\partial \dot{r}_j} \frac{1}{2} \sum_K m_K \dot{r}_K^2 = m_j \dot{r}_j$$

$$\leadsto (\text{ELG}) \Leftrightarrow m_j \ddot{r}_j = \vec{F}_j \quad \text{Newton-Gleichung!}$$

Anmerkungen zu all dem:

Notation:

- Da in der Physik eine Fkt. $\vec{r}(\cdot)$ und ihre Werte \vec{r} notationell nicht unterschieden werden, nutzt man manchmal eckige Klammern, um anzuzeigen, dass das Argument als Fkt. interpretiert werden soll: $S'[\vec{r}]$.
- Der Ausdruck

$$\frac{\partial L}{\partial r_j} - \frac{d}{dt} \frac{\partial L}{\partial \dot{r}_j} =: \frac{\delta L}{\delta r_j}$$

wird manchmal Funktionalableitung genannt und so abgekürzt.

Auch manchmal: Det. des (Funktional-) Differential

$$\delta S': \quad \vec{r}(\cdot) \mapsto \int_{t_0}^{t_1} \sum_j \frac{\delta L}{\delta r_j}(\vec{r}(t), \dot{\vec{r}}(t), t) \cdot \delta r_j(t) dt$$

$$\leadsto S' \text{ ist stationär bei } \vec{r}(\cdot) \Leftrightarrow \delta S'[\vec{r}(\cdot)] = 0.$$

- Der Ausdruck $\frac{\partial L}{\partial \dot{r}_j}$ sorgt oft für Verwirrung. Soll man nicht "nach Variablen" ableiten? Ist r_j eine Variable?

Die Notation fasst zwei Schritte zusammen: ① Bilden der Ableitung,

② Auswerten der Ableitung an einem Punkt. Genauer:

Gegeben $L: \mathbb{R}^N \times \mathbb{R}^N \times \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$,

definiere $(D^{(N+j)} L): \mathbb{R}^N \times \mathbb{R}^N \times \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ als die Fkt., die man durch Ableiten von L nach dem $(N+j)$ -ten Argument erhält.

Gegeben zusätzlich $\vec{r}: [t_0, t_1] \rightarrow \mathbb{R}^N$, betrachte Fkt. $[t_0, t_1] \rightarrow \mathbb{R}$:

$$t \mapsto \underbrace{\left(D^{(N+j)} L \right) \left(\vec{r}(t), \dot{\vec{r}}(t), t \right)}_{\text{Abgekürzt als } \frac{\partial L}{\partial \dot{r}_j}} \in \mathbb{R}$$

Interpretation:

- Das Prinzip der stationären Wirkung wurde früher (und manchmal heute noch) "Prinzip der minimalen Wirkung" genannt. Die mathematischen Bedingungen die wir gestellt haben, sind aber auch mit einem Sattelpunkt oder einem Maximum verträglich (auch wenn man sich überlegen kann, dass Maxima für mechanische Lagrange-Funktionen der Form $L=T-U$ nicht vorkommen können (warum?)).
- Viele technische Begriffe der Mechanik werden durch Worte bezeichnet, die auch eine umgangssprachliche Bedeutung haben. In der Regel passt diese zur technischen Definition (Kraft, Leistung, Energie). Es ist etwas unglücklich, dass die Funktion $S[\]$ auch einen Namen hat (Wirkung), der eine intuitive Interpretation suggeriert. Eine solche gibt es nämlich nicht. Schon, weil der Zahlenwert $S[r]$ völlig irrelevant ist - nur die funktionale Abhängigkeit von S von $r(t)$ geht in die Rechnung ein.
- Historisch (und zum Teil bis heute) wird dem Prinzip der stationären Wirkung manchmal eine fast mystische Bedeutung zugeschrieben. Was ist die Interpretation? Warum geht die Natur mit Wirkung sparsam um? Was bedeutet es, dass der Endpunkt festgehalten wird (vergl. "Teleologie"). Diese Diskussion scheint nicht immer produktiv zu sein...
- Das Prinzip der stationären Wirkung passt gut zur Pfadintegral-Formulierung der Quantenmechanik. (Manche Leute sagen, Pfadintegrale "erklären" das Prinzip. Ich bin mir nicht sicher, was das genau heißen soll... Die Newtongleichungen kann man auch als Grenzfall der quantenmechanischen Schrödingergleichung erhalten. Ich habe aber noch nie gehört, dass jemand gesagt hat, die Schrödingergleichung erklärt Newton.)
- Variationsprinzipien tauchen auch in anderen Bereichen der Physik auf. Z.B. das Fermatsche Prinzip in der Optik. Alle bekannten fundamentalen Naturgesetze können mit passenden Lagrange-funktionen aus dem Prinzip der stationären Wirkung abgeleitet werden! Die fundamentalen Lagrange-funktionen sind häufig besonders einfach. Ein spektakulärer Fall sind die (komplizierten) Einsteinschen Feldgleichungen der Allgemeinen Relativitätstheorie, die aus der wohl einfachsten denkbaren Wirkung folgen, die der Geometrie des Problems angepasst ist

(Einstein-Hilbert-Wirkung). Freuen Sie sich auf die Vorlesung im Master-Studium!
Auf die Frage, warum das Prinzip so gut funktioniert, habe ich keine Antwort.

- Auf die Frage, warum diese Formulierung so beliebt ist, gibt es hingegen viele Antworten. Zum einen ist das Prinzip - wie wir gleich sehen werden - koordinatenunabhängig. Wir werden zeigen, dass die ELG daher auch in krummlinigen Koordinatensystemen gelten, was praktisch ein großer Vorteil sein kann. Darüber hinaus ist es oft einfacher mit skalaren Funktionen zu arbeiten (also der Lagrangefunktion) als mit den resultierenden Gleichungssystemen. Wenn zum Beispiel die Symmetrien eines physikalischen Systems bekannt sind, ist es leichter, eine entsprechend symmetrische Lagrangefunktion zu raten, als direkt ein gleichermaßen symmetrisches Gleichungssystem.

In der Physik ist die Notation für effizientes Rechnen optimiert. In der Mathematik bevorzugt man eine Notation, die die geometrische Interpretation der Objekte in den Vordergrund stellt.

Beide Herangehensweisen haben ihre Berechtigung. Idealerweise versteht man sie beide - oder zumindest eine gut, und die andere in Ansätzen.

In dieser VL benutzen wir die physikalisch übliche Notation. Einige Konzepte sind aber viel leichter zu verstehen, wenn man die Grundideen der mathematischen Begriffsbildung kennt. (Beispiele: Warum ist die Euler-Lagrange-Gleichung koordinatenunabhängig? Was ist genau mit \vec{r} gemeint - ein Punkt, eine Funktion der Zeit, eine Funktion anderer Koordinaten? Frage aus der VL: Was ist der Unterschied zwischen einer "Invariante" und einer "Konstante"?).

In diesem Kapitel werde ich versuchen, ein erstes Gefühl für die mathematische Konvention zu vermitteln. Wer das hilfreich findet, dem empfehle ich das Büchlein "Vektoranalysis" von Jänich. Einige werden von diesem Kapitel eher noch mehr verwirrt sein. Kein Problem - alles hier ist optional und wird im Folgenden nicht als Wissen vorausgesetzt.

Physik

\vec{r} kann sein:

- (1) Ein Punkt im Raum: $\vec{r} \in \mathbb{R}^3$
- (2) Eine Bahnkurve: $\vec{r}: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}^3, t \mapsto \vec{r}(t)$
- (3) Ein Koordinatenwechsel. z. B.: $\vec{r}: \mathbb{R}_+ \times [0, \pi) \times [0, 2\pi) \rightarrow \mathbb{R}^3$

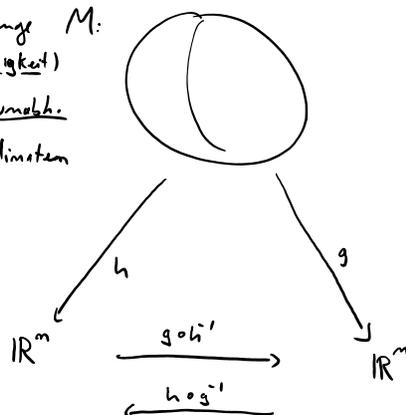
$$\begin{pmatrix} r \\ \vartheta \\ \phi \end{pmatrix} \mapsto r \begin{pmatrix} \sin \vartheta \cos \phi \\ \sin \vartheta \sin \phi \\ \cos \vartheta \end{pmatrix} = \vec{r}(r, \vartheta, \phi)$$

(4) Ein Variablenname: $V = V(\vec{r}), \frac{\partial V}{\partial r_j}$.

⋮

Mathematik

Punktmenge M :
 (Mannigfaltigkeit)
 Existiert unabh.
 von Koordinaten



"die Erde" $\leadsto m=3$

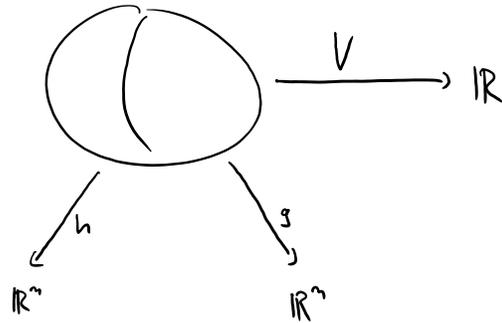
Koordinatenfunktionen

$$h: M \rightarrow \mathbb{R}^m \quad m \mapsto h(m) \in \mathbb{R}^m$$

Bsp: h : Kartesische Koordinaten

g : Kugelkoordinaten

Koordinatenwechsel



(abstrakte) skalare Fkt.

$$V: M \rightarrow \mathbb{R}$$

$$m \mapsto V(m)$$

Beg. Koordinaten:

$$V_h = V \circ h^{-1}, V_g = V \circ g^{-1}, \dots$$

Transformations eigenschaften:

$$V_h = V_g \circ (g \circ h^{-1}).$$

(abstrakte)

Bahnkurven

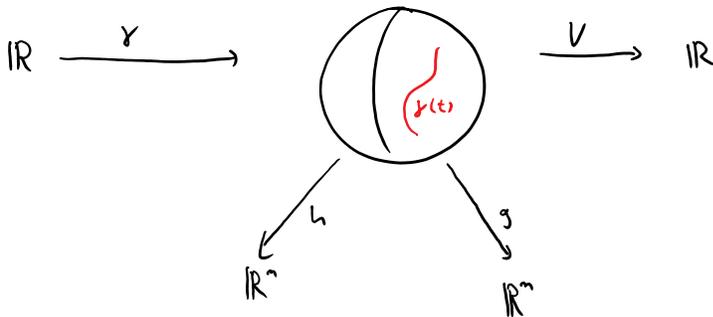
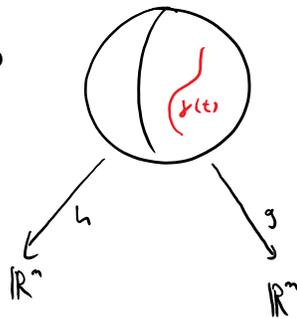
$$\mathbb{R} \xrightarrow{\gamma} M$$

$$t \mapsto \gamma(t) \in M$$

$$\gamma_h(t) = h \circ \gamma(t)$$

$$\gamma_g(t) = g \circ \gamma(t)$$

$$\gamma_h(t) = (h \circ g^{-1}) \circ \gamma_g(t)$$



Skalare Fkt., ausgewertet entlang einer Bahnkurve

$$V \circ \gamma: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}.$$

Komplett koordinatenfrei! ;)

[Oder, schwieriger, in Koordinaten:

$$V \circ \gamma = V \circ (h^{-1} \circ h) \circ \gamma$$

$$= V_h \circ \gamma_h$$

- V ist hervorsteht von γ , wenn $\frac{d}{dt} V \circ \gamma(t) = 0$.
(also, wenn $V(\gamma(t)) \in \mathbb{R}$ eine Konstante ist).

Zu zusammenfassung:

Zusammenfassung:

Es gibt zwei große Unterschiede:

- In der Notation der Physik wird nicht deutlich zwischen einer Funktion und ihrem Wert unterschieden. Also: Punkte, Koordinatenfunktionen, Bahnkurven, Koordinatenwechsel usw. bekommen alle das gleiche Symbol, nämlich r .
- In der Physik gibt es keine Möglichkeit, über abstrakte Objekte (Punkte, Kurven, skalare Funktionen) unabhängig von einer Koordinatendarstellung zu reden.

Daher fallen in der physikalischen Notation viele Konzepte zusammen, die in der Mathematik auseinandergehalten werden. Die Tabelle unten gibt einige Beispiele.

| Math. | Physik | |
|---|---------------------------------------|--|
| $m \in M$ | \vec{r} | Punkt im Raum |
| $h: M \rightarrow \mathbb{R}^n$ | \vec{r} | Koordinatenfunktion |
| $g: M \rightarrow \mathbb{R}^n$ | \vec{r}' | anderer " |
| | \vec{q} | " " (wenn sie nicht linear von \vec{r} abhängt). |
| $x = h(m) \in \mathbb{R}^n$ | \vec{r} | Koordinaten eines Punktes |
| $\gamma: \mathbb{R} \rightarrow M$ | $\vec{r}, \vec{r}(t), \vec{r}(\cdot)$ | (Bahn-) Kurve |
| $\gamma(t) \in M$ | $\vec{r}, \vec{r}(t)$ | Punkt auf Bahnkurve |
| $h \circ g^{-1}: \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^n$ | $\vec{r}, \vec{r}(\vec{r}')$ | Koordinatenwechsel |
| | $\vec{r} = \vec{Q}(\vec{r}')$ | " , an guten Tagen. |
| $V: M \rightarrow \mathbb{R}$ | $V, V(\vec{r})$ | skalare Fkt. |
| $V(m) \in \mathbb{R}$ | $V, V(\vec{r})$ | Wert der Fkt. an einem Punkt |

Wir betrachten den \mathbb{R}^N mit kartesischen Koordinaten \vec{r} .

Sei nun $\vec{q}: \mathbb{R}^N \rightarrow \mathbb{R}^N$ eine andere Koordinatenfunktion.

Bsp.:

① $\vec{q}(\vec{r}) = R \vec{r} + \vec{a}$ eine Galileo-Transl.

② $N=2, \vec{r} = \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}$ und

$\vec{q}(\vec{r}) = \begin{pmatrix} \sqrt{x^2+y^2} \\ \arccos \frac{y}{x} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} r \\ \phi \end{pmatrix}$ Polarkoordinaten

Koordinatensysteme, die aus einer nicht-linearen Transformation hervorgehen, heißen in der Mechanik manchmal "verallgemeinerte Koordinaten".

Der Rest der Welt nennt das einfach "Koordinaten".

Koordinaten müssen eindeutig sein - wir verlangen also das Umkehrfkt. $\vec{r}(\vec{q})$ existiert.

Um Uneindeutigkeit des Symbols \vec{r} (z.B. $\vec{r}(\vec{q})$ vs. $\vec{r}(t)$) geringer zu halten, führen wir hier
 $\underbrace{\vec{r}(\vec{q})}_{\text{Koordinatenwechsel}}$ vs. $\underbrace{\vec{r}(t)}_{\text{Bahn}}$

ein explizites Symbol für Koordinatenwechsel ein:

$\vec{\Phi}: \mathbb{R}^N \rightarrow \mathbb{R}^N, \quad \vec{r} = \vec{\Phi}(\vec{q}), \quad \vec{q} = \vec{\Phi}^{-1}(\vec{r}).$

Frage hier: Wie sehen BWGl. bzgl. \vec{q} aus?

In Galileo-VL: Startpunkt waren Newton-Gl.:

$\frac{d^2}{dt^2} \vec{r}(t) = \frac{1}{m} \vec{F}(\vec{r}(t), \dot{\vec{r}}(t), t).$

Dann: setze ein $\vec{r}(t) = \vec{\Phi}(\vec{q}(t)) \rightsquigarrow$ Gl. im \vec{q} .

Dann als ausgenutzt: für offene $\vec{\Phi}$ ist "äußere Abl. trivial":

$$\frac{d}{dt} \vec{\Phi}(\vec{r}(t)) = \vec{\Phi}\left(\frac{d}{dt} \vec{r}(t)\right)$$

Für nicht-lineare $\vec{\Phi}$ ist Rechnung schwieriger:

$$\frac{d}{dt} \vec{\Phi}_i(\vec{r}(t)) = \sum_j \frac{\partial \vec{\Phi}_i}{\partial r_j} \frac{\partial r_j(t)}{\partial t} \dots$$

Im Lagrange-Formalismus sind Koordinatenwechsel natürlicher.

Dazu: schreibe einfach Lagrange-Fkt. um:

$$L(\vec{r}, \dot{\vec{r}}, t) = \underbrace{L_r(\vec{r}, \dot{\vec{r}}, t)}_{\text{sei gegeben.}}$$

Hin: gebe Koord. explizit an.

Dann ist bzgl. \vec{q} :

$$L(\vec{q}, \dot{\vec{q}}, t) = L_q(\vec{q}, \dot{\vec{q}}, t) := L_r\left(\vec{\Phi}(\vec{q}), \frac{d}{dt} \vec{\Phi}(\vec{q}), t\right).$$

Bsp.:

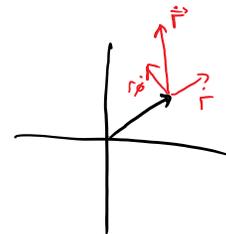
$$N=2, \quad L_r(\vec{r}, \dot{\vec{r}}, t) = T(\dot{\vec{r}}) - V(\vec{r}) = \frac{1}{2} m \|\dot{\vec{r}}\|^2 - c \|\vec{r}\|^2$$

Was ist $L_q\left(\begin{pmatrix} r \\ \phi \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} \dot{r} \\ \dot{\phi} \end{pmatrix}, t\right)$?

$$\rightarrow V(r, \phi) = x^2 + y^2 = r^2 \cos^2 \phi + r^2 \sin^2 \phi = r^2.$$

$$\frac{d}{dt} \vec{r}(t) = \frac{d}{dt} \begin{bmatrix} r(t) \cos \phi(t) \\ r(t) \sin \phi(t) \end{bmatrix} = \dot{r}(t) \begin{bmatrix} \cos \phi(t) \\ \sin \phi(t) \end{bmatrix} + r(t) \begin{bmatrix} -\sin \phi(t) \\ +\cos \phi(t) \end{bmatrix} \dot{\phi}(t)$$

$$\rightarrow \left\| \frac{d}{dt} \vec{r}(t) \right\|^2 = \dot{r}(t)^2 + r(t)^2 \dot{\phi}(t)^2$$



$$\rightarrow T(r, \dot{\phi}) = \dot{r}^2 + r \dot{\phi}^2$$

$$\rightarrow L_q(\vec{q}, \dot{\vec{q}}) = L(r, \phi, \dot{r}, \dot{\phi}) = \frac{1}{2} m (\dot{r}^2 + r \dot{\phi}^2) - r^2$$

$$L \rightarrow L_q(\vec{q}, \dot{\vec{q}}) = L(r, \phi, \dot{r}, \dot{\phi}) = \frac{1}{2} m (\dot{r}^2 + r \dot{\phi}^2) - r^2$$

Sei nun $\vec{r}(\cdot): [t_0, t_1] \rightarrow \mathbb{R}^N$ eine Bahn, und

$\vec{q}(\cdot) = \Phi^{-1}(\vec{r}(\cdot)): [t_0, t_1] \rightarrow \mathbb{R}^N$ die gleiche Bahn
im \vec{q} -Koordinaten.

Nach Konstruktion ist

$$L(\vec{r}(t), \dot{\vec{r}}(t), t) = L(\vec{q}(t), \dot{\vec{q}}(t), t),$$

der Wert von L zur Zeit t ist also unabh. vom Koordinatensystem definiert. \leadsto Das gleiche gilt für die Wirkung:

$$\begin{aligned} S'_{L_r}[\vec{r}(\cdot)] &= \int_{t_0}^{t_1} L_r(\vec{r}(t), \dot{\vec{r}}(t), t) dt \\ &= \int_{t_0}^{t_1} L_q(\vec{q}(t), \dot{\vec{q}}(t), t) dt = S'_{L_q}[\vec{q}(\cdot)]. \end{aligned}$$

Das gilt insbesondere auch für Variationen. (TBD: genau!)

Daraus folgt:

| |
|--|
| $\vec{r}(\cdot)$ ist bzgl. $S'_{L_r}[\cdot]$ stationär |
| $\Leftrightarrow \vec{q}(\cdot)$ ist " $S'_{L_q}[\cdot]$ " |

\Rightarrow BW Gl. für $\vec{q}(\cdot)$ sind einfach durch ELG

gegeben:

$$\frac{\partial L_q}{\partial q_i} - \frac{d}{dt} \frac{\partial L_q}{\partial \dot{q}_i} = 0$$

Bsp.: (wie oben) $L(\vec{q}, \dot{\vec{q}}) = L(r, \phi, \dot{r}, \dot{\phi}) = \frac{1}{2} m (\dot{r}^2 + r \dot{\phi}^2) - \frac{GMm}{r}$

• Für $q_2 = \phi$:

$$\frac{\partial L}{\partial \phi} = 0 \quad \leadsto \quad \phi \text{ ist zyklisch!}$$

$\Rightarrow \frac{\partial L}{\partial \dot{\phi}} = m \dot{\phi} r$ erhalten \leadsto 2. Keplersches Gesetz!

• Für $q_1 = r$:

$$\frac{\partial L}{\partial r} = \frac{1}{2} m r \dot{\phi}^2 - \frac{GMm}{r^2} \quad \frac{\partial L}{\partial \dot{r}} = m \dot{r} \quad (\text{Impuls})$$

$$\Rightarrow \frac{1}{2} m r \dot{\phi}^2 - \frac{GMm}{r^2} = m \dot{r}$$

\leadsto Allgemeines Rezept für Lag.-Mechanik:

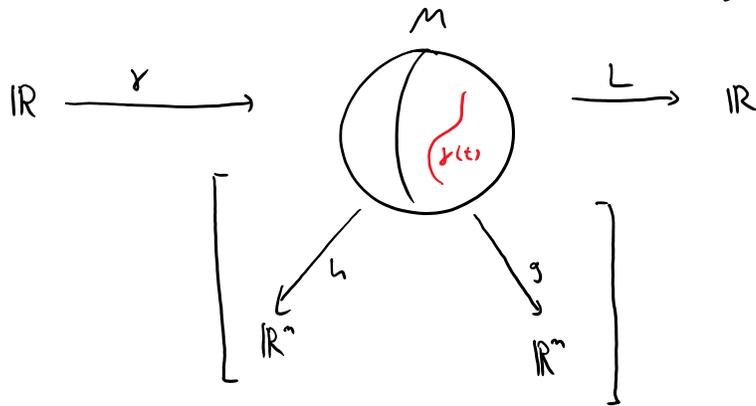
① Wähle bevorzugtes Koordinatensystem \vec{q} .

② Drücke T, V bzgl. \vec{q} aus \leadsto Lagrange-Fkt. $L(\vec{q}, \dot{\vec{q}}, t)$
(Oder, wenn Gesetze nicht bekannt sind, postuliere L).
("rate")

③ ELG: $\frac{\partial L}{\partial q_i} - \frac{d}{dt} \frac{\partial L}{\partial \dot{q}_i} = 0$.

Anm.: In der math. Sprache der letzten VL kann man die Wirkung - und daher auch das Stationaritätspr. - ganz ohne Bezugnahme auf Koordinaten ausdrücken:

$$\gamma(t) = (\vec{q}(t), \dot{\vec{q}}(t)) \quad (\text{"Tangentenbündel"})$$



$$S[\gamma] = \int L(\gamma(t), t) dt$$

$$= \int L(h^i h_i(t), t) dt$$

$$= \int L_h(\gamma_h(t), t) dt$$

$$= \int L_g(\gamma_g(t), t) dt$$

Für genauere Behandlung müsste man besprechen, wie man Tangentenvektoren koordinatenfrei behandelt. Das können wir hier nicht leisten.

Wir interessieren uns für Teilchen, deren Aufenthaltsort durch "Zwangsbedingungen" eingeschränkt ist.

Bsp.:

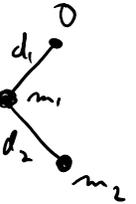
①

$F = m \cdot g$
↓



Pendel: Gewicht, das an Stange der Länge d am festen Punkt O angebracht ist. Im \mathbb{R}^2 oder \mathbb{R}^3 .

Oder als Doppelpendel:



②

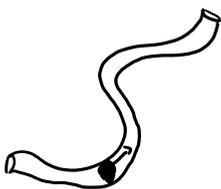


(wichtig!)

Starrer Körper: System von Masspunkten m_i bei $\vec{r}_i(t)$ mit Verbindungsvektoren $\vec{d}_{ij}(t) = \vec{r}_j - \vec{r}_i$. Wir verlangen, dass Längen von, und Winkel zwischen \vec{d}_{ij} 's konstant sind. Also:

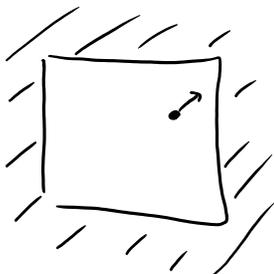
$$(\vec{d}_{ij}, \vec{d}_{ij}) = \text{const.}$$

③



Erbsen in einem festen Rohr

④

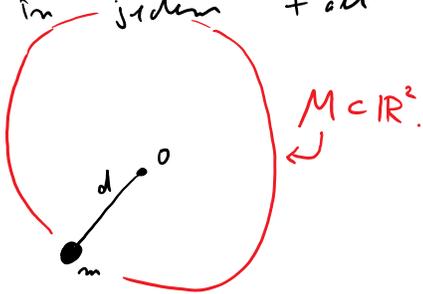


Teilchen im Kasten

...

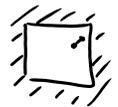
Die Menge der zulässigen Konfigurationen ist

in jedem Fall \sim eine Untermenge $\vec{r} \in M \subset \mathbb{R}^N$.



Wir schränken uns auf den Fall ein, dass M randlos (und "hinreichend glatt") ist. \leadsto "Holomorphe Zwangsbedingungen"

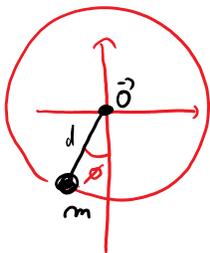
Beispiele ①-③ sind holomorph, ④ nicht.



Zwei Herangehensweisen

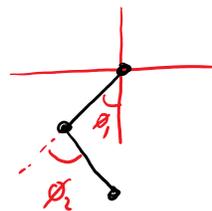
① "Axiomatisch"

Wir wählen Koordinaten $\vec{q} = \begin{pmatrix} q_1 \\ \vdots \\ q_m \end{pmatrix}$ auf M . D.h. wir identifizieren eine minimale Menge an Parametern, die gültige Konfigurationen eindeutig festlegt. Oft, aber nicht immer, gibt es "natürliche" Wahl:



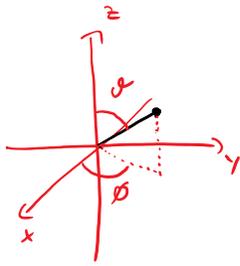
Pendel im \mathbb{R}^2 :
 $m=1$, $M = \text{Kreis}$ mit
 Radius d , $q_1 = \phi$.

Doppelpendel im \mathbb{R}^2



$m=2$
 $q_1 = \phi_1$, $q_2 = \phi_2$
 $(M = \text{Torus} \subset \mathbb{R}^4)$

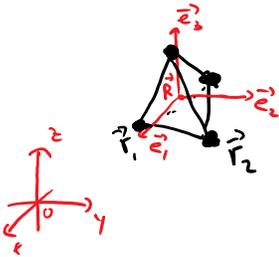
Pendel im \mathbb{R}^3
 \approx



$m = 2$
 $q_1 = \phi, q_2 = \psi$
 "Kugelkoordinaten"
 $M = \text{Sphäre mit Radius } d.$

Starrer Körper (nicht ganz trivial \rightarrow später mehr)

- Schwerpunkt: $\vec{R} = \frac{1}{M} \sum_j m_j \vec{r}_j \rightarrow$ gibt 3 Parameter
- Für festes \vec{R} kann man den Körper noch drehen.
 Erinnerung: Drehung wird durch $\vec{\omega} \in \mathbb{R}^3$ beschrieben:



$\frac{\vec{\omega}}{\|\vec{\omega}\|} \hat{=} \text{Drehachse, } \|\vec{\omega}\| \hat{=} \text{Drehwinkel. } \rightarrow 3 \text{ Parameter}$

$\Rightarrow m = 6, \quad \vec{q} = (\vec{R}, \vec{\omega}).$

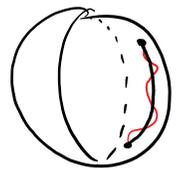
Sei nun $\vec{q}(\cdot): [t_0, t, T] \rightarrow \mathbb{R}^m$ eine Bahn in M

Drücke $L(\vec{q}(t), \dot{\vec{q}}(t), t) = T(\dot{\vec{q}}) - U(\vec{q})$ in \vec{q} -Koordinaten aus.

Dann: Postuliere:

"Eingeschränktes" Stationaritätsprinzip

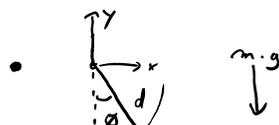
Die physik. Bahnen sind diejenigen, für die die Wirkung eingeschränkt auf Bahnen in M stationär ist.



Also: $\frac{d}{dt} \Big|_{t=0} \int_{t_0}^{t_1} [\vec{q}(\cdot) + \underbrace{\varepsilon \vec{\delta}(\cdot)}_{\vec{\delta}(t) \in \mathbb{R}^m \neq \mathbb{R}^N!}] = 0 \quad \forall \text{ Variation } \vec{\delta} \text{ in } M$

$(\Rightarrow) \frac{\partial L}{\partial q_i} - \frac{d}{dt} \frac{\partial L}{\partial \dot{q}_i} = 0 \quad i = 1, \dots, m < N$

Bsp.:



$\vec{r}(\phi) = d \begin{pmatrix} \sin \phi \\ -\cos \phi \end{pmatrix} \rightarrow \dot{\vec{r}} = d \begin{pmatrix} \cos \phi \\ \sin \phi \end{pmatrix} \dot{\phi}$

$\|\dot{\vec{r}}\|^2 = \dots \quad T(\dot{\vec{r}}) = \dots$



$$\vec{r}(\phi) = d \begin{pmatrix} \sin \phi \\ -\cos \phi \end{pmatrix} \quad \leadsto \quad \dot{\vec{r}} = d \begin{pmatrix} \dot{\phi} \cos \phi \\ \dot{\phi} \sin \phi \end{pmatrix}$$

$$\leadsto \|\dot{\vec{r}}\|^2 = d^2 \dot{\phi}^2 \quad \leadsto T(\dot{q}) = T(\dot{\phi}) = \frac{1}{2} m d^2 \dot{\phi}^2$$

$$\leadsto V = m \cdot g \cdot y = -m \cdot g \cdot d \cos \phi$$

$$\Rightarrow L_q(\phi, \dot{\phi}) = \frac{1}{2} m d^2 \dot{\phi}^2 + m g d \cos \phi.$$

$$\stackrel{ELG}{\Rightarrow} \ddot{\phi} = -\frac{g}{d} \sin \phi \quad (\text{"phys. Pendel"})$$

Anm.:

Wenn man das Stationaritätsprinzip als fundamental anerkannt hat, ist die "eingeschränkte Version" offensichtliche natürliche Verallgemeinerung für die Situation mit Zwangsbedingungen.

Ist es beweisbar? Also so, wie das (nicht eingeschränkte) Stationaritätsprinzip beweisbar äquivalent zu den Newtongleichungen für Potentialkräfte ist?

Im Moment können wir nicht an einen Beweis denken, da wir die physikalischen Mechanismen, die die Zwangsbedingungen hervorrufen, noch nicht identifiziert haben. Und oft kann oder möchte man das gar nicht:

Denken Sie an das Gewicht, das an der Stange befestigt ist. Die Steifheit der Stange kann durch die quantenmechanische Behandlung von Festkörpern verstanden werden. Die fundamentalen Kraftgesetze der klassischen Mechanik reichen dafür nicht aus. Daher können wir die Richtigkeit des Prinzips im Allgemeinen hier nicht beweisen.

Und selbst wenn wir es könnte (z.B. durch Einführung effektiver Potentiale, die die quantenmechanische Wechselwirkung der Ionenrümpfe des Festkörpers beschreibt), ist es praktisch nicht wünschenswert, die Bewegungsgleichung für 10^{23} Atome in der Stange zu lösen, um die Dynamik des Gewichts am Ende zu beschreiben.

Faktisch wird das bedingte Stationaritätsprinzip daher als zusätzliches Axiom angenommen, dass von den Newtonschen Gesetzen unabhängig ist. Ob es eine physikalische Situation gut beschreibt, ist dann eine empirische Frage.

In vereinfachten *Modellsituationen* kann man das Prinzip aber beweisen. Den Beweis selbst werden wir hier nicht durchführen (Ein Femto-Projekt? Eine Bachelor-Arbeit in der Physik(didaktik)?). Wir werden aber das Modell kurz einführen.



(II) Physikalisches Modell (Skizze)

Zunächst etwas Geometrie:

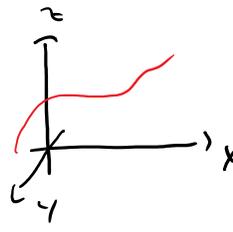
Dimension von $M = m$. (Analysis \Rightarrow) man kann M als gemeinsame Nullstelle von $k = N - m$ Funktionen $f_1, \dots, f_k: \mathbb{R}^N \rightarrow \mathbb{R}$ schreiben:

$$M = \{ \vec{r} \mid f_1(\vec{r}) = \dots = f_k(\vec{r}) = 0 \}$$

Bsp.:



$$f_1(\vec{r}) = \|\vec{r}\| - d$$



$$\text{Rohr} = \left\{ \begin{pmatrix} x \\ h(x) \\ g(x) \end{pmatrix} \mid x \in \mathbb{R} \right\}$$

$$f_1(x, y, z) = y - L(x)$$

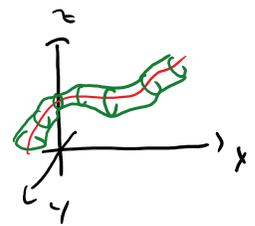
$$f_2(x, y, z) = z - g(x)$$

Man kann nun die "strenge Bedingung" $f_i(\vec{r}) = 0$ durch eine "weiche Energie-Strafe" ersetzen:

$$V(\vec{r}) \mapsto \underbrace{V(\vec{r})}_{\text{obd} \geq 0} + \mu \sum_{i=1}^k |f_i(\vec{r})|^2, \quad \mu \gg 0.$$

Sei $\vec{r}_\mu(t)$ die Lösung der BWGd. für ein Teilchen unter diesem Potential, mit Anfangsbed. $\vec{r}_\mu(t_0) \in M$ und Energie E .

Energieerhaltung $\Rightarrow \vec{r}_\mu(t)$ wird im "Tubus" $\sum_i |f_i(t)|^2 \leq \frac{E}{\mu}$ bleiben

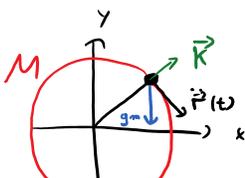


\leadsto Im Limes $\vec{r}_0(t) := \lim_{\mu \rightarrow \infty} \vec{r}_\mu(t)$ erhält man Bahn $\subset M$.

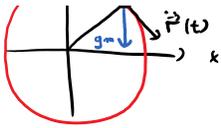
Man kann zeigen: $\vec{r}_0(t)$ erfüllt das eingesch. Stationaritätsprinzip. (nicht trivial)

Zwangskräfte

Mehr zur Physik von Zwangsbedingungen:



Im Bsp. würde Schwerkraft $-\vec{\nabla}(mgy)$ das Teilchen aus M heraus ziehen. Um das zu ...



Teilchen aus M heraus ziehen. Um das zu verhindern, muss die Stange eine "Zwangskraft" ansüben.

Nach Newton $m \ddot{\vec{r}} = \vec{F}$ folgt

$$\vec{F} = -\vec{\nabla} V + \vec{K}, \quad \text{mit} \quad \boxed{\vec{K} = (m \ddot{\vec{r}} + \vec{\nabla} V)} \quad \underline{\text{Zwangskraft}}.$$

Im axiomatischen Ansatz kommen die Zwangskräfte nicht vor. Das ist oft ein Vorteil, da man sie eben nicht modellieren muss.

In der Sprache des physikalischen Modells werden die Zwangskräfte durch die Potentiale $\mu |f_j|^2$ hervorgerufen (leider auf nicht ganz triviale Art und Weise...).

Im Beispiel des Pendels ist die Zwangskraft K also diejenige Kraft, die die Stange auf die Masse ausübt. In einfachen Physikaufgaben soll sie oft vernachlässigt werden. Das gilt nicht für die Ingenieurin, die die Dicke des Stabs berechnen will, damit dieser nicht unter den Zwangskräften bricht. In den Ingenieurwissenschaften - und gerade in der *Statik* - sind Zwangskräfte also von großem Interesse!

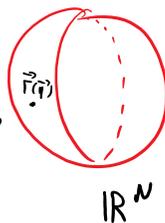
In der Skizze steht K normal auf M . Für Lösungen des eingeschränkte Stationaritätsprinzips ist das tatsächlich immer so. Die Umkehrung gilt auch: diese Eigenschaft charakterisiert die Lösungen.

Historisch war dies für die Entwicklung der Theorie wohl sehr wichtig. Heute noch führen viele Lehrbücher das Thema Zwangsbedingung über diese Eigenschaft ein. Meiner Meinung nach oft in anachronistischer bis verschwurbelter Sprache. Es heißt das "d'Alembertsche Prinzip der virtuellen Arbeit". Aha... ..um es klarer zu beschreiben, ein wenig Geometrie:

Seien:

- $\vec{q} \in \mathbb{R}^m$ Koordinaten auf $M \subset \mathbb{R}^N$
- $\vec{F}(\vec{q}) \in \mathbb{R}^N$ der Punkt auf M mit Koordinaten \vec{q}

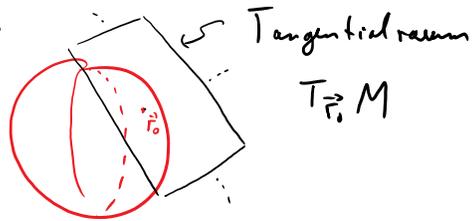
Bsp:



$$\vec{F}(\vec{q}) = d \begin{bmatrix} \sin v \sin \beta \\ \sin v \cos \beta \\ \cos v \end{bmatrix}$$

Der Begriff des Tangentenraums an M bei einem

Punkt $\vec{r}_0 \in M$ ist intuitiv verständlich:



Präzise Definition:

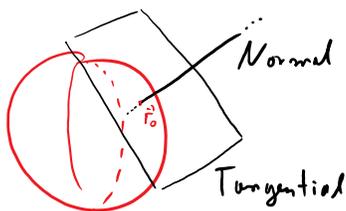
Sei $\vec{r}_0 \in M$. Der Tangentialraum zu M bei $\vec{r}_0 = \vec{r}(\vec{q}_0)$ ist die Menge aller Tangentialvektoren bei \vec{r}_0 von Kurven in M der Form $\vec{r}(\vec{q}_0 + \varepsilon \vec{\delta})$.

$$T_{\vec{r}_0} M = \left\{ \left. \frac{d}{d\varepsilon} \right|_{\varepsilon=0} \vec{r}(\vec{q}_0 + \varepsilon \vec{\delta}) \right\}$$



Zu d'Alemberts Zeiten wurden Tangentenvektoren "virtuelle Verschiebungen" genannt.

Der Normalraum bei \vec{r}_0 sind die Vektoren, die Orthogonal auf dem Tangentialraum stehen.



Damit:

Newton-Gl.

$$m \ddot{\vec{r}} + \vec{\nabla} V(\vec{r}) = 0 \Leftrightarrow \vec{r}(\cdot) \text{ erfüllt Stationaritätsprinzip}$$

Zuvor gezeigt

$$(*) \quad m \ddot{\vec{r}} + \vec{\nabla} V(\vec{r}) \text{ ist normal zu } M \Leftrightarrow \vec{r}(\cdot) \text{ erfüllt eingesch. Stationaritätsp.}$$

d'Alembertsche Prinzip

Das d'Alembertsche Prinzip verallgemeinert also die Newton-Gleichung auf den Fall von Systemen mit Zwangsbedingungen.

Seien:

$$\bullet L_r(\vec{r}, \dot{\vec{r}}) = \frac{1}{2} \sum_{j=1}^N m \dot{r}_j^2 - V(\vec{r}) \quad \text{eing. auf ganz } \mathbb{R}^N \text{ def. Lagrange-Fkt.}$$

Wir nehmen als an, dass alle Massen gleich sind: $m_j = m$.
 Nicht nötig, aber macht Notation etwas einfacher.
 ⚠ $m = \text{Masse}$ $m = \dim(M)$. Sorry. Sollte klar sein, was gemeint ist.

Es gilt also:

$$L_q(\vec{q}(t), \dot{\vec{q}}(t)) = L_r(\vec{r}(\vec{q}(t)), \frac{d}{dt} \vec{r}(\vec{q}(t)))$$

Beweis von (*):

eingeschränktes Stat.-Prinzip

$$0 = \left. \frac{d}{d\varepsilon} \right|_0 \int_{t_0}^{t_1} L_q[\vec{q}(\cdot) + \varepsilon \vec{\delta}(\cdot)]$$

$$= \left. \frac{d}{d\varepsilon} \right|_0 \int_{t_0}^{t_1} L_r[\vec{r}(\vec{q}(\cdot) + \varepsilon \vec{\delta}(\cdot))]$$

$$= \int_{t_0}^{t_1} \left. \frac{d}{d\varepsilon} \right|_0 L_r(\vec{r}(\vec{q}(t) + \varepsilon \vec{\delta}(t)), \frac{d}{dt} \vec{r}(\vec{q} + \varepsilon \vec{\delta})) dt$$

$$\stackrel{\substack{\text{Kettenr.} \\ + \text{part. Int.}}}{=} \int_{t_0}^{t_1} \sum_{j=1}^N \underbrace{\frac{\partial L_r}{\partial r_j}}_{= \frac{\partial V}{\partial r_j}} \left(\left. \frac{d}{d\varepsilon} \right|_0 \vec{r}(\vec{q}(t) + \varepsilon \vec{\delta}(t)) \right)_j + \sum_{j=1}^N \underbrace{\left(\frac{d}{d\varepsilon} \frac{\partial L_r}{\partial \dot{r}_j} \right)}_{= m \ddot{r}_j} \left(\left. \frac{d}{d\varepsilon} \right|_0 \left(\frac{d}{dt} (\vec{r}(\vec{q}(t) + \varepsilon \vec{\delta}(t))) \right) \right) dt$$

$$= \int_{t_0}^{t_1} \left(\underbrace{m \vec{r} + \vec{\nabla} V}_{\vec{K}}, \underbrace{\left. \frac{d}{d\varepsilon} \right|_0 \vec{r}(\vec{q}(t) + \varepsilon \vec{\delta}(t))}_{\text{beliebiger Tangentenvektor zu } M \text{ bei } \vec{r}(\vec{q}(t))} \right) dt$$

"=>" Wenn \vec{K} im Normalraum ist, ist das innere

Produkt = 0 \leadsto Es gilt also das eing. Stat.-Pr.

Produkt = 0 \leadsto Es gilt also das einge. Stat.-Pr.

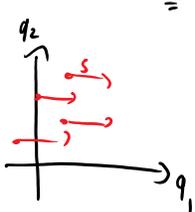
" \Leftarrow " Wenn das Stat.-Pr. gilt ist das Integral = 0

\leadsto (wie bei Bew. der ELG-Gl.) das innere Produkt = 0 \leadsto \vec{K} normal zu M .
(alle Tangentialvek. von der Form sind)

□

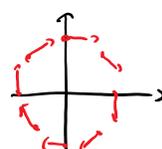
Erinnerung:

Symmetrien II zu Koordinatenachse \Rightarrow EHG:

$$\left. \begin{array}{l} q_i \text{ zyklisch} \\ \Leftrightarrow \frac{\partial L}{\partial q_i} = 0 \\ \Leftrightarrow \forall s, \vec{q}, \vec{v}, t: L(\vec{q} + s e_i, \vec{v}, t) \\ \quad = L(\vec{q}, \vec{v}, t) \end{array} \right\} \Rightarrow \text{ELG} \quad \frac{\partial L}{\partial q_i}(\vec{q}(\epsilon), \dot{\vec{q}}(\epsilon), \epsilon) = \text{const.}$$


Auch allgemeinere Symmetrien implizieren EHG:

Ein Ansatz: Wechsle einfach in Koordinaten, s.d. Symmetrie eben doch nur Transl. entlang einer Achse ist.



Bsp.: Rotation im 2-D \leadsto Polarkoordinaten

Der Satz von Noether ist äq. zu diesem Ansatz, aber direkter.Sei $\vec{\Phi}^{(s)}: \mathbb{R}^m \rightarrow \mathbb{R}^m$ eine Transformation, s.d.

① $\vec{\Phi}^{(0)}(\vec{x}) = \vec{x}$

② $\forall \vec{q}(t): \left. \frac{d}{ds} \right|_0 L(\vec{\Phi}^{(s)}(\vec{q}(t)), \left. \frac{d}{dt} \vec{\Phi}^{(s)}(\vec{q}(t)) \right|_0 = 0.$

Bsp.: $\vec{\Phi}^{(s)}$ = Rotation um Winkel s um feste Achse \vec{e}_3
 und $L(\vec{x}, \vec{v}) = \frac{1}{2} \sum_j m_j \|\vec{v}_j\|^2 - \sum_{i,j} V_{ij}(\|\vec{r}_j - \vec{r}_i\|)$

Dann:

$$\mathbb{I}(\vec{q}(t), \dot{\vec{q}}(t)) := \sum_j \frac{\partial L}{\partial \dot{q}_j} \left. \frac{\partial}{\partial s} \right|_0 \Phi_j^{(s)}(\vec{q}(t)) = \text{const.}$$

"verallg. Impuls in Richtung des Vektorfelds von $\vec{\Phi}^{(s)}$ "

TBD: Skizze.

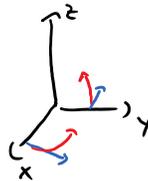
Bew.:

$$\frac{d}{dt} \mathbb{I} = \sum_j \left(\underbrace{\frac{d}{dt} \frac{\partial L}{\partial \dot{q}_j}}_{= \frac{\partial L}{\partial \dot{q}_j}} \right) \frac{\partial}{\partial s} \Big|_0 \vec{\Phi}_j^{(s)}(\vec{q}(t)) + \sum_j \frac{\partial L}{\partial \dot{q}_j} \frac{d}{dt} \frac{\partial}{\partial s} \Big|_0 \vec{\Phi}_j^{(s)}(\vec{q}(t))$$

$$\stackrel{\substack{\text{Lsg.} \\ \text{rückwärts}}}{=} \frac{d}{ds} \Big|_0 L(\vec{\Phi}^{(s)}(\vec{q}(t)), \frac{d}{dt} \vec{\Phi}^{(s)}(\vec{q}(t))) = 0. \quad \square$$

Bsp.: Zentralkräfte: $L(\vec{r}, \vec{v}) = \frac{1}{2} m \|\vec{v}\|^2 - V(\|\vec{r}\|)$

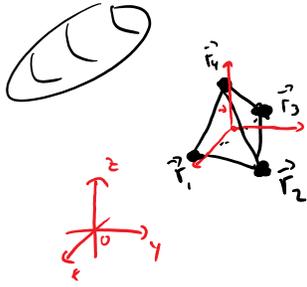
$$\vec{\Phi}^{(s)}(\vec{r}) := \begin{bmatrix} \cos s & -\sin s \\ \sin s & \cos s \end{bmatrix} \vec{r}$$



$$\frac{\partial}{\partial s} \Big|_0 \vec{\Phi}^{(s)}(\vec{r}) = \begin{bmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} \vec{r} = \begin{bmatrix} -y \\ x \\ 0 \end{bmatrix}$$

$$\frac{\partial L}{\partial \dot{r}_j} = \dot{r}_j m$$

$$\Rightarrow \mathbb{I}(\vec{r}, \dot{\vec{r}}) = m(-\dot{x}y + \dot{y}x) = -L_z.$$



- n Massepunkte: m_i bei \vec{r}_i
- Länge (und relative Winkel) der Verbindungsvekt.

$$\vec{d}_{ij} = \vec{r}_i - \vec{r}_j$$

fixiert.

Freiheitsgrade: • Schwerpunkt $\vec{s} \in \mathbb{R}^3$
 • Rotation um Schwerpunkt: $R \in SO(3)$ } $N=6$ F.H.G.

→ Kann $\vec{r}_j(t)$ schreiben als:

$$\vec{r}_j(t) = R(t) \vec{r}_j(0) + \vec{s}(t)$$

Nehme an, dass Punkte nicht alle kollinear sind

The diagram shows three points on a red line, with a bracket indicating they are not all collinear.

Wähle Koordinatenursprung so, dass

$$\vec{s}(0) = \frac{1}{M} \sum_j m_j \vec{r}_j(0) = \vec{0}.$$

Ab jetzt: kräftefreier Fall → $V = 0$.

Wir kombinieren diese Ideen:

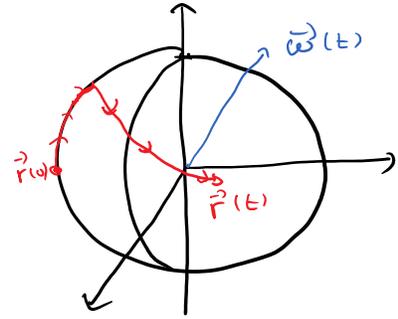
Konzept ①: Winkelgeschwindigkeit

Sei $\vec{r}(t) = R(t) \vec{r}(0)$. Dann gibt es (momentane, vektorielle) Winkelgeschwindigkeit $\vec{\omega}(t)$, s.d.

$$\frac{d}{dt} \vec{r}(t) = \dot{R} R^{-1} \vec{r}(t) = \vec{\omega}(t) \times \vec{r}(t).$$

$$\frac{d}{dt} R(t) = R(t) \Omega(t) = \dots$$

Zum Beweis etwas zu "infinit. Drehungen"
 (= Lie Algebra von $SO(3)$).



① Matrix $R \in SO(3) \Leftrightarrow R R^T = \mathbb{1}$.

Sei $R(0) = \mathbb{1}$. Taylor: $R(t) = \underbrace{\mathbb{1} + tM + O(t^2)}_{\text{"infinit. Drehung"}}$

$$\begin{aligned} \mathbb{1} &\stackrel{!}{=} R(t) R(t)^T \\ &= (\mathbb{1} + tM + O(t^2)) (\mathbb{1} + tM + O(t^2))^T \\ &= \mathbb{1} + t \underbrace{(M + M^T)}_{=0} + O(t^2) \quad \forall t \end{aligned}$$

$\Rightarrow M$ anti-symmetrisch: $M = -M^T$.

② Beh.: Für jede anti-symm. 3×3 Matrix M gibt es $\vec{\omega}$, s.d. $M \vec{r} = \vec{\omega} \times \vec{r}$.

Bew.: $\vec{r} \mapsto \vec{\omega} \times \vec{r}$ def. lineare Abb.

Die Matrix-Elemente sind

$$(\vec{e}_i, \vec{\omega} \times \vec{e}_j) = -(\vec{e}_j, \vec{\omega} \times \vec{e}_i) \quad (\text{Spatprodukt})$$

\Rightarrow anti-symmetrisch.

Auf diese Art entsteht 3-dim. VR von linearen Abb. Aber Menge anti-symm.

$$\text{Matrizen } \left\{ \begin{bmatrix} 0 & a & b \\ -a & 0 & c \\ -b & -c & 0 \end{bmatrix} \mid a, b, c \in \mathbb{R} \right\} \text{ auch}$$

3-dim. \rightarrow Alle entstehen so. \square

Explizite Lösung: $\omega_a = \frac{1}{2} \sum_{b,c=1}^3 \varepsilon_{abc} M_{bc}$.

mit

$$\varepsilon_{abc} = \begin{cases} +1 & abc \text{ zykl. Permut. von } 123 \\ -1 & abc \text{ nicht-zykl. " " } 123 \\ 0 & abc \text{ keine Permut. " } 123 \end{cases}$$

"Levi-Civita symbol".

③

$$\frac{d}{dt} \vec{r}(t) = \frac{d}{d\tau} \underbrace{\left(R(t+\tau) R^{-1}(t) \right)}_0 R(t) \vec{r}(0)$$

$=: \tilde{R}(\tau), \text{ mit } \tilde{R}(0) = \mathbb{1}$

$$= \vec{\omega}(t) \times (R(t) \vec{r}(0))$$

$$= \vec{\omega}(t) \times \vec{r}(t) \quad \square$$

Damit:

$$T = \frac{1}{2} \sum_j m_j \|\dot{\vec{r}}_j\|^2 = \frac{1}{2} \sum_j m_j \left(\vec{\omega}(t) \times \vec{r}_j(t) + \dot{\vec{S}}(t), \vec{\omega}(t) \times \vec{r}_j(t) + \dot{\vec{S}}(t) \right)$$

$$= \sum_j m_j \|\vec{\omega}(t) \times \vec{r}_j(t)\|^2 + \sum_j m_j \|\dot{\vec{S}}\|^2$$

$$+ \sum_j m_j \left(\vec{\omega}(t) \times \vec{r}_j(t), \dot{\vec{S}}(t) \right)$$

$$+ \underbrace{\sum_j m_j (\vec{\omega}(t) \times \vec{r}_j(t), \dot{\vec{s}}(t))}_{=0, \text{ da } \sum_j m_j \vec{r}_j(t) = R(t) \left(\sum_j m_j \vec{r}_j(0) \right) = R(t) \vec{s}(0) = 0.}$$

$$\Rightarrow L = \sum_j m_j \|\vec{\omega} \times \vec{r}_j\|^2 + \sum_j m_j \|\dot{\vec{s}}\|^2$$

\Rightarrow B.W.G. für $R(t)$ und für $\dot{\vec{s}}(t)$ entkoppeln!

Lösung für $\dot{\vec{s}}(t)$ = geradlinig, gleichförmig
= langweilig \rightarrow nehme an, $\dot{\vec{s}}(t) = 0$.

Konzept (II): Trägheitstensor

Drehimpuls:

$$\begin{aligned} \vec{L} &= \sum_j m_j \vec{r}_j \times \dot{\vec{r}}_j \\ &= \sum_j m_j \vec{r}_j \times (\vec{\omega} \times \vec{r}_j) \\ &= \underbrace{\vec{\omega} \|\vec{r}_j\|^2 - \vec{r}_j (\vec{r}_j, \vec{\omega})}_{\text{"BAC-CAB"}} \end{aligned}$$

$\rightarrow \vec{L}$ ist lineare Fkt. von $\vec{\omega}$: $\vec{L} = \mathbb{I} \vec{\omega}$, also $L_a = \sum_{b=1}^3 \mathbb{I}_{ab} \omega_b$.
↑
Trägheitstensor ($\hat{=}$ Matrix)

Finde Matrixelemente \mathbb{I}_{ab} :

Γ

$\bar{\Gamma}$

$$\begin{aligned}
 &= \frac{M}{\lambda} \left[\frac{1}{3} \lambda^3 \right]_{-\lambda/2}^{\lambda/2} \\
 &= \frac{2}{3} \frac{M}{\lambda} \frac{\lambda^3}{8} = \frac{M}{12} \lambda^2.
 \end{aligned}$$

Beh.: $\exists R \in SO(3)$, s.d. $O I O^T = \begin{bmatrix} I_1 & & \\ & I_2 & \\ & & I_3 \end{bmatrix}$, mit

$$I_i \geq 0.$$

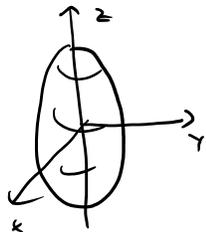
Bew.: Muss zeigen, dass Eigenwerte ≥ 0 sind. ("I positiv-semidefinit")

Sei $\vec{x} \in \mathbb{R}^3$ beliebig. Dann:

$$\begin{aligned}
 (\vec{x}, I \vec{x}) &= \sum_j m_j \underbrace{\sum_{a,b} x_a (\delta_{ab} \|\vec{r}_j\|^2 - (\vec{r}_j)_a (\vec{r}_j)_b) x_b}_{= \|\vec{x}\|^2 \|\vec{r}_j\|^2 - |\langle \vec{x}, \vec{r}_j \rangle|^2} \geq 0 \\
 &\quad \text{Cauchy-Schwarz} \quad \square
 \end{aligned}$$

Eigenvektoren sind Hauptträgheitsachsen.

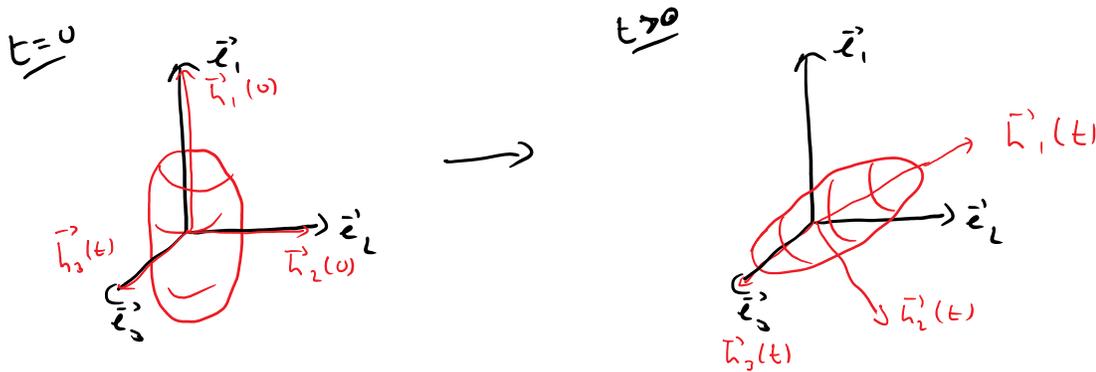
Eigenwerte sind Hauptträgheitsmomente.



Ab jetzt: Nehme an, bei $t=0$ sind Koordinatenachsen = HTA.

$$\Rightarrow I(0) = \begin{bmatrix} I_1 & & \\ & I_2 & \\ & & I_3 \end{bmatrix}$$

Konzept III: Rotierendes Bezugssystem



Seien $\vec{h}_a(t)$, $a=1,2,3$ die HTA, also: $I(t) \vec{h}_a(t) = I_a$.

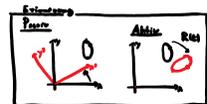
Nach Annahme ist $\vec{h}_a(0) = \vec{e}_a$.

Die $\vec{h}_a(t)$ bilden ein mit dem Körper starr verbundenes Orthogonalsystem. Häufig ist es nützlich, Vektoren bzgl. der $\vec{h}_a(t)$ zu entwickeln.

Dazu:

$$\vec{h}_a(t) = R(t) \vec{h}_a(0) = R(t) \vec{e}_a$$

$$\Rightarrow \vec{x} = \sum_a x_a \vec{e}_a = \sum_a x'_a \vec{h}_a, \quad \text{mit } \vec{x}' = R^T \vec{x}.$$



← "Entwicklungskoeff. von Vektoren transf. sich Kontra variant"

Denn:

$$\left(\sum_a x'_a \vec{h}_a \right)_b = \sum_a x'_a R_{ba} = (R x')_b$$

Insbesondere nützlich:

$$\vec{L}' = R^T \vec{L}$$

$$\vec{\omega}' = R^T \vec{\omega}$$

Zwei M.R.:

$$(M) \rightarrow \dots \rightarrow \dots \rightarrow \dots$$

$$\vec{L}' = I(t) \vec{\omega}'$$

Zwei M.R.:

$$\begin{aligned} \textcircled{1} \quad \vec{L} = I \vec{\omega} &\Leftrightarrow R \vec{L}' = I R \vec{\omega}' \\ &\Leftrightarrow \vec{L}' = \underbrace{R^{-1} I R}_{= I(0)} \vec{\omega}' \end{aligned}$$

$$\Rightarrow \vec{L}' = I(0) \vec{\omega}'$$

$$\textcircled{2} \quad R^T \dot{R} \vec{F} = R^T \dot{R} R^T R \vec{F} = R^T (\vec{\omega} \times R \vec{F}) = \vec{\omega}' \times \vec{F}$$

Damit: Euler - Gleichungen:

Drehimpulserhaltung:

$$\begin{aligned} 0 &= \frac{d}{dt} \vec{L} = \frac{d}{dt} (\vec{R} \vec{L}') \\ &= \frac{d}{dt} (\vec{R} I(0) \vec{\omega}') \\ &= \dot{R} I(0) \vec{\omega}' + R I(0) \dot{\vec{\omega}}' \\ &= R \left(\underbrace{R^{-1} \dot{R} I(0)}_{= \vec{\omega}' \times} \vec{\omega}' + I(0) \dot{\vec{\omega}}' \right) \end{aligned}$$

$$\Leftrightarrow I(0) \dot{\vec{\omega}}' + \vec{\omega}' \times (I(0) \vec{\omega}') = 0$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} I_1 \dot{\omega}'_1 = -\omega'_2 I_3 \omega'_3 + \omega'_3 I_2 \omega'_2 = \omega'_2 \omega'_3 (I_2 - I_3) \\ I_2 \dot{\omega}'_2 = \omega'_1 \omega'_3 (I_3 - I_1) \\ I_3 \dot{\omega}'_3 = \omega'_1 \omega'_2 (I_1 - I_2) \end{cases} \quad (E)$$

Lösungen

• Drehungen um HTA



Drehungen um HTA



$$\vec{\omega}'(t) = \begin{pmatrix} \Omega \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} = \text{const} \text{ löst (E)}. \Rightarrow \vec{\omega}(t) = \begin{pmatrix} \Omega \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}.$$

→ konstante Drehung um HTA.

Stabilitätsanalyse:

Setze $\vec{\omega}'(t) = \begin{pmatrix} \Omega \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} + \vec{\varepsilon}'(t).$

(E) zu 1. Ordnung:

$$I_1 \dot{\varepsilon}'_1 = 0$$

$$I_2 \dot{\varepsilon}'_2 = \Omega \varepsilon'_3 (I_3 - I_1) \Rightarrow \varepsilon'_3 = \frac{I_2}{(I_3 - I_1)} \frac{1}{\Omega} \dot{\varepsilon}'_2$$

$$I_3 \dot{\varepsilon}'_3 = \Omega \varepsilon'_2 (I_1 - I_2)$$

$$\ddot{\varepsilon}'_2 = \varepsilon'_2 \underbrace{\Omega^2 \frac{I_2}{I_3} (I_1 - I_2) (I_3 - I_1)}_{=: A}$$

$\Rightarrow A$: VZ entscheidet Stabilität.

→ $\ddot{\varepsilon}'_2 = A \varepsilon'_2$. Lsg. von Form $\varepsilon'_2(t) = e^{\sqrt{A}t}$.

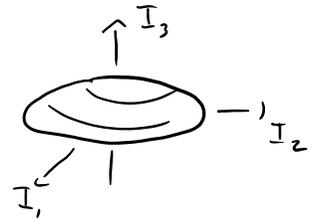
Fälle:

$$\left. \begin{array}{l} I_1 > I_2, I_3 \Rightarrow A < 0 \Rightarrow \\ I_1 < I_2, I_3 \Rightarrow A < 0 \Rightarrow \end{array} \right\} \text{Schwingungen um } \varepsilon_2 = 0 \Rightarrow \text{stabil}$$

I_1 mittlerer Wert $\Rightarrow A > 0 \Rightarrow$ exp. Verst. der Störung \Rightarrow instabil.

Torkindbewegung des symmetr. Kreisels

$$I_1 = I_2 \neq I_3$$



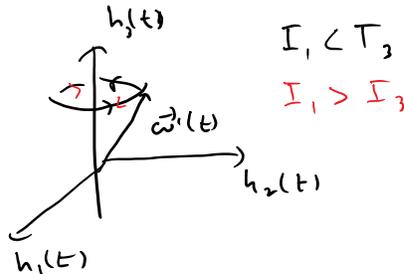
$$\leadsto I_1 \dot{\omega}'_1 = \omega'_2 \omega'_3 (I_1 - I_3)$$

$$I_1 \dot{\omega}'_2 = -\omega'_1 \omega'_3 (I_1 - I_3)$$

$$\dot{\omega}'_3 = 0$$

$$\Rightarrow \omega'_3(t) = \text{const.}$$

$$\left. \begin{aligned} \dot{\omega}'_1 &= \Omega' \omega'_2 \\ \dot{\omega}'_2 &= -\Omega' \omega'_1 \end{aligned} \right\} \Rightarrow \text{mit } \Omega' = \omega'_3 \frac{I_1 - I_3}{I_1}$$



$$\Rightarrow \begin{aligned} \omega'_1(t) &= c \sin(\Omega' t + \phi) \\ \omega'_2(t) &= c \cos(\Omega' t + \phi) \end{aligned}$$

Präzessionsim im Körpersyst.

Aber:

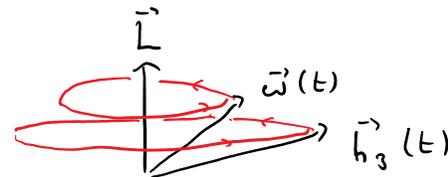
Wollen $\vec{\omega}(t)$, nicht $\vec{\omega}'(t)$. $R(t) \vec{\omega}'(t)$ direkt nicht leicht auszurechnen.

Argumentiere indirekt (mit Annahme $\vec{L} \nparallel \vec{\omega}$):

Beh.: ① $\vec{L}, \vec{\omega}(t), \vec{h}_3(t)$ liegen in einer Ebene.

② Ihre Lage innerhalb der Ebene ist konstant.

③ Ebene rotiert mit konst. Winkelgeschw. um \vec{L} .



Bew.:

$$\textcircled{1} \quad \vec{L}' = I(0) \vec{\omega}' = I_1 \vec{\omega}'(t) + (I_3 - I_1) \omega'_3 \vec{e}_3$$

$$\Rightarrow \vec{L} = R^T \vec{L}' = I_1 \vec{\omega}(t) + (I_3 - I_1) \omega'_3 \vec{h}_3(t)$$

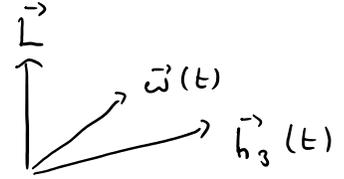
$$\Rightarrow \vec{L}, \vec{\omega}(t), \vec{h}_3(t) \text{ in einer Ebene.}$$

→ L, ω, η_3 in einer Ebene.

② • \vec{L} konst., da keine Kräfte wirken.

Längen
Konst. $\left\{ \begin{array}{l} \bullet \|\vec{\omega}(t)\| = \|\vec{\omega}'(t)\| = \text{const.} \\ \bullet \|\vec{h}_3(t)\| = 1 = \text{const.} \end{array} \right.$

Winkel
konstant $\left\{ \begin{array}{l} \bullet (\vec{\omega}, \vec{L}) = (\vec{\omega}, I \vec{\omega}) = T_{kin} = \text{const.} \\ \bullet (\vec{h}_3, \vec{L}) = (R^T \vec{h}_3, R^T \vec{L}) \\ = (e_3, \vec{L}') = I_3 \omega'_3 = \text{const.} \end{array} \right.$



③ $\frac{d}{dt} \vec{h}_3(t) = \vec{\omega}(t) \times \vec{h}_3(t) \rightarrow \perp$ auf Ebene, Winkelgeschw.:
 $\|\vec{\omega} \times \vec{h}_3\| = \sqrt{\omega_1^2(t) + \omega_2^2(t)} (= c) . \square$

Bsp.: Chandler's Wobble der Erde: $\Omega' \approx \frac{1}{430} \text{ Tag}^{-1}$
 $< \times 10^{-6} \text{ m Erdradius}^{-1}$.

| | System spezifiziert durch | BW Gl. | Variablen | Grad der Zeitabl. |
|----------|--------------------------------|--|--|-------------------|
| Newton | $\vec{F}(\vec{r})$ | $\frac{1}{m_j} \vec{\ddot{r}}_j = \vec{F}(\vec{r})$ | $\vec{r} \in \mathbb{R}^N$ | 2. |
| Lagrange | $L(\vec{q}, \dot{\vec{q}}, t)$ | $\frac{\partial L}{\partial \dot{q}_j} - \frac{d}{dt} \frac{\partial L}{\partial q_j} = 0$ | $\vec{q} \in \mathbb{R}^N$ | 2. |
| Hamilton | $H(\vec{q}, \vec{p}, t)$ | $\dot{q}_j = \frac{\partial H}{\partial p_j} \quad \dot{p}_j = -\frac{\partial H}{\partial q_j}$ | $(\vec{q}, \vec{p}) \in \mathbb{R}^{2N}$ | 1. |

Also:

Zutaten sind

Hamilton-Fkt. $H(\vec{q}, \vec{p}, t): \mathbb{R}^{2N+1} \rightarrow \mathbb{R},$

und

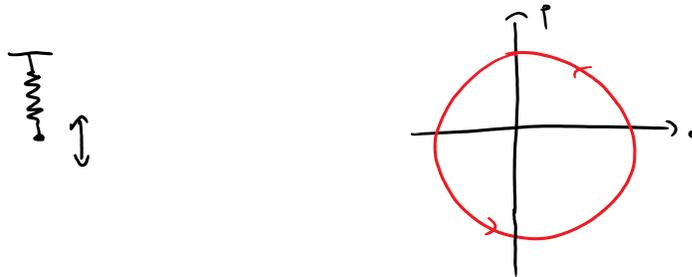
Hamiltonsche Gl.

$$\dot{q}_j = \frac{\partial H}{\partial p_j} \quad \dot{p}_j = -\frac{\partial H}{\partial q_j} \quad (H)$$

Bsp: $N=1. \quad H(q, p) = \frac{1}{2}(q^2 + p^2).$

$\Rightarrow \dot{q}(t) = p(t), \quad \dot{p}(t) = -q(t)$

\rightarrow gelöst durch $q(t) = A \sin(t + \phi) \quad p(t) = A \cos(t + \phi)$



Gleichförmige
Kreisbewegung im
q-p-Raum
Phasenraum

Wenn man q mit einer Auslenkung und p als den Impuls interpretiert, dann beschreibt das System oben eine harmonische Schwingung.

Im **Phasenraum** ist die Schwingung eine gleichförmige Kreisbewegung.

In diesem Sinn scheint der harmonische Oszillator eine "Rotationsymmetrie" zu besitzen, die uns vorher nicht aufgefallen ist. Konnte sie auch nicht, da die Symmetrie - anders als die im Noether-Theorem betrachteten - Orte und Impulse vermengt.

Die Möglichkeit, dass solche allgemeineren Symmetrien ausgenutzt werden können, ist eine der großen Vorteile der Hamilton-Mechanik.

Oft kann man wählen, ob man ein System im Lagrange oder im Hamilton-Formalismus behandeln möchte. Dazu:

Übergang Lagrange \rightarrow Hamilton

Gegeben Lagrange-Fkt. $L(\vec{q}, \dot{\vec{q}}, t)$.

Konstruiere Hamilton-Fkt. wie folgt:

① Setze $p_j(\vec{q}, \dot{\vec{q}}, t) = \frac{\partial L}{\partial \dot{q}_j}(\vec{q}, \dot{\vec{q}}, t)$ "kanonisch konjugierter Impuls"

② Wenn möglich, löse nach \dot{q}_j auf. $\leadsto \dot{q}_j(\vec{q}, \vec{p}, t)$.

Falls nicht möglich \leadsto Umschreiben auf Hamilton scheitert. ;)

③ Setze

$$H(\vec{q}, \vec{p}, t) = \sum_j p_j \dot{q}_j(\vec{q}, \vec{p}, t) - L(\vec{q}, \dot{\vec{q}}(\vec{q}, \vec{p}, t), t) \quad (*)$$

Legendre-
Transformation

Mehr dazu
später.

Damit:

Beh.: Bahn $\vec{q}(t)$ erfüllt ELG für L

\Leftrightarrow Bahn $(\vec{q}(t), \vec{p}(t))$ erfüllt Hamilton-Gleichung für H

Bew.: ($N=1$)

"(ELG) \Rightarrow (H)"

$$\frac{\partial H}{\partial p} \stackrel{(*)}{=} \dot{q} + p \frac{\partial \dot{q}}{\partial p} - \frac{\partial L}{\partial \dot{q}} \frac{\partial \dot{q}}{\partial p} = \dot{q}$$

$$\frac{\partial H}{\partial q} \stackrel{(*)}{=} p \frac{\partial \dot{q}}{\partial q} - \frac{\partial L}{\partial q} - \frac{\partial L}{\partial \dot{q}} \frac{\partial \dot{q}}{\partial q} = - \frac{\partial L}{\partial q} - \frac{d}{dt} \frac{\partial L}{\partial \dot{q}} = - \dot{p}$$

(ELG)

"(H) \Rightarrow (ELG)"

$$\frac{\partial q}{\partial q} = \frac{\partial q}{\partial q} = \frac{\partial q}{\partial q} = 1 \quad \frac{\partial}{\partial q} = - \frac{\partial}{\partial q} = - \frac{\partial}{\partial q} = - \dot{p} \quad \text{(ELG)}$$

"(H) \Rightarrow (ELG)"

$$\frac{d}{dt} \frac{\partial L}{\partial \dot{q}} = \dot{p} \stackrel{(H)}{=} - \frac{\partial H}{\partial q} \stackrel{(A)}{=} - p \frac{\partial \dot{q}}{\partial q} = - \frac{\partial L}{\partial q} + \frac{\partial L}{\partial \dot{q}} \frac{\partial \dot{q}}{\partial q} = \frac{\partial L}{\partial q} \quad \square$$

Für Lagrang-Fkt. in "natürlicher Form" ist Legendre-Transform leicht durchführbar: $\uparrow L = T - V.$

$$L(\vec{r}, \dot{\vec{r}}, t) = \sum_{j=1}^N \frac{1}{2} m_j \dot{\vec{r}}_j^2 - V(\vec{r}, t)$$

$$\leadsto p_j(\vec{r}, \dot{\vec{r}}, t) = \frac{\partial L}{\partial \dot{\vec{r}}_j} = m_j \dot{\vec{r}}_j = p_j(\dot{\vec{r}}_j).$$

$$\text{Invertieren: } \dot{\vec{r}}_j(p_j) = \frac{1}{m_j} p_j.$$

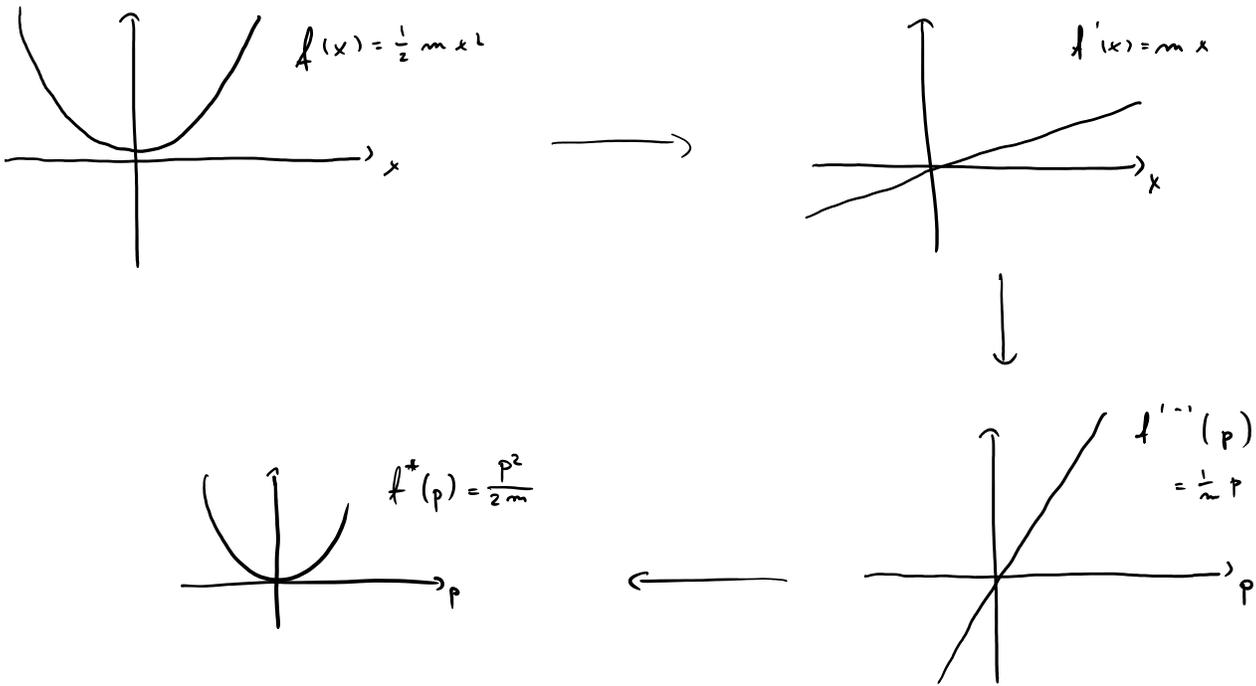
$$\leadsto H(\vec{r}, \vec{p}, t) = \sum_j \frac{p_j^2}{2m_j} - \frac{1}{2} \sum_j m_j \frac{p_j^2}{m_j^2} + V(\vec{r}, t)$$

$$= \sum_j \frac{p_j^2}{2m_j} + V(\vec{r}, t) = T + V = \text{Gesamtenergie}(\vec{r}, \vec{p}, t).$$

Betrachte Fkt. $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$.

Setze $p(x) := f'(x)$.

Manchmal ist p umkehrbar:



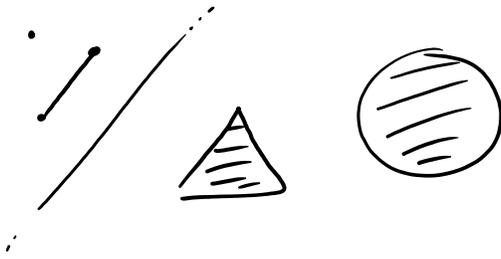
Setze dann: $f^*: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$
 $p \mapsto p f'^{-1}(p) - f(f'^{-1}(p)).$ } Legendre -
 Transform.

Physik-Konvention: $p(x) := f'(x)$
 $x(p) := f'^{-1}(p)$ } $\Rightarrow f^*(p) = p x(p) - f(x(p))$
 $= p x - f$

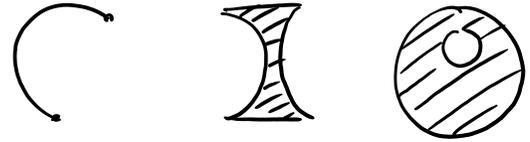
Einschub: Geometrie der Legendre-Transf.

Eine Menge $M \subset \mathbb{R}^N$ ist konvex wenn die Verbindungsline zwischen je zwei Punkten aus M in M liegt.

Konvex



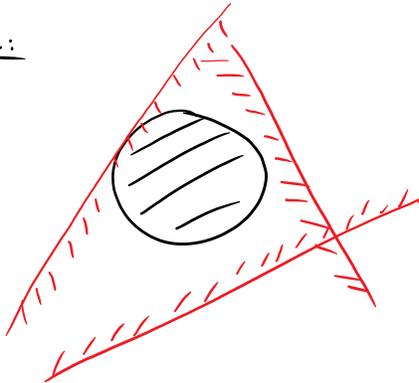
Nicht konvex



Dualität: Konvexe Menge M ist

- Vereinigung aller Punkte in M
- oder
- Schnitt aller Halbräume, die M enthalten

Bsp.:

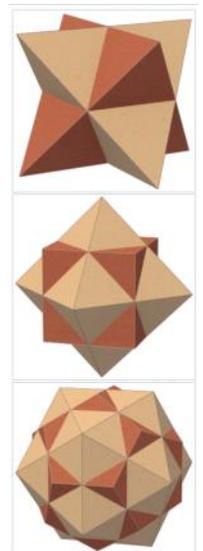


Für nicht-konvexe Mengen gilt das nicht:



Dieses Konzept der konvexen Dualität nimmt viele Formen an und kommt in viele Bereichen der Mathematik und Physik vor. Z.B.:

- In der Theorie von Polyhedren - insbesondere der Platonischen Körper
- In der Theorie normierter Räume
- Bei der Beschreibung allgemeiner Messungen auf quantenmechanischen Systemen
- In der Studie hypothetischer probabilistischer Theorien, die noch allgemeiner sind als QM
- In der Optimierungstheorie, wo Dualität benutzt wird um Optimalität einer Lösung zu zeigen, oder, allgemeiner, obere- und untere Schranken an eine zu optimierende Funktion zu finden
- ...und eben in der Zuordnung einer dualen Funktion - der Legendre-Transformierten.



Primal and dual polyhedra.

From:

https://en.wikipedia.org/wiki/Platonic_solid

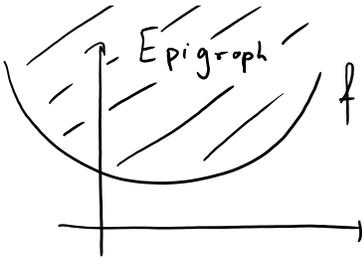
Zu Dualität bei Funktionen:

Der Epigraph einer Fkt. $f: \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$ ist

Menge der Punkte "über dem Graph" von f :

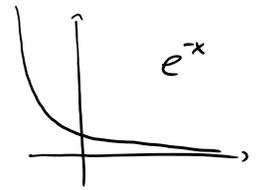
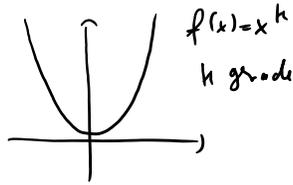


f ist konvex \Leftrightarrow Epigraph ist konvex.

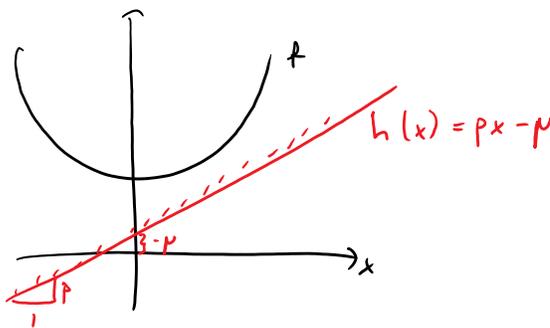


f ist konvex \Leftrightarrow Epigraph ist konvex.

Bsp.:



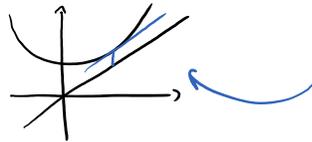
Sei f konvex. Halbräume, die den Epigraph von f enthalten, werden durch affine untere Schranken an f beschrieben:



$$h(\bar{x}) = (\vec{p}, \bar{x}) - \mu \quad \text{affin}$$

$$\text{mit } h(\bar{x}) \leq f(\bar{x}) \quad \forall \bar{x} \in \mathbb{R}^N.$$

$$\Leftrightarrow \mu \geq \sup_{\bar{x}} [(\vec{p}, \bar{x}) - f(\bar{x})] =: f^*(\vec{p}).$$



Beh.: \uparrow Sup. wird bei \bar{x} angenommen, wo $\vec{\nabla} f(\bar{x}) = \vec{p}$ ist.

Bew.: $0 \stackrel{!}{=} \vec{\nabla} [(\vec{p}, \bar{x}) - f(\bar{x})]$
 $= \vec{p} - \vec{\nabla} f(\bar{x}) \quad \square$

$$\Rightarrow f^*(\vec{p}) = (\vec{p}, (\vec{\nabla} f)^{-1}(\vec{p})) - f((\vec{\nabla} f)^{-1}(\vec{p}))$$

$$=: \sum_j p_j x_j(\vec{p}) - f(\bar{x}(\vec{p})).$$

Eigenschaften:

f^* ist konvex
 $f^{**} = f$

Bew. (1) Epigraph von $f^* \hat{=} \underbrace{\text{Menge aller affinen unteren Schranken an } f}_{\text{konvex.}}$
Skizze:

(2) Konvexe Funktionen sind punktweises Max. aller affiner

unteren Schranken.

$$\text{Daher: } f(\vec{x}) = \sup_{\vec{p}} [(\vec{x}, \vec{p}) - f^*(\vec{p})] = (f^*)^*(\vec{x}). \quad \square$$

Kanonische Gleichung

$$\dot{q} = \frac{\partial H}{\partial p_j}, \quad \dot{p}_j = -\frac{\partial H}{\partial q_j}$$

Notation für $2N$ Koordinaten:

$$\vec{x} = \begin{pmatrix} \vec{q} \\ \vec{p} \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^{2N} \quad \rightsquigarrow \quad \vec{\nabla} H = \begin{pmatrix} \frac{\partial H}{\partial x_1} \\ \vdots \\ \frac{\partial H}{\partial x_{2N}} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{\partial H}{\partial q_1} \\ \vdots \\ \frac{\partial H}{\partial q_N} \\ \frac{\partial H}{\partial p_1} \\ \vdots \\ \frac{\partial H}{\partial p_N} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \vec{\nabla}_{\vec{q}} H \\ \vec{\nabla}_{\vec{p}} H \end{pmatrix}$$

BWG:

$$\begin{pmatrix} \dot{\vec{q}} \\ \dot{\vec{p}} \end{pmatrix} = \underbrace{\begin{bmatrix} 0 & \mathbb{1}_N \\ -\mathbb{1}_N & 0 \end{bmatrix}}_{\mathcal{J}: 2N \times 2N \text{ "symplektische Eins" }} \begin{pmatrix} \vec{\nabla}_{\vec{q}} H \\ \vec{\nabla}_{\vec{p}} H \end{pmatrix} \quad \mathbb{1}_N = \begin{bmatrix} 1 & & \\ & \ddots & \\ & & 1 \end{bmatrix}$$

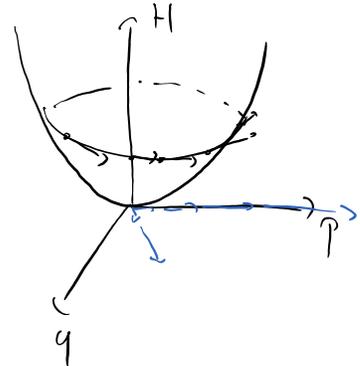
$$(*) \quad \boxed{\dot{\vec{x}} = \mathcal{J} \vec{\nabla} H}$$

Bsp: Harmonischer Oszillator

$$H(q, p) = \frac{p^2}{2m} + \frac{1}{2} m \omega^2 q^2$$

$$\stackrel{m \cdot \omega = 1}{=} \frac{1}{2} p^2 + \frac{1}{2} q^2$$

$$\rightsquigarrow \vec{\nabla} H = \begin{pmatrix} q \\ p \end{pmatrix} \quad \mathcal{J} \vec{\nabla} H = \begin{pmatrix} p \\ -q \end{pmatrix}$$



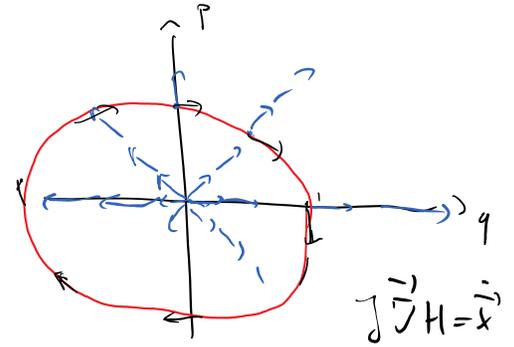
Der Gradient von H ist ein Vektorfeld, das senkrecht auf Niveaulinien von H steht.

\hat{p}

Der Gradient von H ist ein Vektorfeld, das senkrecht auf Niveaulinien von H steht.

J "orthogonalisiert" das Vektorfeld. Nach Anwendung der symplektischen Matrix erhält man also ein Feld, das tangential zu Niveaulinien von H steht.

$x(t)$ läuft also auf Niveaulinien der Hamiltonfunktion. Ist diese nicht explizit zeitabhängig, äußert sich darin die Energieerhaltung (mehr dazu später).



Allgemein:

$$J \vec{\nabla} H(\vec{x})$$

heißt Hamiltonsches Vektorfeld.

D.h. Bahnkurve $\vec{x}(t)$ löst Hamiltongl. (*)

⇨ Ihre Tangentenvektoren fallen mit Hamilt. V.F. zusammen.

$$\left(\frac{d}{dt} \vec{x}(t) \right)$$

Man nennt $\vec{x}(t)$ eine Integralkurve des V.F. $J \vec{\nabla} H$

Durch jeden Punkt \vec{y} im Phasenraum führt genau eine Integralkurve $\vec{x}(t)$ mit $\vec{x}(0) = \vec{y}$.

Numerisch kann man

sie so approximieren:

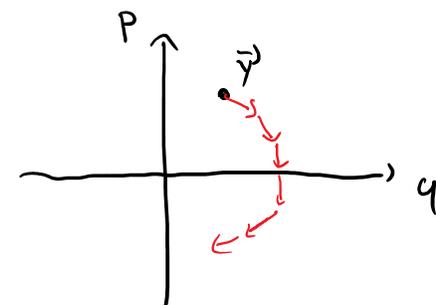
- Wähle "kleines" Zeitintervall τ

- Für ... setze ...

$$t = 0 \quad \vec{x}(t) = \vec{y}$$

$$t \in (0, \tau] \quad \vec{x}(t) = \vec{x}(0) + (t - 0) J \vec{\nabla} H(\vec{x}(0))$$

$$t \in (\tau, 2\tau] \quad \vec{x}(t) = \vec{x}(\tau) + (t - \tau) J \vec{\nabla} H(\vec{x}(\tau))$$



Satz von Picard-Lindelöf.

$$t \in (2\tau, 3\tau] \quad \vec{x}'(t) = \vec{x}'(2\tau) + (t-2\tau) \vec{J}\vec{V}'H(\vec{x}'(2\tau))$$

⋮

Das V.F. $\vec{J}\vec{V}'H$ wird abs. als stückweise linear approximiert.

Für endliche Zeiten im Limes $\tau \rightarrow 0$ exakt.

~) Es gibt Funktion

$$\Phi_s : \mathbb{R}^{2N} \rightarrow \mathbb{R}^{2N}$$

$$\vec{y} \mapsto \vec{x}'(s) \quad \text{mit } \vec{x}'(t) \text{ Integralkurve,} \\ \vec{x}'(0) = \vec{y}$$

die jeder Anfangsbedingung \vec{y} den Punkt auf der Lösung durch \vec{y} s Zeiteinheiten später zuordnet. Anders gesagt:

$$\Phi_s(\vec{x}'(t)) = \vec{x}'(t+s) \quad \forall \text{ Lsg. } \vec{x}'(t).$$

Φ_s ist der Hamiltonsche Fluß oder der Propagator.

Bsp.: Harmonischer Oszillator $H = \frac{1}{2}q^2 + \frac{1}{2}p^2$.

$$\leadsto \Phi_s = \begin{bmatrix} \cos s & -\sin s \\ \sin s & \cos s \end{bmatrix} \text{ Drehmatrix.}$$

\mathbb{R}^{2N}

Phasenraum

$H(\vec{x})$

Hamilton fkt.

$\vec{J}\vec{V}'H(\vec{x})$

Hamiltonsches Vektorfeld

$\dot{\vec{x}}(t) = \vec{J}\vec{V}'H(\vec{x}'(t))$

Hamilton-Gl.

$\Phi_s : \vec{x}'(t) \mapsto \vec{x}'(t+s)$

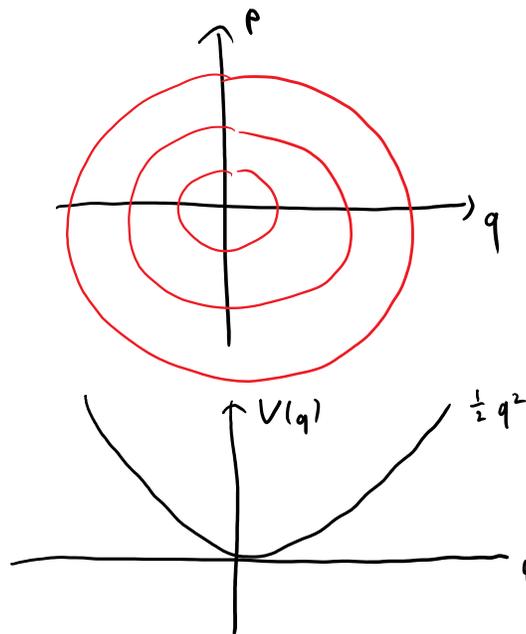
Hamiltonscher Fluß

$$\Phi_s : \vec{x}(t) \mapsto \vec{x}(t+s) \quad \text{Hamiltonscher Fluß}$$

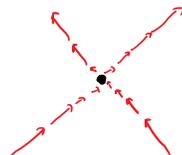
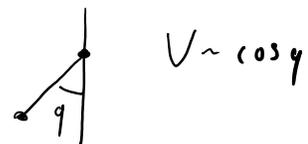
Phasenraumportraits

Qualitative Analyse der Dynamik durch Zeichnen der Trajektorien (= Integralkurven) in dem Phasenraum:

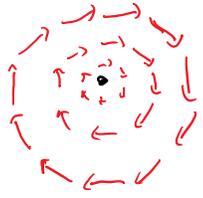
Harmon. Osz.



cos(q) - Potential $\hat{=}$ Pendel



hyperbolischer Fixpunkt
= instabil

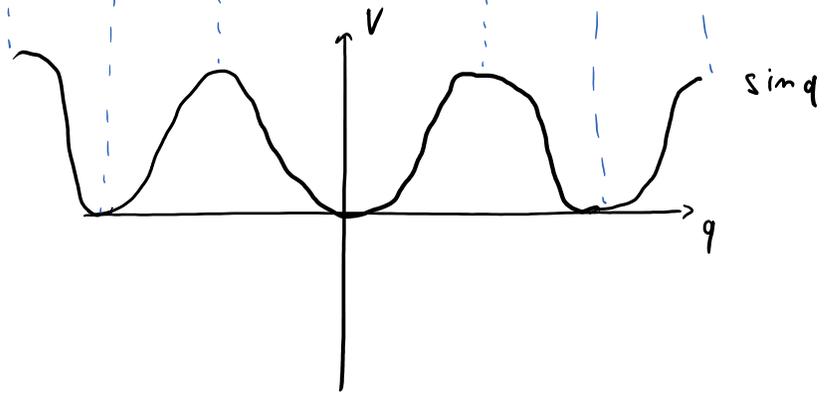
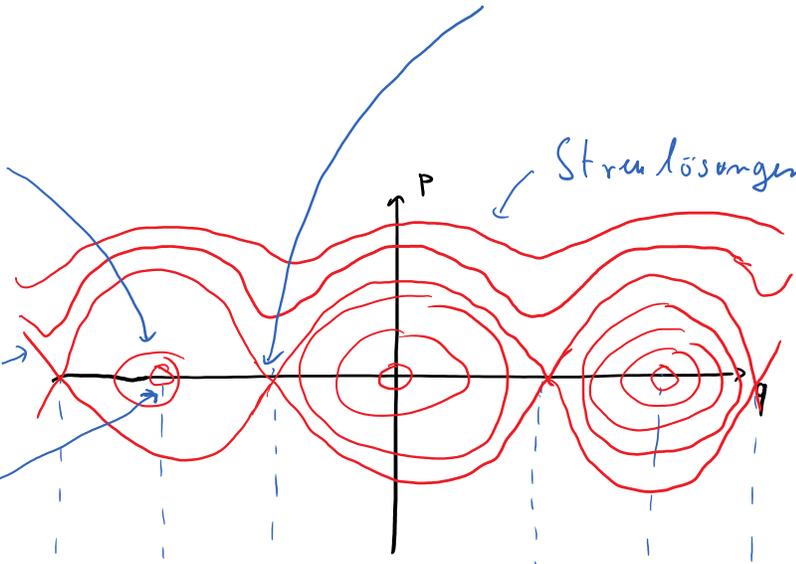


elliptischer
Fixpunkt
= stabil

gebundene
Lösungen

Streu Lösungen

Separatrix →



Sei $f: \mathbb{R}^{2N} \rightarrow \mathbb{R}$ skalarwert. Fkt. auf dem Phasenraum.

Bsp.: $f = H(\vec{q}, \vec{p})$ Energie

$f = L_x(\vec{q}, \vec{p}) = q_y p_z - q_z p_y$ Drehimpuls komponente

:

Sei $\vec{x}(t)$ Lsg. der BW Gl. $\Rightarrow f(t) := f(\vec{x}(t))$.

\Rightarrow BW Gl. für f :

$$\frac{d}{dt} f(t) = \sum_{j=1}^{2N} \frac{\partial f}{\partial x_j} \frac{\partial x_j}{\partial t} = \sum_{j=1}^{2N} \frac{\partial f}{\partial q_j} \frac{\partial H}{\partial p_j} - \sum_{j=1}^{2N} \frac{\partial f}{\partial p_j} \frac{\partial H}{\partial q_j}$$

$$\stackrel{\text{nur Umordnen}}{=} \sum_j \frac{\partial H}{\partial p_j} \frac{\partial f}{\partial q_j} - \sum_j \frac{\partial H}{\partial q_j} \frac{\partial f}{\partial p_j}$$

$$=: \{H, f\}$$

Poissonklammer.

Insbesondere:

- f ist E.H.G. $\Leftrightarrow \{H, f\} = 0$
- Hamilton-Gl. $\Leftrightarrow \dot{q} = \{H, q\}, \dot{p} = \{H, p\}$

Geometrisch: Definieren das symplektische innere Produkt auf dem Phasenraum:

$$\vec{x}, \vec{x}' \in \mathbb{R}^{2N} \mapsto \left[\begin{aligned} [\vec{x}', \vec{x}] &:= (\vec{x}', \mathcal{J} \vec{x}) \\ &= \sum_i (q_i p'_i - p_i q'_i) \end{aligned} \right]$$

$$= \sum_j (q_j p_j' - p_j q_j')$$

Das sympl. innere Produkt ist anti-symmetrisch:

$$[\vec{x}', \vec{y}'] = (\vec{x}', \underbrace{J}_{=-J} \vec{y}') = (\underbrace{J}_{=-J} \vec{x}'', \vec{y}') = (\vec{x}'', \underbrace{J^T}_{=-J} \vec{y}') = -[\vec{x}'', \vec{y}']$$

Insbesondere sind alle Vektoren symplektisch selbst-orthogonal:

$$[\vec{x}', \vec{x}'] = -[\vec{x}', \vec{x}'] \Rightarrow [\vec{x}', \vec{x}'] = 0$$

Damit: Poisson-Klammer ist symplekt. inneres Produkt der Gradienten:

$$\{f, g\} = \dots = [\vec{\nabla} g, \vec{\nabla} f]$$

⚠ leider bis auf VZ

Eigenschaften der Poisson-Klammer:

① Anti-Symmetrie

$$\{f, g\} = -\{g, f\} \quad (\Rightarrow \frac{d}{dt} H(\vec{x}(t)) = \{H, H\} = 0)$$

② Bi-Linearität

$$\{f + \lambda g, h\} = \{f, h\} + \lambda \{g, h\}$$

③ Produktregel:

$$\{f, gh\} = \{f, g\}h + g\{f, h\}$$

④ Jacobi-Identität:

$$\{f, \{g, h\}\} + \{h, \{f, g\}\} + \{g, \{h, f\}\} = 0$$

zyklische Permutationen

(\Rightarrow Phasenraumkt. mit
Poisson-Klammer
sind Lie-Algebra)

⑤ Koordinatentransf.:

$$\{x_i, x_j\} = J_{ji} \Leftrightarrow \begin{cases} \{q_i, q_j\} = 0 \\ \{p_i, p_j\} = 0 \\ \{p_i, q_j\} = \delta_{ij} \end{cases}$$

Bew:

...

□

Anwendungen

① Noether, aber besser!

Satz von Noether stellt Verbindung zwischen
Symmetrien und EHG her.

Hier folgt der Zusammenhang aus (Anti-)Symmetrie der \mathcal{L} -f.

Dazu:

f EHG wenn f unter dem durch H erzeugten Fluss $\mathbb{I}_s^{(H)} : \mathbb{R}^{2N} \rightarrow \mathbb{R}^{2N}$ invariant ist.

Also:

$$f(\vec{q}) = f(\mathbb{I}_s^{(H)}(\vec{q})) \quad (f \text{ EHG})$$

$$\Leftrightarrow \{H, f\} = 0$$

$$\Leftrightarrow \{f, H\} = 0 \quad (\text{Trick! ;})$$

$$\Leftrightarrow H(\vec{q}) = H(\mathbb{I}_s^{(f)}(\vec{q})) \quad (\text{Symmetrie von } H!)$$

Super, oder? Man kann EHG selbst als Hamilton-Fkt. auffassen, deren Fluss dann die Symmetrie ist.

Bsp.: Welchen Fluss erzeugt L_3 ?

$$L_3 = q_1 p_2 - q_2 p_1. \quad \text{Löse B.W.G.:$$

$$\dot{q}_j = \frac{\partial L_3}{\partial p_j} = \begin{cases} -q_2 & j=1 \\ q_1 & j=2 \\ 0 & j=3 \end{cases} \Rightarrow \dot{\vec{q}} = \vec{e}_3 \times \vec{q}.$$

\Rightarrow

$$\dot{p}_j = -\frac{\partial L_3}{\partial q_j} = \begin{cases} -p_2 & j=1 \\ p_1 & j=2 \\ 0 & j=3 \end{cases} \Rightarrow \dot{\vec{p}} = \vec{e}_3 \times \vec{p}.$$

$\Rightarrow \mathbb{I}^{(L_3)}$ dreht Ort und Impulse jeweils um

$\Rightarrow \Phi_s^{(L_3)}$ dreht Ort und Impulse jeweils um \vec{e}_3 -Achse um Winkel s .

In der Lagrange-Formulierung haben wir mit dem Satz von Noether bereits bewiesen, dass aus Rotationssymmetrie um die z-Achse die Erhaltung der z-Komponente des Drehimpulses folgt.

Hier haben wir die Umkehrung gezeigt.

Und wir können noch mehr! Dass die Energie des harmonischen Oszillators erhalten bleibt, wussten wir schon vorher. Aber im Lagrange-Formalismus gibt es keine entsprechende Symmetrie. Das können wir nun erklären: In der Hamilton-Mechanik sehen wir, dass die Energieerhaltung der Rotationssymmetrie der Hamiltonfunktion des Oszillators im Phasenraum entspricht. Diese Symmetrie "mischt Orte und Impulse" und ist daher im Konfigurationsraum alleine nicht erkennbar.

② "EHGs sind Lie-Algebra"

Die etwas mysteriöse Jacobi-Identität sagt, dass EHG-Größen unter Poissonklammern abgeschlossen sind:

$$A, g \text{ EHG} \Rightarrow \{A, g\} \text{ EHG}$$

Bew.: $\{H, \{A, g\}\} = - \{g, \underbrace{\{H, A\}}_{=0}\} - \{A, \underbrace{\{g, H\}}_{=0}\} = 0 \quad \square$

Bsp.: Zwei Komponenten des Drehimpuls erhalten $\Rightarrow \vec{L}$ erhalten.

Bew.: $\{L_1, L_2\} = \{q_2 p_3 - q_3 p_2, q_3 p_1 - q_1 p_3\}$
 $= \underbrace{\{q_2 p_3, q_3 p_1\}}_{(2),(3),(4)} + \{q_3 p_2, q_1 p_3\}$

$$\begin{pmatrix} - \\ (2), (3), (5) \end{pmatrix} L_1 L_2 L_3, L_3 \quad \tau \quad L_1 L_2 L_3 \quad (L_1, L_2, L_3)$$

$$\begin{pmatrix} - \\ (2), (3), (5) \end{pmatrix} q_2 p_1 \quad - \quad p_2 q_1 \quad = - L_3 \quad \square$$

Anmerkung:

Mit etwas Gruppentheorie hätten wir dieses Ergebnis mit der ersten Anwendung schon vorhersagen können.

Dort haben wir gezeigt, dass Drehimpulserhaltung immer einer Rotationssymmetrie entspricht. Aber man kann sich klar machen, dass wenn man um zwei unabhängig Achsen drehen kann, dann kann man auf diese Art jede beliebige Drehung erzeugen! (Vergl. z.B. "Euler-Winkel").

Allgemeiner: Die kontinuierlichen Symmetrien eines Systems bilden immer eine **Gruppe**. Also die Verknüpfung von zwei Symmetrien ist ebenfalls eine Symmetrie. Nach (1) erzeugen die Erhaltungsgrößen (als Hamiltonfunktion gelesen) die Symmetrietransformationen (nämlich die Flüsse). Die Jacobi-Identität spiegelt auf der Ebene der Erzeuger die Tatsache wider, dass die Gruppe unter Verknüpfung abgeschlossen ist. In der mathematischen Theorie der Lie-Gruppen und ihrer Lie-Algebren kann dies in einem Rahmen verstanden werden, der viel allgemeiner als die Mechanik ist.

...Aber das ist ein Thema für den Master-Studiengang Mathematik...

③ Kanonische Quantisierung

In der QM werden Orte und Impulse durch Multiplikations- bzw. Differentialoperatoren beschrieben, die auf "Wellenfunktionen" $\psi: \mathbb{R}^N \rightarrow \mathbb{C}$ agieren:

$$\hat{Q}_j : \psi(\vec{q}) \mapsto q_j \psi(\vec{q})$$

$$\hat{P}_j : \psi(\vec{q}) \mapsto i\hbar \frac{\partial}{\partial q_j} \psi(\vec{q})$$

Man rechnet leicht die folgenden Kommutator-Relationen nach:

$$\frac{i}{\hbar} [\hat{Q}_i, \hat{Q}_j] = 0$$

$$\frac{i}{\hbar} [\hat{P}_i, \hat{P}_j] = 0$$

$$\frac{i}{\hbar} [\hat{P}_i, \hat{Q}_j] = \delta_{ij}$$

Die Orts- und Impulsoperatoren erfüllen unter dem Kommutator also die gleichen Relation wie die Orts- und Impulsfunktionen unter der Poisson-Klammer.

Man kann dieses Resultat benutzen, um das Verhalten von quantenmechanischen und klassischen Systeme miteinander in Verbindung zu setzen. Das funktioniert für Hamiltonfunktionen, die Polynome bis zur zweiten Ordnung in Orts- und Impulsoperatoren sind.

Neben dieser "kanonischen Quantisierung", die die Orts- und Impulsoperatoren in den Vordergrund stellt, gibt es z.B. auch noch die "Pfandintegralquantisierung", die direkt auf dem Wirkungsintegral aufbaut.

Aber das ist ein Thema für das nächste Semester...

Die ELG gelten in beliebigen Koordinaten \vec{q} für den Konfigurationsraum \mathbb{R}^n .

In welchen Koordinaten für den Phasenraum \mathbb{R}^{2n} gelten die Hamiltonschen Gleichungen

$$(*) \quad \dot{\vec{x}}(t) = \vec{J} \vec{\nabla}_{\vec{x}} H(\vec{x}(t)) ?$$

Zwei Motivationen:

- ① Wie im Lagrange-Formalismus: Arbeit direkt mit an das Problem angepassten Koordinaten - insbesondere bei Systemen mit Zwangsbedingungen. Bsp.: $R \in SO(3)$ für starren Körper.
- ② Vereinfache BWhl., in dem ELG'en selbst als Koordinaten gewählt werden.

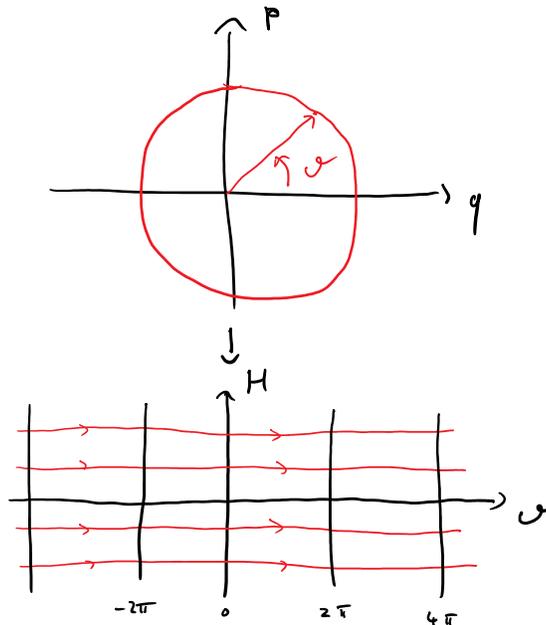
Bsp.: Harmonischer Oszillator

$$H = \frac{1}{2} (p^2 + q^2)$$

Wähle "Polar-Koordinaten":

$$(\vartheta, H)$$

$$\leadsto \begin{cases} \frac{\partial H}{\partial t} = 0 & (\text{ELG}) \\ \frac{\partial \vartheta}{\partial t} = 1 & (\text{aus bekannte Lsg. Allgemeine Herleitung} \rightarrow \text{unten}) \end{cases}$$



"Leichter geht's nicht".

Nochmal: Diese Transformation wäre im Lagrange-Formalismus nicht möglich gewesen,

da sie Orte und Impulse mischt.

Systeme, deren Fluss in diesem Sinne "linearisierbar" ist, heißen **integrabel**. Wir kommen später genauer darauf zurück.

Seien also

$$\vec{X}(\vec{x}) = \begin{pmatrix} \vec{Q}(\vec{q}, \vec{p}) \\ \vec{P}(\vec{q}, \vec{p}) \end{pmatrix}$$

beliebige Koordinaten für den \mathbb{R}^{2N} .

Mathematische Methoden Erinnerung

Wenn wir (*) auf die neuen Koordinaten umschreiben, tauchen folgende Objekte auf:

- die Jacobi-Matrix A des Koordinatenwechsels $\vec{X}(\vec{x})$, mit Elementen

$$A_{ij} = \frac{\partial X_i}{\partial x_j}$$

- die Jacobi-Matrix $B_{ij} = \frac{\partial x_i}{\partial X_j}$ der Umkehrfunktion

$\vec{x}(\vec{X})$ ist die zu A inverse Matrix:

$$\delta_{ij} = \frac{\partial X_i}{\partial X_j} = \sum_k \frac{\partial X_i}{\partial x_k} \frac{\partial x_k}{\partial X_j} = (AB)_{ij}.$$

- Die Jacobi-Matrix $A_{ij} = \frac{\partial X_i}{\partial x_j} = A_{ij}(\vec{x})$ hängt

i. d. R. von \vec{x} ab.

- Manchmal wird die Jacobi-Matrix als A^T definiert. Aufpassen!

Schreibe (*) auf neue Koordinaten um:

Linke Seite:

$$\frac{d}{dt} x_i(\vec{X}(t)) = \sum_j \frac{\partial x_i}{\partial X_j} \frac{\partial}{\partial t} X_j(t)$$

$$\leadsto \boxed{\vec{x}(t) = A^{-1} \vec{X}(t)}$$

Rechte Seite:

$$\left(\vec{\nabla}_{\vec{x}} H \right)_i = \frac{\partial H}{\partial x_i} = \sum_j \frac{\partial X_j}{\partial x_i} \frac{\partial H}{\partial X_j}$$

$$\leadsto \boxed{\vec{\nabla}_{\vec{x}} H = A^T \vec{\nabla}_{\vec{X}} H}$$

Also:

$$\vec{\nabla}_{\vec{x}} H = \mathcal{J} \vec{\nabla}_{\vec{X}} H$$

$$\Leftrightarrow A^{-1} \vec{\nabla}_{\vec{x}} H = \mathcal{J} A^T \vec{\nabla}_{\vec{X}} H$$

$$\Leftrightarrow \vec{\nabla}_{\vec{x}} H = A \mathcal{J} A^T \vec{\nabla}_{\vec{X}} H$$

Die Hamiltongl. nehmen in den \vec{X} -Koordinaten die alte Form an \Leftrightarrow die Jacobi-Matrix A erfüllt

$$(*) \quad \boxed{A \mathcal{J} A^T = \mathcal{J}}$$

Wenn das der Fall ist, heißen die \vec{X} kanonische Koordinaten, und $\vec{X}(\vec{x})$ eine kanonische Transformation.

Matrizen A , die (*) erfüllen, heißen symplektisch:

Def.: Die symplektische Gruppe $Sp(2N)$ ist die Menge der $2N \times 2N$ Matrizen A mit $A J A^T = J$.

Eigenschaften:

(0) $A \in Sp(2N) \Leftrightarrow A$ erhält das sympl. innere Produkt:

$$[A\vec{x}, A\vec{x}'] = [\vec{x}, \vec{x}'].$$

(1) $Sp(2N)$ ist Gruppe.

(2) $J \in Sp$

(3) $A \in Sp \Rightarrow A^{-1} = J A^T J^{-1}$ (vgl. $O^{-1} = O^T$).

(4) $A \in Sp(2N) \Leftrightarrow A^T \in Sp(2N)$.

(5) $A \in Sp \Rightarrow \det A = 1$

(\Leftarrow für $n=1$)

Bew.: ...

Bel.: Koordinaten \vec{X} sind kanonisch $\Leftrightarrow \{X_i, X_j\} = \{x_i, x_j\}$

Bew.:

$$\begin{aligned} \Rightarrow \{X_i, X_j\} &= [\vec{\nabla}_x X_j, \vec{\nabla}_x X_i] \\ &= [A^T \vec{\nabla}_x X_j, A^T \vec{\nabla}_x X_i] \\ &\stackrel{J}{=} [\vec{\nabla}_x X_j, \vec{\nabla}_x X_i] \end{aligned}$$

$$A \in S_p$$

$$= [\vec{e}_i, \vec{e}_i] = \{x_i, x_j\}$$

"€" ...

□

Bsp:

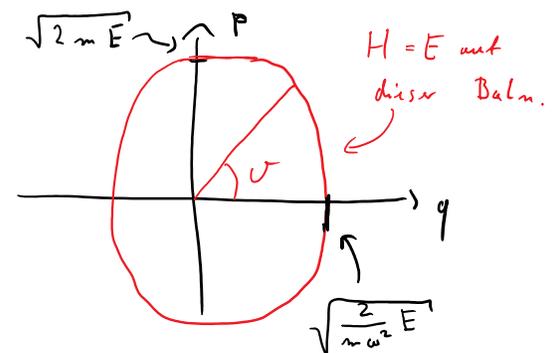
o Harmonischer Oszillator (diesmal mit $m, \omega \neq 1$).

$$H(q, p) = \frac{p^2}{2m} + \frac{1}{2} m \omega^2 q^2$$

Wähle:

$$P(q, p) = \frac{1}{\omega} H(q, p)$$

$$Q(q, p) = \arctan\left(m \omega \frac{q}{p}\right)$$



Dies sind kanonische Koordinaten. Bew.:

$$\{P, Q\} = \frac{\partial P}{\partial p} \frac{\partial Q}{\partial q} - \frac{\partial P}{\partial q} \frac{\partial Q}{\partial p}$$

$$= \frac{1}{\omega} \frac{1}{m} p \arctan'(m \omega \frac{q}{p}) \frac{m \omega}{p} - m \omega q \arctan'(m \omega \frac{q}{p}) m \omega q \frac{-1}{p^2}$$

$$\left[\begin{array}{l} \arctan'(x) \\ = \frac{1}{1+x^2} \end{array} \right] \rightarrow = \frac{1}{1+m^2 \omega^2 \frac{q^2}{p^2}} \left(1 + m^2 \omega^2 \frac{q^2}{p^2} \right) = 1 \quad \checkmark$$

$$\{P, P\} = 0 = \{Q, Q\} \quad (\text{gilt immer})$$

□

Es gelten für $P(t), Q(t)$ also die Hamilton'schen

Gleichungen mit $H(Q, P) = \omega P$:

$$\dot{Q} = \frac{\partial H}{\partial P} = \omega \quad \dot{P} = -\frac{\partial H}{\partial Q} = 0.$$

Zusammenfassung:

- Koordinaten, bzgl. derer die Bewegungsgleichungen die Hamiltonsche Form annehmen, heißen **kanonisch**.
- Kanonische Koordinaten X erkennt man daran, dass die Poissonklammern der Koordinatenfunktionen die gleiche Form haben wie die von x .
- Das Ganze hat irgendwas mit symplektischer Geometrie zu tun. Gut für die die's verstehen - aber keine Katastrophe, wenn man das zu abstrakt findet.

An dieser Stelle noch unklar:

- Gibt es eine Bedeutung des Ganzen, oder ist das nur ein mathematischer Trick?
- Mit dem Poissonklammer-Kriterium kann man kanonische Transformationen erkennen. Aber wie findet man sie?

Wo kommen kanonische Transf. her?

Eine Quelle: Hamiltonsche Flüsse $\Phi_s^{(H)}: \mathbb{R}^{2N} \rightarrow \mathbb{R}^{2N}$ sind kanonisch.

Satz von Liouville

Bew.: zu zeigen: mit Jacobi-Matrix $A(s)_{ij} = \frac{\partial \Phi_s^{(H)}(\bar{x})_i}{\partial x_j}$

gilt $A(s) \rfloor A(s)^T = \mathbb{J}$.

① "infinitesimale" kanonische Transformationen

Taylor: $A(s) = \mathbb{1} + t M + O(t)^2$

$$\Rightarrow \left. \frac{d}{ds} \right|_0 A(s) \rfloor A(s)^T = M \rfloor + \rfloor M^T \stackrel{!}{=} 0$$

Vergl. Rechnung für $SO(2)$.

② Berechne Jacobi-Matrix $A(s)$ des Flusses zu erster Ordnung:

$$\Phi_s^{(H)}(\bar{x}) = \bar{x} + s \rfloor \vec{\nabla} H(\bar{x}) + O(s^2)$$

$$\begin{aligned} \Rightarrow A(s)_{ij} &= \frac{\partial}{\partial x_j} \left(\Phi_s^{(H)}(\bar{x}) \right)_i = \delta_{ij} + s \sum_k \rfloor_{ik} \underbrace{\frac{\partial^2 H}{\partial x_j \partial x_k}}_{=: \tilde{M}_{jk}} + O(s^2) \\ &= \left(\mathbb{1} + s \underbrace{\rfloor \tilde{M}}_M + O(s^2) \right)_{ij} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \text{Damit: } M \rfloor + \rfloor M^T &= \rfloor \tilde{M} \rfloor + \rfloor \tilde{M}^T \rfloor^T \\ &= \rfloor \tilde{M} \rfloor - \rfloor \tilde{M} \rfloor = 0 \quad \checkmark \end{aligned}$$

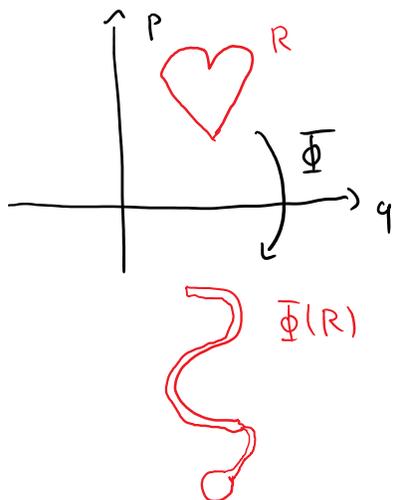
Der Fluss ist also "zu erster Ordnung" kanonisch.

③ Erweitern auf beliebig große Zeiten:

$$\frac{\partial}{\partial s} \Phi_s^{(t)} = \frac{\partial}{\partial \tau} \Big|_{\tau=0} \Phi_{s+\tau}^{(t)} = \frac{\partial}{\partial \tau} \Big|_{\tau=0} \Phi_s^{(t)} \cdot \Phi_\tau^{(t)} = A(s) M$$

$$\begin{aligned} \Rightarrow \frac{\partial}{\partial s} A(s) \rfloor A(s)^T &= A M \rfloor A^T + A \rfloor M^T A^T \\ &= A (M \rfloor + \rfloor M^T) A^T = 0 \quad \square \end{aligned}$$

Eine Konsequenz: Hamiltonsche Flüsse erhalten Phasenraumvolumen:

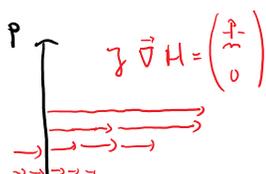


$$\int_{\vec{x} \in \Phi(R)} d^{2N} \vec{x} = \int_{\vec{x} \in R} \underbrace{\left| \det \frac{\partial \Phi}{\partial \vec{x}} \right|}_{=1} d^{2N} \vec{x} = \int_{\vec{x} \in R} d^{2N} \vec{x}$$

" , da Jacobi-Matrix $\in Sp$.

Bsp.: Freies Teilchen $H = \frac{p^2}{2m}$

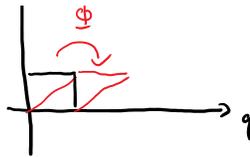
$$\Rightarrow \Phi_s^{(H)} \left(\begin{pmatrix} q \\ p \end{pmatrix} \right) = \begin{pmatrix} q + s \frac{p}{m} \\ p \end{pmatrix} \Rightarrow A = \begin{bmatrix} 1 & \frac{s}{m} \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$$



A ist Scherung.

Erhält Fläche

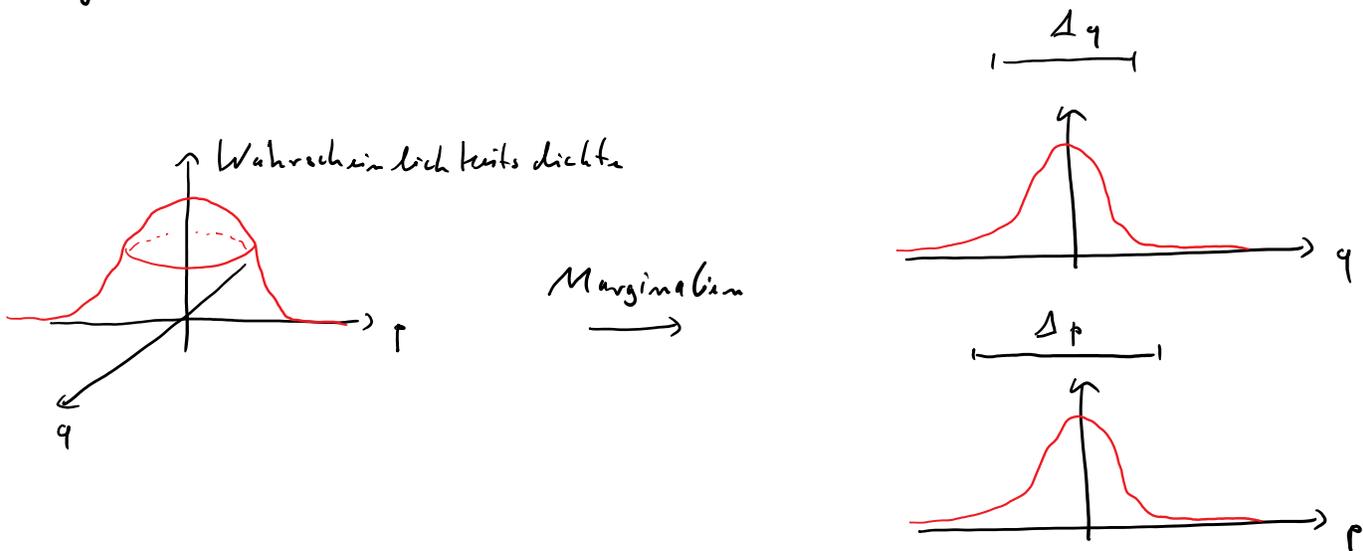
(1.1.1.1) .1 .1



Erhält Fläche
($\det A = 1$), aber weder
Längen noch Winkel.

Ausblick: Querschnitte im Quantenphasenraum

Es gibt Quantenzustände, die bei Orts- und Impulsmessungen die gleiche Statistik liefern, wie Gauß'sche Wahrscheinlichkeitsverteilungen auf dem Phasenraum:



Auf Grund der Unschärferelation $\Delta q \Delta p \geq \hbar/2$, kann die Verteilung nicht beliebig schmal konzentriert sein.

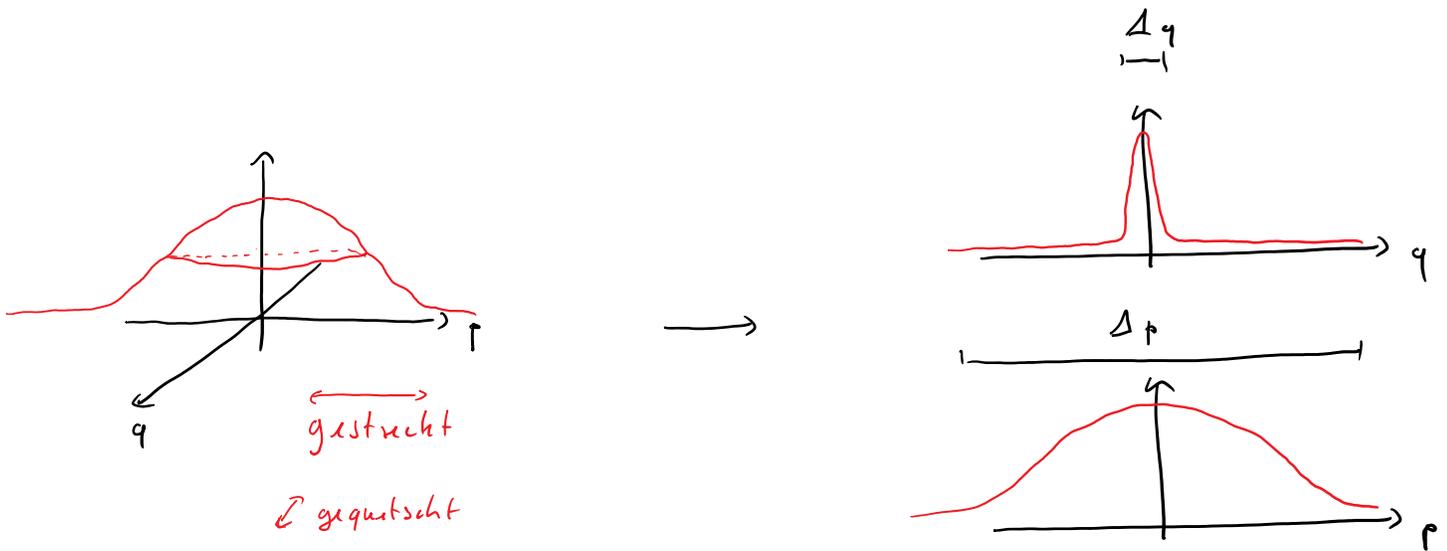
Lineare kanonische Transformationen können quantenmech.

realisiert werden. Bsp.: Rotationen $\Phi(\vec{x}) = \begin{bmatrix} \cos s & -\sin s \\ \sin s & \cos s \end{bmatrix} \cdot \vec{x}$

Scherungen $\Phi(\vec{x}) = \begin{bmatrix} 1 & \frac{s}{m} \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \cdot \vec{x}$

$$\text{"Quetschungen"} \quad \Phi(\vec{x}) = \begin{bmatrix} e^k & 0 \\ 0 & e^{-k} \end{bmatrix} \cdot \vec{x}$$

Quetschungen reduzieren Unschärfe entlang einer Achse, auf Kosten der anderen:



Interferometer, die mit "gequetschtem Licht" arbeiten, erreichen höhere Genauigkeit.

Weltweit führend dabei: GEO600 bei Hannover.

Ziel hier ist es, weitere kanonische Transf. zu finden.

— Dazu:

Auch die Hamiltonschen Gleichungen können aus einem
Stationaritätsprinzip abgeleitet werden:

$(\vec{q}(t), \vec{p}(t))$ löst Hamiltongl.

⇔ Die Kurve ist stationär für das Funktional

$$(*) \quad \int_{t_0}^{t_1} [L(\vec{q}(\cdot), \dot{\vec{q}}(\cdot))] := \int_{t_0}^{t_1} (\vec{p}(t) \cdot \dot{\vec{q}}(t) - H(\vec{q}(t), \vec{p}(t))) dt$$

bzgl. Variationen $\vec{\delta}_q(\cdot), \vec{\delta}_p(\cdot)$ mit $\vec{\delta}_q(t_0/t_1) = 0$

Bew.: Wie bei ELG ... \square

Ann.:

- $\vec{p}(t_0/t_1)$ muss unter Variationen nicht festgehalten werden.
- Wenn $H = \vec{p} \cdot \dot{\vec{q}} - L$ durch Legendre-Transf. aus einer Lagrange-Fkt. hervorgeht, dann ist der Integrand in (*) einfach L . In diesem Fall ist (*) mit dem zuvor eingeführten Prinzip identisch. (*) gilt aber allgemein.

Seien nun \vec{Q}, \vec{P} neue Koordinaten, s.d. es eine Funktion F
auf dem Phasenraum gibt, s.d. entlang jeder Bahn

$$(\square) \quad \vec{p} \cdot \dot{\vec{q}} = \vec{P} \cdot \dot{\vec{Q}} + \frac{d}{dt} F$$

gilt. Dann ist (für beliebig = Hamilton-Fkt.):

$$S'[(\vec{Q}(\cdot), \vec{P}(\cdot))] = S'[(\vec{q}'(\cdot), \vec{p}'(\cdot))] + \underbrace{F(t_0) - F(t_1)}_{\text{const.}}$$

Da der letzte Term nicht von der Bahn abhängt, ist

$$(\vec{q}'(\cdot), \vec{p}'(\cdot)) \text{ stationär} \Leftrightarrow (\vec{Q}(\cdot), \vec{P}(\cdot)) \text{ stationär}$$

Aber auch:

$$\begin{array}{ccc} \Updownarrow & & \Downarrow \\ \dot{q}_i = \frac{\partial H}{\partial p_i} & , & \dot{p}_i = -\frac{\partial H}{\partial q_i} \end{array} \quad \begin{array}{ccc} & & \\ Q_i = \frac{\partial H}{\partial P_i} & , & P_i = -\frac{\partial H}{\partial Q_i} \end{array}$$

In anderen Worten: Wenn (\square) mit geeignetem F gilt, sind \vec{Q}, \vec{P} kanonisch.

(Zumindest lokal) kann man für jede kanonische Transform. ein solches F finden. Das folgt aus der Theorie der Differentialformen - und soll uns hier nicht weiter beschäftigen...

Sinn dieser Umformulierung ist, dass man die Konstruktion umkehren kann, und aus \vec{p}', \vec{q}' und F kanonische \vec{Q}, \vec{P} erzeugen kann.

Das geht so:

① Wähle ein $F: \mathbb{R}^{2N} \rightarrow \mathbb{R}$.

② Definiere $\vec{Q}(\vec{q}', \vec{p}')$ in dem

$$P_i = \frac{\partial F(\vec{q}', \vec{Q})}{\partial q_i}$$

nach \vec{Q} aufgelöst wird.

③ Setze dann

$$P_i(\vec{q}', \vec{p}') = - \frac{\partial F(\vec{q}', \vec{Q}(\vec{q}', \vec{p}'))}{\partial Q_i}$$

Dann ist

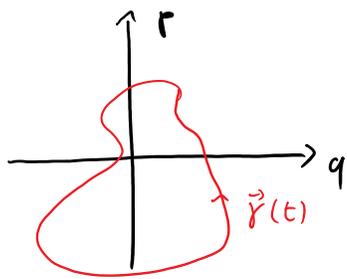
$$\begin{aligned}\frac{d}{dt} F(\vec{q}(t), \vec{Q}(t)) &= \sum_i \frac{\partial F}{\partial q_i} \dot{q}_i + \sum_i \frac{\partial F}{\partial Q_i} \dot{Q}_i \\ &= \vec{P} \cdot \dot{\vec{q}} - \vec{P} \cdot \dot{\vec{Q}},\end{aligned}$$

aber das ist (□)! Die durch ① - ③ definierten \vec{Q} , \vec{P} sind also kanonisch!

F ist die Erzeugende des Koordinatenwechsels.

Die Technik kann auf viele Arten verallgemeinert werden (z.B. auf zeitabhängige Transformationen, oder man kann F als Fkt. anderer Koordinaten ausdrücken...)

— Ausblick: Mehr zum Wirkungsintegral —————



Sei $N=1$ und

$$\vec{\gamma}: [0, 1] \rightarrow \mathbb{R}^2$$

$$\vec{\gamma}(t) = \begin{pmatrix} q(t) \\ p(t) \end{pmatrix}$$

eine geschlossene Trajektorie: $\vec{\gamma}(0) = \vec{\gamma}(1)$.

Dann ist

$$\oint_{\gamma} p dq := \int_{t=0}^1 p(t) \dot{q}(t) dt = \text{von } \gamma \text{ eingeschlossene Fläche.}$$

↑
Satz von Green
↑
(c.l.t.)

(Stöckes)

Da kanonische Transformationen Volumen erhalten, ist

$$\int_{\gamma} P dQ = \int_{\gamma} p dq$$

für beliebige kanonische Koordinaten (Q, P) . (Das folgt auch aus (E) ...).

Die Fläche ist also eine koordinatenunabhängige Eigenschaft der Bahn.

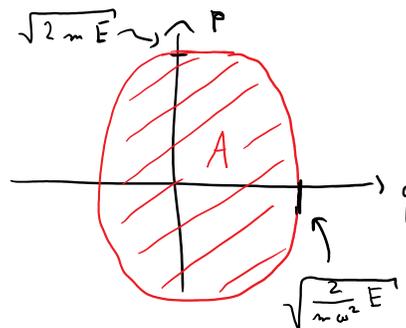
Anfang des 20. Jahrhunderts kam das Wirkungsintegral kurzzeitig zu besonderer Prominenz. Bevor die moderne Quantentheorie entwickelt war, wurde eine ad hoc-Modifizierung der Hamiltonschen Mechanik postuliert:

Die **Bohr-Sommerfeldsche Quantisierungsbedingung** sagt, dass geschlossene Bahnen nur dann realisiert werden können, wenn das Wirkungsintegral ein ganzzahliges Vielfaches des **Planckschen Wirkungsquantums** $h = 6.63 \times 10^{-34}$ Js ist.

Die klassische Hamiltonmechanik zusammen mit der Quantisierungsbedingung kann für einige quantenmechanische Systeme richtige Vorhersagen machen - z.B. für die Energieniveaus des harmonischen Oszillators und des Wasserstoffatoms. Eine systematische Theorie konnte man auf ihr aber nicht aufbauen. Ab den 1930er Jahren wurde diese "alte Quantentheorie" durch die heute akzeptierte Version ersetzt.

$$\int_{\gamma} p dq = m h \quad m \in \mathbb{N}$$

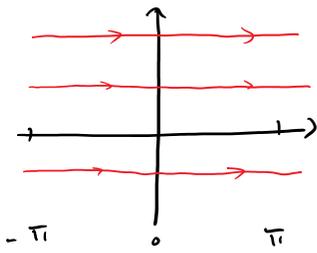
Harmonischer Oszillator:



Fläche der Ellipse

$$= \pi E \frac{2}{\omega} \stackrel{!}{=} m h$$

$$\Leftrightarrow E = \frac{h}{2\pi} m \omega = \hbar m \omega$$



Zuvor gezeigt: Fluss des harmonischen Osz.
kann durch kanonische Trafo
"geglättet" werden.

$H(Q, P) = \omega P$ hängt dann
nur von dem "Impuls" P ab.

Allgemeiner: Gegeben System mit N FHG. Schön wäre eine
kanonische Trafo $(\vec{q}, \vec{p}) \mapsto (\vec{\varphi}, \vec{I})$ s.d. $H = H(\vec{I})$ nicht von
den φ 's abhängt. Die BWG.l.

$$\ddot{q}_i = \frac{\partial H}{\partial I_i}, \quad \dot{I}_i = -\frac{\partial H}{\partial \varphi_i} = 0$$

sind dann direkt lösbar:

$$\vec{I}(t) = \vec{I}(0), \quad \varphi_i(t) = \omega_i t, \quad \omega_i = \frac{\partial H}{\partial I_i}(\vec{I}(0)).$$

Das Hamiltonsche VF $\int \vec{\nabla} H(\vec{I}) = \begin{pmatrix} \vec{\omega}(\vec{I}) \\ 0 \end{pmatrix} = \text{const.}$ ist dann "geglättet".

Die I_1, \dots, I_n sind n EHG. Da die $(\vec{\varphi}, \vec{I})$ kanonisch sind, gilt

$$\{I_i, I_j\} = 0.$$

Man sagt: die I_i 's stehen in Involution zueinander.

Allgemeiner:

- Systeme mit N FHG, die N EHG F_1, \dots, F_N haben,
die in Involution zueinander stehen ($\{F_i, F_j\} = 0$), heißen
integrabel.

die in Involution zueinander stehen ($\{I_i, I_j\} = 0$), heißen integrabel.

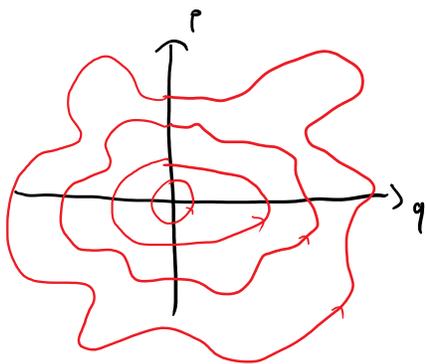
• [Liouville] Man kann dann kanonische Koordinaten

$\vec{Q}(q, p), \vec{I}(\vec{F}(\vec{q}, \vec{p}))$ finden, s.d. $H = H(I)$ ist.

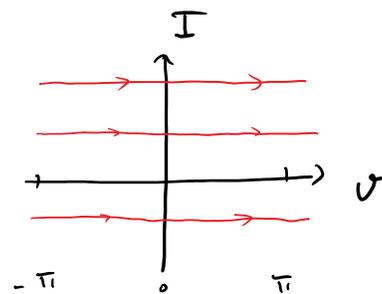
Ab jetzt betrachten wir der Einfachheit halber nur gebundene Lsg., also solche, die einen kompakten Bereich des Phasenraums nie verlassen. Man kann dann die \vec{Q} 2π -periodisch wählen ("Winkel-Variablen").

Beispiele

$N=1$ Da H erhalten ist (und da $\{H, H\} = 0$), sind alle Systeme mit einem F.H.G. integrabel.



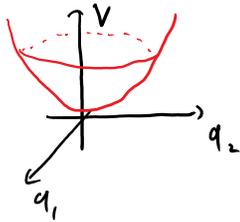
gebundene Lsg. für $N=1$



glättender Koordinatenwechsel immer möglich.

$N=2$

isotrope harm. Schwingung in 2-D



$$\begin{aligned}
 H(\vec{q}, \vec{p}) &= \frac{\|\vec{p}\|^2}{2m} + \frac{1}{2} m \omega^2 \|\vec{q}\|^2 \\
 &= \underbrace{\left(\frac{p_1^2}{2m} + \frac{1}{2} m \omega^2 q_1^2 \right)}_{=: F_1(q_1, p_1)} + \underbrace{\left(\frac{p_2^2}{2m} + \frac{1}{2} m \omega^2 q_2^2 \right)}_{=: F_2(q_2, p_2)}.
 \end{aligned}$$

\rightarrow F_1 und F_2 sind EHK in Involution.
 $\sum \cdot \cdot \cdot$
 - Rechnung

$N=3$

Teilchen im Zentralpotential:

$\{H, L_i\} = 0$, aber die Drehimpulse $\{L_i, L_j\} = -\epsilon_{ijk} L_k$
 stehen nicht in Involution...

... Trick (wichtig in QM!):

$$F_1 = H, \quad F_2 = \|\vec{L}\|^2, \quad F_3 = L_3.$$

$$\begin{aligned}
 \{F_2, F_3\} &= \{L_1^2 + L_2^2 + L_3^2, L_3\} \\
 &= \{L_1^2, L_3\} + \{L_2^2, L_3\} \\
 &= 2L_1 \{L_1, L_3\} + 2L_2 \{L_2, L_3\} \\
 &= 2(L_1 L_2 - L_2 L_1) = 0.
 \end{aligned}$$

Wie sehen die Trajektorien integrierbarer Systeme aus?

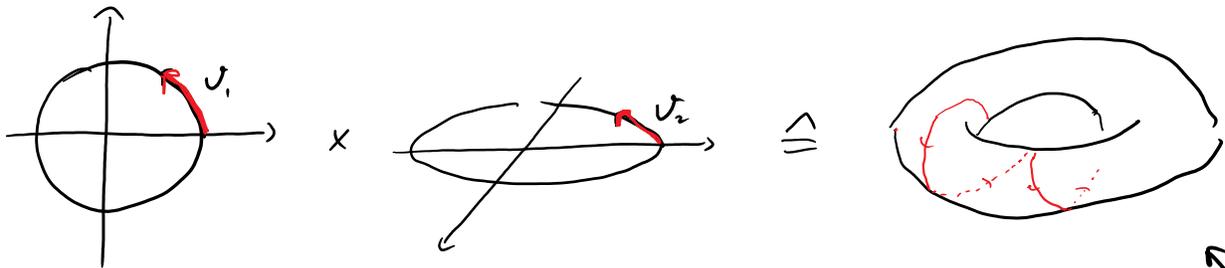
Hin: $N=2$.

Für gegebenes \vec{I} laufen die Winkelvariablen

$$\varphi_i(t) = \omega_i(\vec{I}) t + \varphi_i(0)$$

mit gleichförmiger Winkelgeschw. $\omega_i (\mathbb{I}^1)$ jeweils im Kreis.

Geometrisch ist das Produkt zweier Kreise ein Torus ("donut").



In diesem Bild windet sich die Trajektorie um den Torus.

Wenn die Umlauffrequenzen im rationalen Verhältnis zueinander stehen

$$\frac{\omega_1}{\omega_2} = \frac{k}{l} \quad k, l \in \mathbb{N}$$

fällt die Kurve nach l Umläufen der zweiten Variable auf sich selbst. \leadsto "Resonanter Torus".

Wenn

$$\frac{\omega_1}{\omega_2} \notin \mathbb{Q}$$

fällt die Trajektorie den Torus gleichmäßig.

1-D Kurve im \mathbb{R}^4 .

2-D Fläche im \mathbb{R}^4 .

Es ergibt sich folgendes Bild: Die Bahnen eines integrablen Systems mit N Freiheitsgraden sind (quasi-)periodisch, und liegen auf N -dimensionalen Tori im $2N$ -dimensionalen Phasenraum.

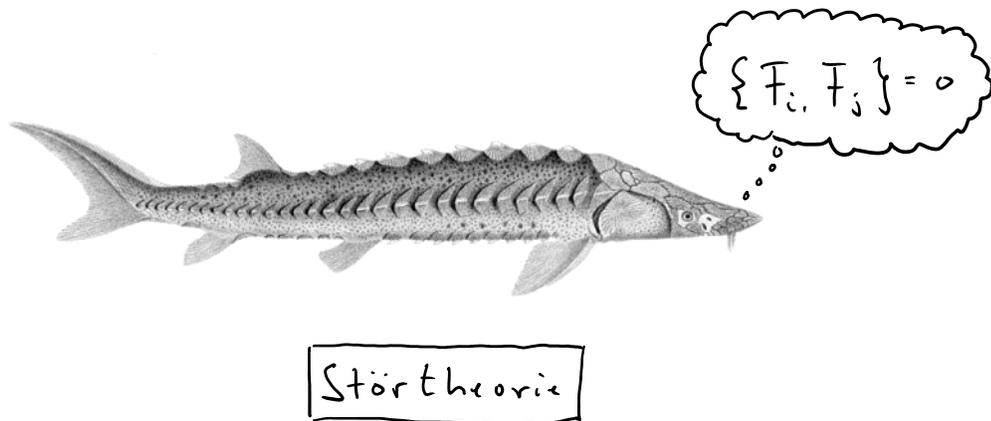
Integrable Systeme gelten als das Musterbeispiel geordneter Bewegung (wie chaotisches Verhalten aussieht, werden wir später sehen).

Die Rechnung, die die Integrabilität eines Teilchens mit Zentralpotential gezeigt hat, lässt sich leicht auf n Teilchen im Zentralpotential verallgemeinern (jedes neue Teilchen hat 3 FHG - aber seine Energie, seine

Drehimpuls-z-Komponente und sein Gesamtdrehimpuls sind drei EHGs; alle stehen in Involution zueinander). Wenn man die Kräfte zwischen den Planeten vernachlässigt, ist das Sonnensystem also integrabel. Da diese Kräfte klein sind - verglichen mit der Anziehungskraft der Sonne - kann man versuchen, das Sonnensystem als "Störung" eines idealen, integrablen Systems mit Hilfe der klassischen Störtheorie zu behandeln. Für lange Zeit war es eine der heißesten Fragen der Physik (und Mathematik), ob schwach gestörte Systeme weiterhin quasi-periodische Orbits auf Tori haben. In der ersten Hälfte des 20. Jahrhunderts gab das KAM-Theorem im Prinzip eine positive Antwort darauf - allerdings unter vielen restriktiven Bedingungen (z.B. überleben resonante Tori nicht), und nur für sehr kleine Störungen. In unserem Sonnensystem sind die Kopplungen zwischen den Planeten zu stark - selbst wenn die Sonne unendlich lang scheinen würde, würde das System nicht überleben (tut mir Leid, die schlechte Nachricht überbringen zu müssen).

Während die Himmelsmechaniker des 19. Jahrhunderts zeigen wollten, dass mechanische Systeme stabil und integrabel sind, hoffte eine andere Gruppe auf das gegenteilige Resultat: Die junge statistische Physik. Boltzmann hatte vorgeschlagen, makroskopische Systeme so zu beschreiben, als würden sie zufällig jeden Zustand annehmen, der mit der Gesamtenergie kompatibel ist. Mit Hilfe dieses Axioms konnte man die Vorhersagen der Thermodynamik erklären - eine äußerst erfolgreiche Theorie, die aber bis dahin keine mikroskopische Rechtfertigung hatte. Das Problem ist nur: Warum war Boltzmanns Annahme gerechtfertigt? Dies ist eine Diskussion, die bis heute anhält. Ein früher Erklärungsansatz war die **Ergodenhypothese**. Sie besagt, dass die Trajektorien mechanischer Systeme alle mit der Energie verträglichen Zustände gleich häufig durchlaufen. Die Mittlung über zufällige Zustände in der statistischen Physik kann man dann als Zeitmittlung über eine Trajektorie verstehen. Sind mechanische Systeme ergodisch? Integrale sind das sicher nicht! Die Menge der Zustände gegebener Energie ist $(2N-1)$ -dimensional, die Tori integrierbarer Systeme haben aber nur N Dimensionen. Ein integrables System kann "die meisten" Zustände gegebener Energie also nie erreichen. Aber vielleicht sind integrable Systeme die Ausnahme...

Welche mechanischen Systeme sind nun integrabel, stabil, chaotisch, ergodisch? Dies sind sehr schwierige Fragen, die bis heute nicht vollständig verstanden sind. Seit Mitte der 70er Jahre spielen Computersimulationen eine große Rolle für diese Probleme. Das werden wir uns als nächstes ansehen...



Chaos: Logistische Gleichung als einfaches Modell (optional)

Sunday, 30 December 2018 19:01

TBD.

Das in der Vorlesung verwendete Mathematica-
Notebook befindet sich auf der Kurswebseite.

Für $N=1$ sind hamiltonsche Systeme in 2-D visualisierbar, aber alle integrabel.

Für $N=2$ könnte es interessantes Verhalten geben.

Aber: Phasenraum ist 4-dim. \rightarrow nicht offensichtlich visualisierbar.

Zwei Tricks:

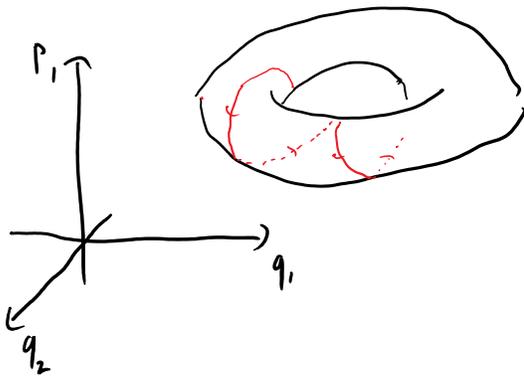
a) Nutze Energieerhaltung \Rightarrow Bahnen liegen in 3-D Untermenge

\Rightarrow Gegeben drei Koordinaten (z.B. q_1, q_2, p_1) kann i.d.R. vierte Koordinate eindeutig durch Invertierung von

$$H(q_1, q_2, p_1, p_2) = E$$

(z.B. nach p_2) bestimmen.

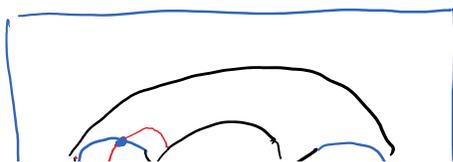
$\Rightarrow \begin{pmatrix} q_1(t) \\ q_2(t) \\ p_1(t) \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^3$ enthält vollst. Information.



$$\text{---} \equiv \begin{pmatrix} q_1(t) \\ q_2(t) \\ p_1(t) \end{pmatrix}$$

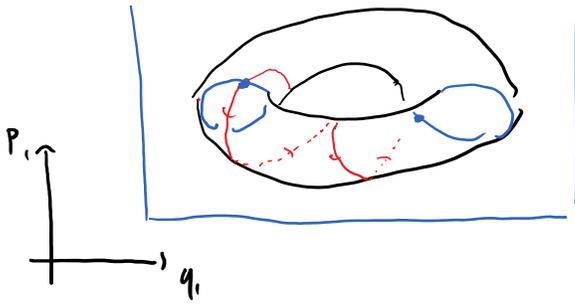
Erwartetes Bild für integrables System.

b) Oft ist 2-D-Darstellung übersichtlicher. Wähle dazu



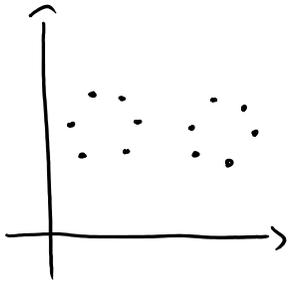
Ebene (z.B. q_1-p_1 -Ebene $\subset \mathbb{R}^4$),

und zeichne den Schnitt der Bahn mit d. Ebene.



und zeichne den Schnitt der Bahn mit der Ebene.

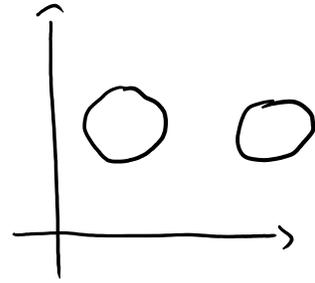
→ Poincaré-Schnitt



Erwartetes Bild für Poincaré-Schnitt für integrables System.

Resonanter Torus

Nicht-resonanter Torus

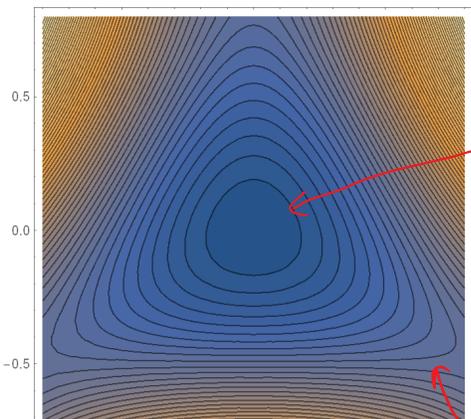


Bsp.: Harmon-Herdes-System

$$N=2$$

$$H = \underbrace{\frac{1}{2} (p_1^2 + p_2^2) + \frac{1}{2} (q_1^2 + q_2^2)}_{\text{harmonisches Potential}} + \underbrace{q_1^2 q_2 - \frac{1}{3} q_2^3}_{\text{anharmonische Terme}}$$

"Star in cylindrically symmetric galactic potential". Ok....

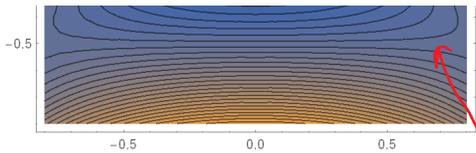


q_1, q_2 klein → Terme 3. Ordnung vernachlässigbar

→ harmonisches Potential

→ integrables Verhalten

q_1, q_2 groß → anharmonische Terme



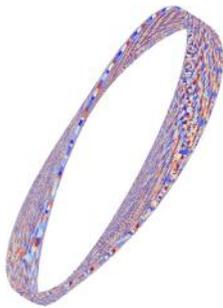
q_1, q_2 groß \rightarrow anharmonische Terme
 \rightarrow Verhalten umkehr.

Numerik:

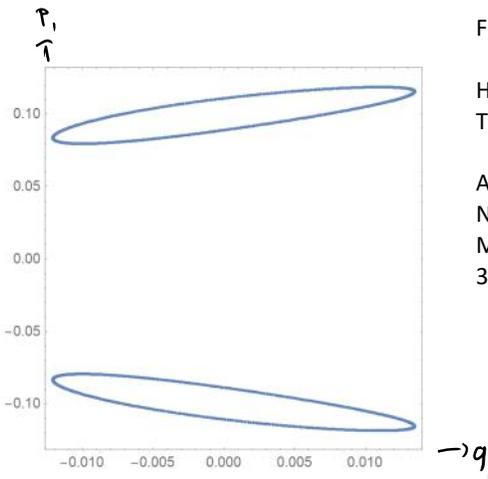
Mathematica: Löse DGL numerisch
 (Code auf Webseite)

```
solveHenons[x0_, y0_, py_, e_, tf_] := Reap@NDSolve[{{
  y1'[t] == y3[t],
  y2'[t] == y4[t],
  y3'[t] == -y1[t] (1 + 2 y2[t]),
  y4'[t] == -y1[t]^2 + (-1 + y2[t]) y2[t]},
  {y1[0] == x0, y2[0] == y0, y3[0] == Sqrt[2/3 y0^3 + 2 e - x0^2 - y0^2 - 2 x0^2 y0 - py^2], y4[0] == py}},
  {y1[t], y3[t], y2[t], y4[t]}, {t, tf}, Method -> {"EventLocator", "Event" -> y2[t], "EventAction" -> Sow[{y2[t], y4[t]}], "EventLocationMethod" -> "LinearInterpolation",
  "Method" -> {"SymplecticPartitionedRungeKutta", "DifferenceOrder" -> 4, "PositionVariables" -> {y1[t], y2[t]}},
  StartingStepSize -> 0.25, MaxSteps -> Infinity]
```

$q_1(0)$ $q_2(0)$ $p_1(0)$ E_2 Zeitdauer der Simulation
 \downarrow \downarrow \downarrow \downarrow \downarrow
 visualize[0.02, 0.02, 0.1, 0.02, 5000]



\uparrow
 q_1, q_2, p_1 Raum

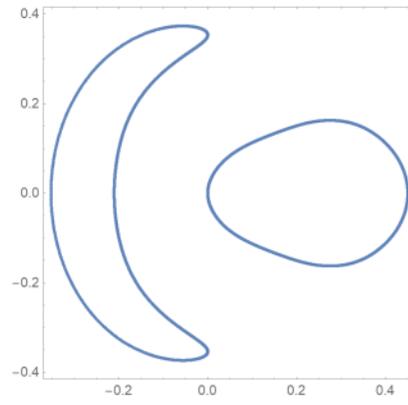
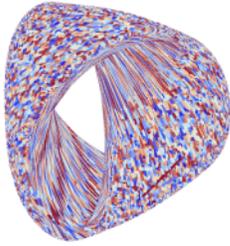


Für kleine Energie erwarten wir integrables Verhalten.

Hier zu sehen ist nicht-resonanter Torus. Links ist die Trajektorie in 3D, rechts der Poincaré-Schnitt.

Auf der Webseite des Kurses ist das Mathematica-Notebook zum Herunterladen bereitgestellt. Mit Mathematica (z.B. im CIP-Pool nutzbar) kann man die 3D-Trajektorie drehen.

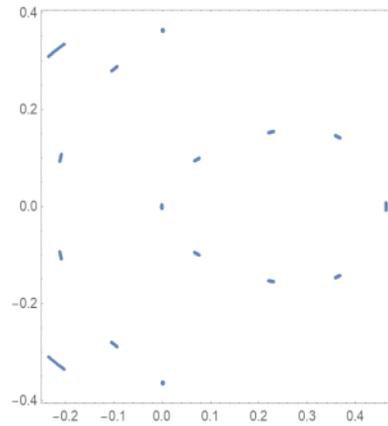
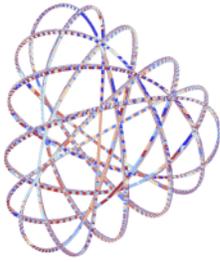
```
visualize[0, 0, 0, 1/12, 20000]
```



Andere Anfangsbedingungen, immer noch niedrige Energie.

Der Torus ist verzerrt. Das ist weiterhin mit integrierbarem Verhalten kompatibel: erst nach einem kanonischen Koordinatenwechsel erhält man den "Standard-Donut".

```
visualize[0, 0, 0, 0.088, 2000]
```



Ein resonanter Torus.

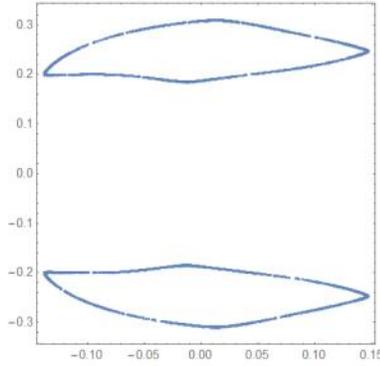
Schön, ne?

```

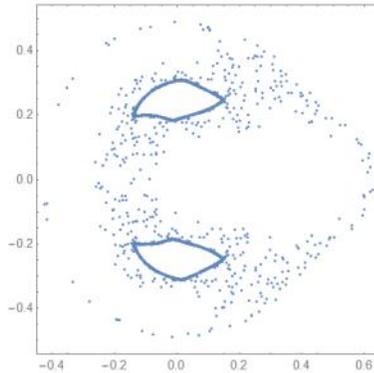
In[11]= visualize[0.02, 0.02, 0.19, 1 / 8, 20000]
visualize[0.02, 0.02, 0.19, 1 / 8, 30000]
visualize[0.02, 0.02, 0.19, 1 / 8, 100000]

```

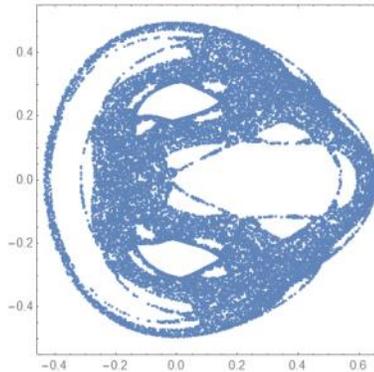
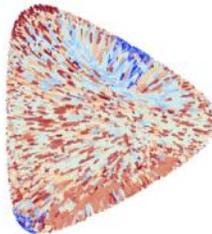
Out[11]=



Out[12]=



Out[13]=



Jetzt wird's spannender.

Wir wählen eine höhere Energie.

Nach 20k Zeiteinheiten sieht die Trajektorie und der Poincare-Schnitt noch integabel aus.

...nach 30k Zeiteinheiten verlässt die Trajektorie den Torus!

(Achtung: Die Skalierung der Achsen hat sich verglichen mit dem letzten Bild geändert).

...nach 50k Zeiteinheiten sehen wir nun eindeutig nicht-integrables Verhalten.

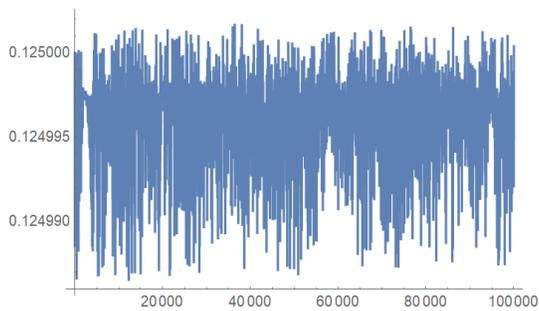
Der Poincare-Schnitt ist eine komplizierte zwei-dimensionale Fläche. Der topologische Abschluss der Trajektorie ist also eine drei-dimensionale Untermenge des vierdimensionalen Phasenraums. Da ein Torus zwei-dimensional ist, haben wir den integralen Bereich hiermit verlassen.

Das Muster sieht nicht so aus, als ob man eine analytische Beschreibung finden könnte! Tatsächlich treten in solchen Probleme häufig fraktale Muster auf.

Interessant ist, dass wir während der ersten 20k Zeiteinheiten keine Spur von Chaos gesehen haben. Das sollte uns nachdenklich h stimmen: Es zeigt, dass es nicht leicht ist, aus numerischen oder empirischen Beobachtungen auf Ordnung zu schließen. Man kann nur hoffen, dass der Keim des Chaos z.B. in unserem Sonnensystem nicht gleichermaßen angelegt ist.

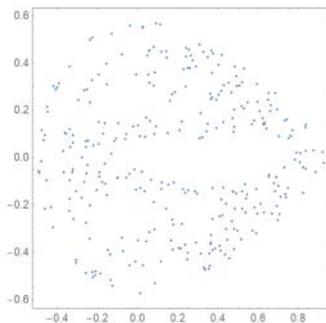
Noch ein Konsistenzcheck: Wenn man Differentialgleichungen für lange Zeiten numerisch integriert, können sich numerische Fehler aufaddieren. Vielleicht ist der späte Anfang des Chaos einfach ein Artefakt, weil der Löser durch numerische Fehler mehr und mehr Energie in das System pumpt. Wir plotten also Energie über Zeit für 100k Zeiteinheiten. Das Diagramm unten zeigt, dass Energie im Rahmen kleiner numerischer Fehler erhalten bleibt. Gut.

```
Plot[Evaluate[energyHenons[solveHenons[0.02, 0.02, 0.19, 1/8, 100000]]], {t, 0, 100000}]
```



```
In[16]:= visualize[0.02, 0.02, 0.19, 1/6, 1000]
```

Out[16]=

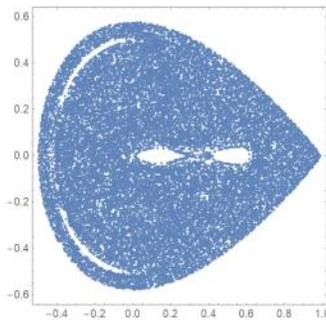
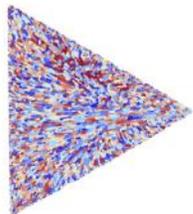


Wir erhöhen die Energie weiter. $E=1/6$ ist die höchste Energie, bei der die Lösungen noch gebunden sind.

Oben: 1k Zeiteinheiten, unten 100k Zeiteinheiten.

```
In[17]:= visualize[0.02, 0.02, 0.19, 1/6, 100000]
```

Out[17]=

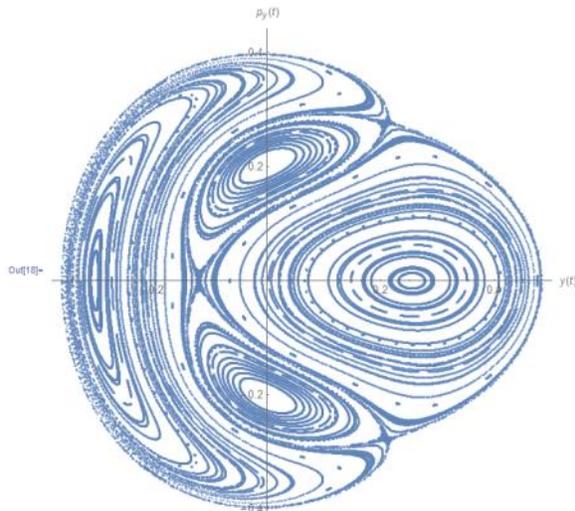


Im Poincaré-Schnitt scheinen bis auf vier weiße Regionen alle Bereiche gleichmäßig bedeckt zu sein. Eine "glatte Struktur" ist nicht mehr erkennbar.

```

In[18]= surfaceOfSectionEnergy[1/12, 5000, 50]
surfaceOfSectionEnergy[1/8, 5000, 50]
surfaceOfSectionEnergy[1/6, 5000, 50]

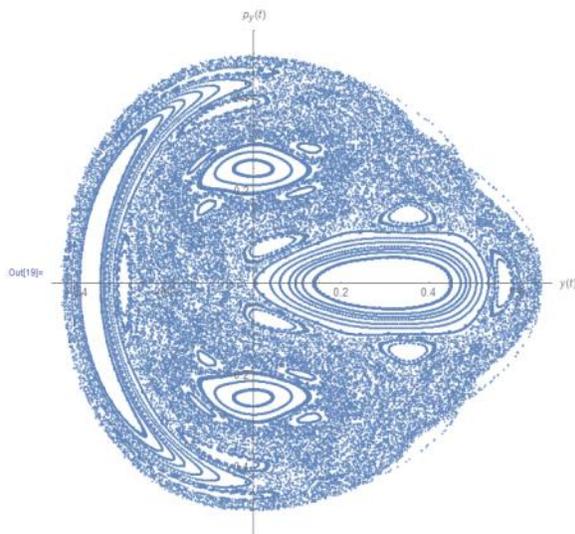
```



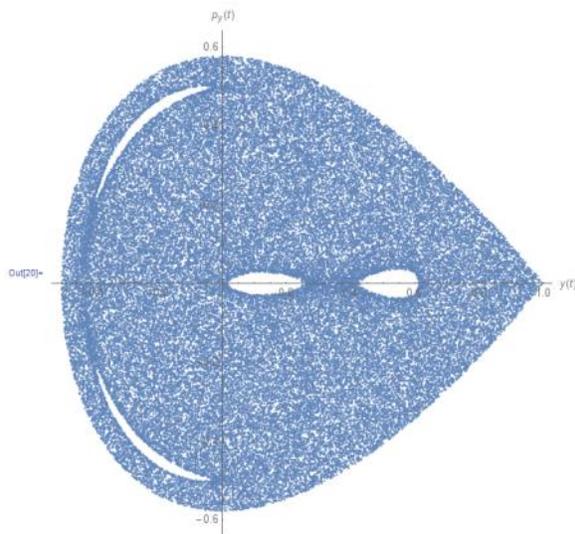
In den drei Diagrammen sind jeweils 50 Trajektorien mit gegebener Energie und zufälligen Anfangsbedingungen für je 5k Zeiteinheiten aufgetragen.

Die Energien sind: $1/12$, $1/8$, $1/6$.

Bei $E=1/12$ sieht man glatte Trajektorien, mit einigen Resonanzen.



Bei $E=1/8$ verbleiben einige wenige glatte Bahnen. Die meisten ergeben jedoch chaotische Bilder.



Bei $E=1/6$ sind keine glatten Bahnen mehr erkennbar.

Interessant ist: Das Portrait der 50 zufälligen Bahnen hier sieht genauso aus, wie das Portrait der einen Bahn für $E=1/6$, die wir oben geplottet haben. Dieses Verhalten (Zeitmittel einer Bahn entspricht zufällig gewählten Punkten mit gegebener Energie) scheint ergodisch zu sein.



Ich sehe Sie
dann in der
QM wieder!