1. Vorlesung | TP I 11.10.18

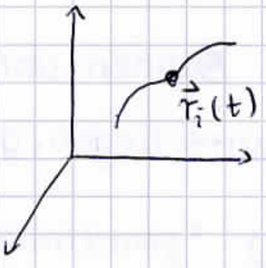
Übersicht: 1. Newtonsche Mechanik
- Dynamik von Punktteilchen
- Kepler
- Erhaltungsgrößen
- Starre Körper
- Zwangsbedingung  Seil hindert Schaukel auf den Boden zu fallen

2. "Analytische Mechanik"
- Lagrange Formulierung (→ Feldtheorie)
- Hamilton-Formel (→ QM)
- Geometrische Mechanik (Symplektische Geometrie ...) (nicht Klausurrelevant)

3. Chaostheorie
- Qualitative Aussagen über Langzeitverh. komplexer Systeme
- Stabilität vs. Chaos
- Attraktoren, Bifurkationen, Wege ins Chaos

Literatur:
- Scheck
- Arnold (mathematisch)
- Goldstein (Klassiker)
- Kuypers (viele Beispiele)

1. Modellannahmen: Punktmassen bewegen sich im $\mathbb{R}^3$.



- Mit i-tem Teilchen, assoziere Masse m_i und zu jedem Zeitpunkt t, einem Ort $\vec{r}_i(t) = \begin{pmatrix} x_i(t) \\ y_i(t) \\ z_i(t) \end{pmatrix}$

Unmittelbares Ziel: Beschreibe Dynamik $\vec{r}_i(t)$.

Modell vs. Wirklichkeit:

- Punktmassen: Offenbar sehr starke Vereinfachung!
  Im Nachhinein: zu rechtfertigen, da oft komplexe Körper durch "Gesamtmasse am Schwerpunkt" ersetzt werden können. (→ Freitag)
- Spez. Rel.: Masse und Teilchenzahl nicht mehr erhalten (bei "geringen" Geschwindigkeiten vernachlässigbar)
- Allg. Rel: Eukl. Geometrie ≠ Wirklichkeit.
  (bei "schwacher Gravitation" vernachlässigbar.)
- QM: Man kann Teilchen keinen Ort zuschreiben unabhängig vom Beobachtungen.

→ Ist die Newtonsche Mechanik richtig?
  ↳ mmh → Nützlich? ↳ Und wie!!!

Dynamik $\vec{r}_i(t)$ durch Bewegungsgleichung beschrieben. Diese stellen Bedingung an Zeitableitungen von $\vec{r}_i(t)$:

$$\frac{\partial}{\partial t}\vec{r}_i(t) = \dot{\vec{r}}_i(t) = \begin{pmatrix} \dot{x}_i(t) \\ \vdots \\ \dot{z}_i(t) \end{pmatrix} = \vec{v}_i(t) \qquad \text{Geschwindigkeit}$$

$$\frac{\partial^2}{\partial t^2}\vec{r}_i(t) = \ddot{\vec{r}}_i(t) = \dots = \vec{a}_i(t) \qquad \text{Beschleunigung}$$

Nicht offenbar! Diff. Rechnung von Newton zu diesem Zweck erfunden! (und Leibniz)

Drei Zutaten:

1. Ein Bezugssystem ist inertial wenn für Bahnen von Teilchen, die keinen äußeren Einfluss unterliegen, gilt:

$$\ddot{\vec{r}}_i(t) = 0 \quad \forall t \quad \left[\Leftrightarrow \vec{r}_i(t) = \vec{r}_i(t_0) + t\,\dot{\vec{r}}_i(t_0) \quad \text{"geradlinig gleichförmig"} \right]$$

1. Vorlesung / 2. Vorlesung | TP I
11.10/12.10

2. Newtonsche Gesetz:

$$\ddot{\vec{r}}_i(t) = \frac{\vec{F}(\vec{r}(t), \dot{\vec{r}}(t), t)}{m_i}$$

mit Kraftvektor $\vec{F}$

Um Vorhersagen zu machen, braucht man noch:

3. Regeln um eine physikalische Situation einen $\vec{F}$-Vektor zuzuordnen.

3.1 Superpositionsprinzip: Gesamtkraft $\vec{F}_i$ auf i-tes Teilchen ist Summe aller fundamentalen Kräfte.

3.2 Liste fundamentaler Kräfte Bsp.:

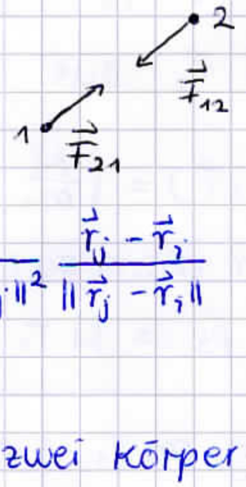
- Gravitation $\quad \vec{F}_{i,j} = -G\, m_i m_j \frac{\vec{r}_i - \vec{r}_j}{\|\vec{r}_i - \vec{r}_j\|^3}$
- Elektrostatik

Zweikörperproblem $\qquad$ 12.10.18

Kraftgesetz der Form

$$F_{ij} = f_{ij}(\|\vec{r}_i - \vec{r}_j\|) \frac{\vec{r}_j - \vec{r}_i}{\|\vec{r}_j - \vec{r}_i\|} \quad (Z)$$

verursacht $\quad$ wird angegriffen



↳ ist Zentralkraft

Bsp. Gravitation:

$$\left.\begin{aligned} \vec{F}_{ij} &= -G\, m_i m_j \frac{1}{\|\vec{r}_i - \vec{r}_j\|^2} \frac{\vec{r}_j - \vec{r}_i}{\|\vec{r}_j - \vec{r}_i\|} \\ f_{ij}(r) &= -G\, \frac{m_i m_j}{r^2} \end{aligned}\right\} (G)$$

Zwei-K-Problem: Löse BWGL. (Z) für zwei Körper, für beliebiges f: $\vec{r} := \vec{r}_1 - \vec{r}_2$

$$\vec{F} := \vec{F}_{21} = f(\|\vec{r}\|) \frac{\vec{r}}{\|\vec{r}\|} = f(r)\, \vec{r}_0$$

Spezialfall: Kepler-Problem, ein Z-K-P mit

$$f(r) = -\frac{\alpha}{r^2}$$

für irgendeine Konstante α. Bsp. Gravitation, E-Statik

Ziel: Löse (Z), (K).

Ausgangspunkt: 6 gekoppelte DGL 2. Ordnung:

$$\ddot{x}_1(t) = \frac{1}{m_1} f\left(\left((x_1^2 - x_2^2)^2 + \ldots + z_2^2\right)^{1/2}\right) \frac{(x_2 - x_1)}{(x_2 - x_1)^{1/2}}$$

$$\ddot{y}_1(t) = \ldots$$

"Lösen" kann heißen:

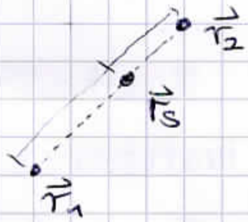
1. Explizite Formel für Dynamik $\vec{r}_i(t)$
   (freies Teilchen, Ballistik im homogenen Feld, harmonische Schwingung, kreisförmige Planetenbahn...)
2. Drücke $\vec{r}_i(t)$ durch 1-Dim. Integrale aus, auch wenn Integrale nicht elementar lösbar sind.
3. Finde "wesentliche" Eigenschaften der Dynamik.

1/4 Seperation von Schwerpunkt und Relativbewegung

Def. $M := m_1 + m_2$ Gesamtmasse

$\vec{r}_S := \frac{1}{M}(m_1 \vec{r}_1 + m_2 \vec{r}_2)$ Schwerpunkt

$\vec{r} := \vec{r}_1 - \vec{r}_2$ Relativkoordinate



Kann $\vec{r}_1, \vec{r}_2$ aus $\vec{r}_S, \vec{r}$ errechnen.

$$\vec{r}_1(\vec{r}_S, \vec{r}) = \left(\frac{M}{m_1}\vec{r}_S + \frac{m_2}{m_1}\vec{r}\right) \Big/ \left(1 + \frac{m_2}{m_1}\right), \ldots$$

$\Rightarrow$ Können ebensogut mit $\vec{r}_S, \vec{r}$ rechnen. Aber warum nur?

Daher: $\vec{p}_S := M \dot{\vec{r}}_S$ Gesamtimpuls

$$\frac{d}{dt}\vec{p}_S \underset{\text{Def}}{=} m_1 \ddot{\vec{r}}_1 + m_2 \ddot{\vec{r}}_2 \underset{\text{Newton}}{=} \vec{F}_{21} + \vec{F}_{12} \underset{(Z)}{=} 0$$

$\rightsquigarrow \vec{p}_S$ ist Erhaltungsgröße!

$\Rightarrow \ddot{\vec{r}}_S(t) = 0$ 3. entkoppelte triviale lösbare BWGL!
$\rightarrow$ geradlinig, gleichförmig

2. Vorlesung / 3. Vorlesung TP. 1

Teil.2 12.10.18

Für Relativkoordinate:

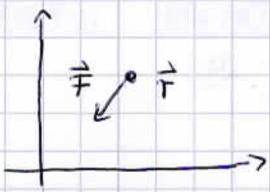
$$\ddot{\vec{r}} = \ddot{\vec{r}}_1 - \ddot{\vec{r}}_2 \underset{\text{Newt. (z)}}{=} \frac{1}{m_1} f(\|\vec{r}\|)\, \vec{r}_0 + \frac{1}{m_2} f(\|\vec{r}\|)\, \vec{r}_0$$

$$= \frac{m_1 + m_2}{m_1 m_2} f(\|\vec{r}\|)\, \vec{r}_0 = \frac{1}{\mu} f(\|\vec{r}\|)\, \vec{r}_0$$

$\left[\mu = \frac{m_1 \cdot m_2}{M} \right.$ "Reduzierte Masse" $\left. \right]$

$\leadsto$ BWGL. ist von der Form eines einzelnen Teilchens mit Masse μ und Kraftfeld

$$\vec{F}(\vec{r}) = f(\|\vec{r}\|)\, \vec{r}_0 \;!$$



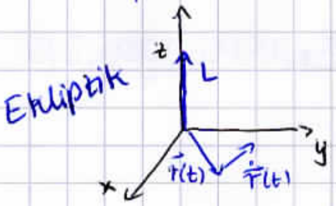
Jetzt: Löse effektives Ein-Teilchen-Problem!

(2/4) Ausgangspunkt: $\ddot{\vec{r}} = \frac{1}{\mu} f(\|\vec{r}\|)\, \vec{r}_0$

Def. $\vec{L} := \mu\, \vec{r} \times \dot{\vec{r}}$ Drehimpulsvektor

$$\frac{d}{dt}\vec{L} = \mu \big(\underbrace{\dot{\vec{r}} \times \dot{\vec{r}}}_{=0} + \vec{r} \times \underbrace{\ddot{\vec{r}}}_{\text{Newt (z)} \sim \vec{r}} \big) = 0$$

$\vec{L} = \mu\, \vec{r}(t) \times \dot{\vec{r}}(t)$ konstant



$\ulcorner \rightarrow$ Veränderung der Position und Momentanposition liegen zu jedem Zeitpunkt in Ebene $\perp$ zu $\vec{L}$ $\lrcorner$

$\leadsto$ Wähle Koordinaten so, dass $\vec{L} \sim \vec{e}_z \leadsto$ 2.D Problem

Wiederholung: Z-K-P / Kepler 18.10.18

1. Sep. von Schwerpunkt- & Relativkoordinaten

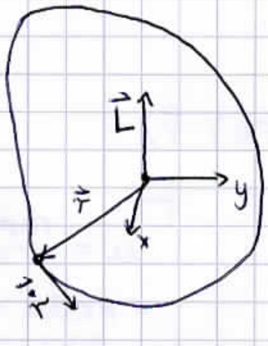
↳ Einteilchenproblem mit Kraft $\vec{F}(\vec{r}) = f(r)\, \vec{r}_0$

2. Masse μ

$\vec{L} = \mu\, \vec{r} \times \dot{\vec{r}} \rightarrow \frac{d}{dt} \vec{L}(\vec{r}(t)) = 0 \rightarrow$ Erhaltungsgröße

↳ Richtung erhalten $\rightarrow$ 2D - Problem

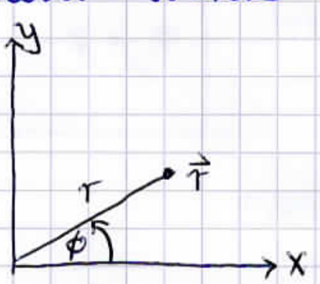
↳ Bezugskoordinaten anpassen:



Wähle Koordinatensystem so, dass $\vec{L} \propto \vec{e}_z$ also Dynamik findet statt in $\vec{e}_x \vec{e}_y$ - Ebene.

Noch ungenutzt: $\|L\|$ ist erhalten...

Dazu wähle Polarkoordinaten in xy-Ebene:

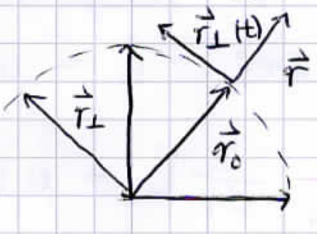


Nebenrechnung

$$\vec{r}(t) = \begin{pmatrix} x(t) \\ y(t) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} r(t)\cos(\phi(t)) \\ r(t)\sin(\phi(t)) \end{pmatrix}$$

$$\vec{r}_0(t) = \begin{pmatrix} \cos(\phi(t)) \\ \sin(\phi(t)) \end{pmatrix}$$

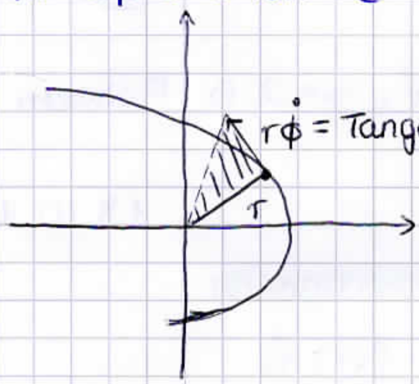
$$\dot{\vec{r}}(t) = \dot{r}(t)\,\vec{r}_0(t) + r(t)\,\underbrace{\dot{\vec{r}}_0(t)}_{\underbrace{\begin{pmatrix} -\sin(\phi(t)) \\ \cos(\phi(t)) \end{pmatrix}}_{\vec{r}_\perp(t)}\dot{\phi}(t)} \qquad (*)$$



$$\vec{L} = \mu \vec{r} \times \dot{\vec{r}} = \mu\, r(t)^2\, \vec{r}_0 \times (r(t)\,\dot{\phi}(t)\,\vec{r}_\perp(t))$$

$$= \mu r^2 \dot{\phi}\, \vec{e}_z \Rightarrow \|\vec{L}\| = \mu r^2 \dot{\phi} =: l \rightarrow \text{Erhaltungsgröße}$$

Interpretation (2. Keplersche Gesetz)



$r\dot{\phi}$ = Tangentialgeschwindigkeit

$\rightarrow r \cdot r\dot{\phi}$ = „Flächengeschw." = const. $= \frac{L}{2\mu}$

3. Energieerhaltaltung

(z) $\Rightarrow \vec{F}(\vec{r}) = f(r)\,\vec{r}_0$

Vom Himmel fällt folgender Ansatz:

3. Vorlesung | TP 1
2. Teil | 18.10.18

Definiere: $V(r) = -\int_0^r dr' \, f(r')$

Dann: $E(\vec{r}, \dot{\vec{r}}) := \frac{1}{2}\mu \|\dot{\vec{r}}\|^2 + V(r)$ ist Erhaltungsgröße

„Erhaltungsgrößen sind unsere Freunde."

Beweis: $\frac{d}{dt} E = \frac{1}{2}\mu \cdot \underbrace{\underbrace{\frac{d}{dt}(\dot{\vec{r}}, \dot{\vec{r}})}_{(\ddot{\vec{r}}, \dot{\vec{r}}) + (\dot{\vec{r}}, \ddot{\vec{r}})}}_{\mu \cdot (\ddot{\vec{r}}, \dot{\vec{r}})} + \underbrace{\frac{d}{dt} V(r(t))}_{\frac{\partial V}{\partial r} \cdot \frac{d}{dt} r(t)}$

$\mu \cdot (\ddot{\vec{r}}, \dot{\vec{r}}) \overset{\text{New.}}{=} f(r)(\vec{r}_0, \dot{\vec{r}}) = f(r)\,\dot{r}(t)$

$\frac{\partial V}{\partial r} \cdot \frac{d}{dt} r(t) = -f(r) \underbrace{\frac{d}{dt}(\vec{r}, \vec{r}_0)}_{\overset{(*)}{=} \dot{r}(t)(\vec{r}, \vec{r}_0) + \dots (\vec{r}_\perp, \vec{r}_0) = \dot{r}(t)} = -f(r)\,\dot{r}(t)$

$= f(r)\,\dot{r}(t) - f(r)\,\dot{r}(t) = 0$

$\Rightarrow$ Erhaltungsgröße

Setze Ausdruck für $\ell = \mu r^2 \dot{\phi}$ in Ausdruck für E ein:

„Koppeln sollte sie glücklich machen. Wenn ich was koppel, möchte ich dass die Stimmung hier steigt."

$E = \mu \frac{1}{2} \underbrace{\|\dot{\vec{r}}\|^2}_{\|\dot{r}\vec{r}_0 + r\dot{\phi}\vec{r}_\perp\|^2 \underset{\text{ONB}}{=} \dot{r}^2 + r^2\dot{\phi}^2}{}^{*} + V(r) = \frac{\mu}{2}\dot{r}^2 + r^2 \frac{\mu}{2} \frac{\ell^2}{\mu^2 r^4} + V(r)$

$= \frac{\mu}{2}\dot{r}^2 + \frac{\ell^2}{2\mu r^2} + V(r)$

löse auf nach $\dot{r}$

$\Leftrightarrow \dot{r} = \pm\left[\frac{2}{\mu}\left(E - \frac{\ell^2}{2\mu r^2} - V(r)\right)\right]^{1/2} \rightarrow$ DGL nur in r!

↳ Winkelkomponente ist entkoppelt

Nächster Schritt: Nehme an, dass $r(t)$ lokal umkehrbar ist (nicht global!) $\rightarrow t(r)$

$\frac{d}{dt} r(t) = G(r) \Leftrightarrow \frac{d}{dr} t(r) = \frac{1}{G(r)}$

Angewandt: $\frac{dr}{dt} = \left(\frac{dt}{dr}\right)^{-1}$ ☒

Mathematisch : Satz über implizite Funktionen

(langer Beweis viele Ann.)

$$\frac{d}{dr} t(r) = \pm \frac{1}{\left(\frac{2}{\mu}\left(E - \frac{\ell^2}{2\mu r^2} - V(r)\right)\right)^{1/2}}$$

$\rightarrow t(r) = \int_0^r$ — " — dr' $\Rightarrow$ 1D-Integral $\rightarrow t(r)$

$\rightarrow$ Umkehrung bringt $r(t)$

$$\frac{d}{dt} \phi(t) = \frac{\ell}{\mu\, r^2(t)}$$

$\rightarrow \phi(t) = \int_0^t$ — " — dt' $\rightarrow$ Fertig :)

4. Wähle $V(r) = -\frac{\alpha}{r}$ (α = const.) $\rightarrow$ Kepler-Prob.

↳ Runge-Lenz-Vektor

4. Vorlesung | TP1 25.10.18

Wiederholung: • ZKP wurde auf zwei explizierte Integrale reduziert. Damit gilt es als "gelöst".

4/4 Runge-Lenz-Vektor

Spezialisiere auf den Fall $V(r) = -\frac{\alpha}{r}$

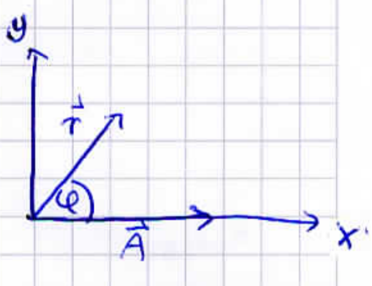
Dann: Definiere: $\vec{A} = \mu \dot{\vec{r}} \times \vec{L} - \mu\alpha \vec{r}_0$

Beh.: $\frac{d}{dt}\vec{A} = 0$ Bew: Übungsaufgabe

$\vec{A}$ liegt in Ekliptik (hier: $\vec{A} \in x$-y-Ebene)

$\rightsquigarrow$ Wähle Koordinaten so, dass $\vec{e}_x \parallel \vec{A}$.

Damit: Rechne:



(1) $(\vec{A}, \vec{r}) = \|\vec{A}\|\, r \cos\varphi$

(2) $(\vec{A}, \vec{r}) = \underbrace{\mu(\dot{\vec{r}} \times \vec{L}, \vec{r})}_{\text{Spatprodukt, zyklische Vertauschung}} - \mu\alpha \underbrace{(\vec{r}_0, \vec{r})}_{=r}$

$= (\mu \vec{r} \times \dot{\vec{r}}, \vec{L}) = (\vec{L}, \vec{L})$

$= \|\vec{L}\|^2 = \ell^2$

$\Rightarrow \|\vec{A}\| r \cos\varphi = \ell^2 - \mu\alpha r$

Def.: $\varepsilon = \frac{\|\vec{A}\|}{\mu\alpha}$ (numerische) Exzentrizität

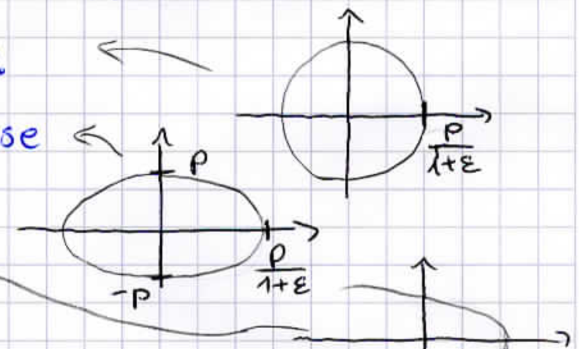
$p = \frac{\ell^2}{\mu\alpha}$ Halb-Parameter

$\rightsquigarrow r = \frac{\ell^2}{\mu\alpha + \|\vec{A}\|\cos\varphi} = \frac{p}{1+\varepsilon\cos\varphi}$ Kegelschnitt in Polarkoordinaten.

Fälle:

gebundene Lsg.en:
1. $\varepsilon = 0 \to$ Kreis mit $r = p$.
2. $0 < \varepsilon < 1 \to$ gleich Ellipse

Streu-Lsg.en:
3. $\varepsilon = 1$ Parabel
4. $\varepsilon > 1$ Hyperbel

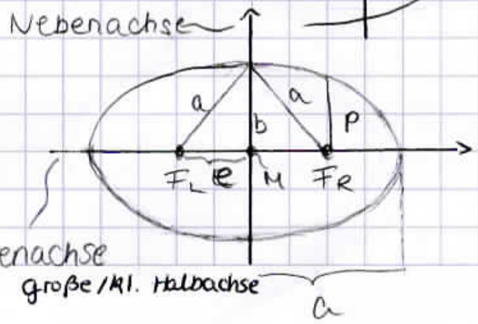


zu Fall 1, 2:

Ellipse ist Menge P aller Pkt, s.d.

$\overline{PF_L} + \overline{PF_R} = 2a$, mit F_L, F_R

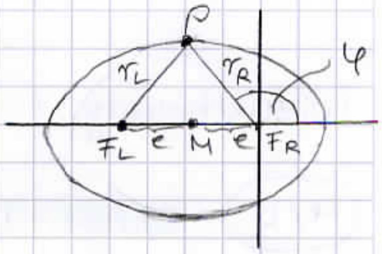
gegeb. Pkt, a Konstante



a Konstante, M Mittelpkt., F_L/F_R Brennpkte, a/b große/kl. Halbachse

e Lineare Exz. ($\varepsilon := \frac{e}{a}$ num. Exz.)

Beh: $\{(r,\varphi) \mid r = \frac{p}{1+\varepsilon\cos\varphi},\ \varphi \in [0,2\pi)\}$ ist Ellipse in Polarkoordinaten.



Mit: F_R = Ursprung, Haupta. = x-Achse
Nebena. = y-Achse
$a = \frac{p}{1+\varepsilon}$

Bew: Wähle P mit P-koord. $r = \frac{p}{1+\varepsilon\cos\varphi}$

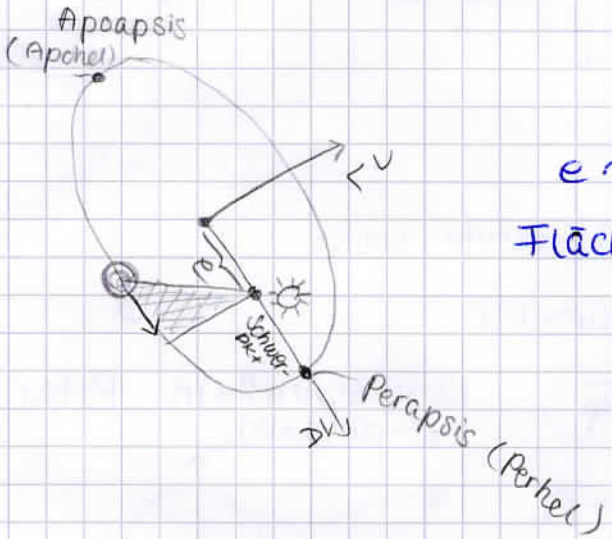
zu zeigen: $r_L + r_R = 2a$

Kosinussatz: $r_L^2 = 4e^2 + r^2 + \underbrace{4er\cos(\varphi)}_{=(p-r)a}$ $\Leftarrow r(1+\frac{e}{a}\cos\varphi) = p$

$= r^2 + 4e^2 + 4a(p-r)$ $\Leftarrow p = a(1+\varepsilon)$, $\varepsilon = \frac{e}{a}$

$= r^2 - 4ra + 4(e^2 \cdot ap)$

Nicht Richtig



$e \sim \|\vec{A}\|$

Flächengeschwindigkeit $\sim \|\vec{L}\|$

5. Vorlesung

Korrektur / Erhaltungssätze

TP.1

26.10.18

Beh: $E = \{(r,\varphi) \mid \underset{(1)}{r} = \frac{p}{1+\varepsilon\cos\varphi},\ \varphi \in [0,2\pi)\}$ ist Ellipse

Bew: Wähle: $\underset{(2)}{a} = \frac{p}{1-\varepsilon^2}$, $F_R = \begin{pmatrix}0\\0\end{pmatrix}$, $F_L = \begin{pmatrix}0\\-2\varepsilon a\end{pmatrix}$

z.zg: $r_L = 2a - r$.

Bew: Kosinussatz: $r_L^2 = r^2 + 4\varepsilon^2 a^2 + 4\varepsilon a r \cos\varphi$

$(1) \Rightarrow (1+\varepsilon\cos\varphi)r = p$

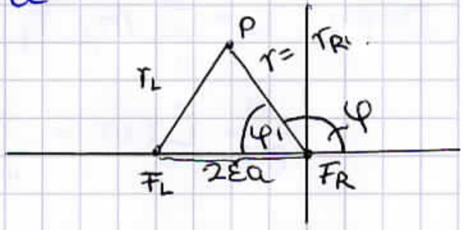
$$= r^2 + 4\varepsilon^2 a^2 + 4ap - 4ar$$

$(2) \Rightarrow p = a(1-\varepsilon^2)$

$$= r^2 - 4ar + 4a(\varepsilon^2 a + p)$$

$$= r^2 - 4ar + 4a^2$$

$$= (r - 2a)^2$$



Erhaltungssätze

Wir betrachten n Teilchen $(\vec{r}_1,\dots,\vec{r}_n) = \vec{r} \in \mathbb{R}^{3n}$ mit

ZK: $\vec{F}_{ij} = f_{ij}(\|\vec{r}_j - \vec{r}_i\|)\frac{\vec{r}_j - \vec{r}_i}{\|\vec{r}_j - \vec{r}_i\|}$ (innere Kräfte)

und äußere Kräfte: $\vec{K}_j(\vec{r},\dot{\vec{r}},t)$

→ System ist abgeschlossen, wenn $\vec{K}_j = 0$

Bewegungsgleichung.

$$\ddot{\vec{r}}_1(t) = \frac{1}{m_1}(\vec{F}_{21} + \dots + \vec{F}_{n1} + \vec{K}_1)$$
$$\vdots$$
$$\ddot{\vec{r}}_n(t) = \frac{1}{m_n}(\vec{F}_{1n} + \dots + \vec{F}_{(n-1)n} + \vec{K}_n) \qquad (*)$$

1,2 Schwerpunktssatz, Impulse

Def.: $M = \sum_{j=1}^{n} m_j$ Gesamtmasse

$\vec{r}_S = \frac{1}{n}\sum_{j=1}^{n} m_j \vec{r}_j$ Schwerpunkt

$M\dot{\vec{r}}_S = \vec{P} = \sum_j m_j \dot{\vec{r}}_j$ Gesamtimpuls

$$\ddot{\vec{r}}_S(t) = \frac{1}{M}\sum_j m_j \ddot{\vec{r}}_j(t) \overset{(*)}{=} \frac{1}{M}\Big(\underbrace{\sum_{i\neq j}\vec{F}_{ij}}_{\text{zk}: 0} + \sum_j \vec{K}_j\Big)$$

$$= \frac{1}{M}\sum_j \vec{K}_j = \underbrace{\frac{1}{M}\vec{K}}$$

↳ äußere Ges.-Kraft

↳ Schwerpunktsatz

$\Rightarrow M\ddot{\vec{r}}_S = \frac{d}{dt}\vec{p} = \vec{K} \Rightarrow \vec{P}$ Erh. für abgeschlossene Systeme $\Rightarrow$ 3 skalare Er.-Gl.

Desweiteren für abgeschl. Systeme:

$\vec{r}_S(t) = \vec{r}_S(0) + \frac{\vec{P}}{M}t \Rightarrow \vec{r}_S(t) - \frac{\vec{P}}{M}t$ EHG!

Initialer Ort $\rightsquigarrow$ 3 EHG!

③ Drehimpuls

Def.: $L = \sum_j m_j \vec{r}_j \times \dot{\vec{r}}_j$ Gesamtdrehimpuls.

$$\frac{d}{dt}\vec{L}(t) = \sum_j m_j \vec{r}_j \times \ddot{\vec{r}}_j \underset{\text{Newton}}{=} \underbrace{\sum_{j\neq i}\vec{r}_j \times \vec{F}_{ji}}_{\sim \vec{r}_j - \vec{r}_i} + \underbrace{\sum_j \vec{r}_j \times \vec{K}_j}_{\text{Drehmoment } \vec{N}}$$

$\sim \sum \vec{r}_j \times \vec{r}_i = 0$

$\rightsquigarrow \frac{d}{dt}\vec{L} = \vec{N}$. Für abg. Systeme:

$\frac{d}{dt}\vec{L} = 0 \rightarrow 3$ EH-GL

④ Energie

Def.: $T(\dot{\vec{r}}) := \frac{1}{2}\sum_j m_j \|\dot{\vec{r}}_j\|^2$ kinet. Energie

$V_{ij}(\vec{r}) := -\int_{r_0}^{r} f_{ij}(r')\,dr'$ mit r_0 beliebig (wenn konvergent, wähle $r_0 = \infty$)

$V(\vec{r}) := \sum_{i<j} V_{ij}(\|\vec{r}_j - \vec{r}_i\|)$ Pot. Energie der inneren Kräften

$E(\vec{r}(t), \dot{\vec{r}}(t)) = T(\vec{r}) + V(\vec{r})$ Energie

Drei N.R.:

① $$\vec{\nabla}_j V_{ij}(\|\vec{r}_j - \vec{r}_i\|) = \underbrace{V_{ij}'(\|\vec{r}_j - \vec{r}_i\|)}_{-f_{ij}(\dots)} \underbrace{\vec{\nabla}_j\left((x_j - x_i)^2 + \dots + (z_j - z_i)^2\right)^{1/2}}_{\cancel{\frac{1}{2}}\frac{1}{\|\vec{r}_j - \vec{r}_i\|}\begin{pmatrix} x_j - x_i \\ \vdots \\ z_j - z_i \end{pmatrix}}$$

$= -\vec{F}_{ij}$ $\qquad = \frac{\vec{r}_j - \vec{r}_i}{\|\vec{r}_j - \vec{r}_i\|}$

5. Vorlesung / 6. Vorlesung Teil 2 — TP1 — 26.10.18

② $\frac{d}{dt} T(\dot{\vec{r}}(t)) = \frac{1}{2} \sum_j m_j \frac{d}{dt} (\dot{\vec{r}}_j, \dot{\vec{r}}_j) = \sum_j m_j (\dot{\vec{r}}_j, \ddot{\vec{r}}_j)$

$= \sum_{i \neq j} (\dot{\vec{r}}_j, \vec{F}_{ij}) + \underbrace{\sum_j (\dot{\vec{r}}_j, \vec{K}_j)}_{\text{Leistung}}$

③ $\frac{d}{dt} V(\vec{r}(t)) = \sum_{i<j} \frac{d}{dt} V_{ij} (\| \vec{r}_j(t) - \vec{r}_i(t) \|) \quad (?)$

Kommentar zu (?):

$V(\| \vec{r}_j(t) - \vec{r}_i(t) \|) = h(g(t))$

ⓐ $h(r_{ij}) = V(r_{ij})$, $g(t) = \| \vec{r}_j(t) - \vec{r}_i(t) \|$

ⓑ $h(\vec{r}_j) = V(\| \vec{r}_j - \vec{r}_i \|)$, $g(t) = \vec{r}_j(t)$

ZKP: ⓐ Hier: ⓑ

$(?) = \sum_{i<j} (\vec{\nabla}_j V_{ij}, \dot{\vec{r}}_j) \underset{(1)}{=} - \sum_{i<j} (\vec{F}_{ij}, \dot{\vec{r}}_j)$ ... soon!

Für einige kräftg. $\vec{K}$ findet man ein Potential

$$\vec{K}_j(\vec{r}) = -\vec{\nabla}_j V_{ext}(\vec{r})$$

→ solche Kräfte sind konservativ.

Für $\vec{K}_j$ ist äq: ① $\exists V(\vec{r})$ s.d. $\vec{K}_j = -\vec{\nabla}_j V(\vec{r})$

② $\forall$ Wege: $\gamma : [t_1, t_2] \to \mathbb{R}^3$

$\int_{t_1}^{t_2} (\dot{\vec{\gamma}}(t), \vec{K}_j(\vec{\gamma}(t))) \, dt$ nur von $\vec{\gamma}(t_1), \vec{\gamma}(t_2)$ abh.

① ∨ ② $\Rightarrow \vec{\nabla} \times \vec{K} = 0$.

Auf einf. zusammenh. Gebieten gilt umk.

6. Vorlesung 02.11.18

Energie - Erh.

Wiederholung: NR:

- $\vec{\nabla}_j V_{ij}(\|\vec{r}_j - \vec{r}_i\|) = -\vec{F}_{ij} \Rightarrow \vec{\nabla}_i V_{ij}(\|\vec{r}_j - \vec{r}_i\|) = F_{ji} = -F_{ij}$.
- $\frac{d}{dt} T(\dot{r}(t)) = \sum_{i \neq j} (\vec{F}_{ij}, \dot{\vec{r}}_j) + \underbrace{\sum_j (\vec{K}_j, \dot{\vec{r}}_j)}_{\to \text{Leistung}}$
- $\frac{d}{dt} U(\vec{r}(t)) = \sum_{i<j} \frac{d}{dt} V_{ij}(\|\vec{r}_j(t) - \vec{r}_i(t)\|)$

$$= \sum_{i \neq j} (\vec{\nabla}_j V_{ji}, \dot{\vec{r}}_j(t))$$
$$= -\sum_{i \neq j} (\vec{F}_{ij}, \dot{\vec{r}}_j(t))$$

$$\Rightarrow \left[\frac{d}{dt} E(\vec{r}(t), \dot{\vec{r}}(t))\right] = \frac{d}{dt} T + \frac{d}{dt} U = \left[\sum_j (\vec{K}_j, \dot{\vec{r}})\right]$$

Energiesatz: Änderung der Energie $\hat{=}$ Leistung der äußeren Kräfte

→ Für den Fall, dass $\vec{K}_j(\vec{r}, \dot{\vec{r}}, t) = \vec{K}_j(\vec{r}) = -\vec{\nabla}_j V_j(\vec{r})$

kann man äuß. Kräfte in Energie-Bilanz einbeziehen:

$$E_{in,ex} = T + \sum_{i<j} V_{ij} + \sum_j V_j$$

$$\Rightarrow \frac{d}{dt} E_{in,ex} = \sum_j (\vec{K}_j, \dot{\vec{r}}_j) + \underbrace{\sum_j \frac{d}{dt} V(\vec{r}(t))}_{\text{K-R wie zuvor: } \sum_j (\vec{\nabla}_j V, \dot{\vec{r}}_j)} = 0 \;!$$

Bmk: $\nabla_j V(\vec{r}) = \begin{pmatrix} \frac{\partial}{\partial x_j} V(\vec{r}) \\ \vdots \\ \frac{\partial}{\partial z_j} V(\vec{r}) \end{pmatrix}$

$$\vec{r} = (x_1, y_1, z_1, x_2, y_2, z_2, \dots, z_n)^T$$
$$= (q_1, q_2, q_3, \dots, q_{3n})^T$$

$$\rightsquigarrow \frac{d}{dt} V(\vec{r}(t)) = \sum_{k=1}^{3n} \frac{\partial V}{\partial q_k} \dot{q}_k \qquad \lrcorner$$

Insgesamt: Impuls, Drehimpuls, Anfangsort, Energie

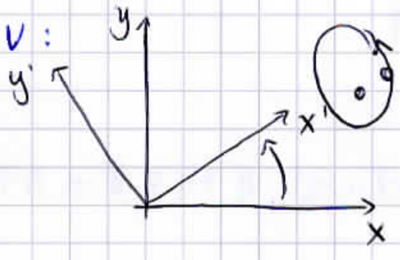
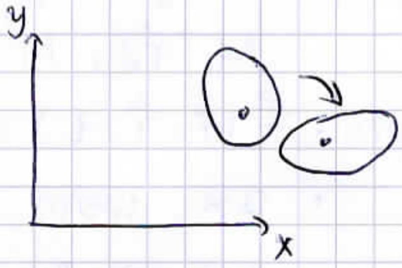
3 + 3 + 3 + 1

$\Rightarrow \Sigma\ 10$ sk. EHG.

6. Vorlesung	TP 1
2. Teil	02.11.18

Transformation, Symmetrien, Galileo Gr.

zwei Interpretation von Trafos:

Passiv:  Aktiv: 

$$(\text{Passive Trafo}) \hat{=} (\text{Aktive Trafo})^{-1}$$

Symmetrie ist Trafo, der

- (passiv): Die Form der BWGL. inv. läßt
- (aktiv): Die Lsg. auf Lsg. abbildet

Zunächst: beschränkt auf affine Trafos:

$\vec{r}_j' = M\vec{r}_j + \vec{a} + \vec{v}t$, mit M inventierbare 3×3 Matrix $\vec{a}, \vec{v} \in \mathbb{R}^3$

Dann: $\dot{\vec{r}}'(t) = M\dot{\vec{r}}_j + \vec{v}$, $\ddot{\vec{r}}' = M\ddot{\vec{r}}_j$

Symmetrien der BWGl. hängen ab vom Kraftgesetz:

① BWGL. sind invariant unter Translation: $\vec{r}' = \vec{r} + \vec{a}$

$\Leftrightarrow \vec{F}_j(\vec{r}_1, \dots, \vec{r}_n, \dot{\vec{r}}_1, \dots, \dot{\vec{r}}_n, t) = \vec{F}_j(\vec{r}_1 - \vec{a}, \dots, \vec{r}_n - \vec{a}, \dot{\vec{r}}, t)$

Bew:
$$\ddot{\vec{r}}_j' = \ddot{\vec{r}}_j = \frac{1}{m_j}\vec{F}_j(\vec{r}_1, \dots, \vec{r}_n, \dot{\vec{r}}, t) = \frac{1}{m_j}\vec{F}_j(\vec{r}_1' - \vec{a}, \dots, \vec{r}_n' - \vec{a}, \dot{\vec{r}}', t)$$
$\boxtimes$

Beispiele:
- Zentralkräfte invariant $\forall \vec{a} \in \mathbb{R}^3$
- e^- im Kraftfeld eines Ionengitters
  $\rightsquigarrow$ Symmetrie für $\vec{a}$ Gittervektor.

② BWGL. invariant unter $\vec{r}_j' = \vec{r}_j + \vec{v}t$

$\Leftrightarrow \vec{F}_j(\vec{r}, \dot{\vec{r}}, t) = \vec{F}_j(\vec{r}_1 - \vec{v}t, \dots, \vec{r}_n - \vec{v}t, \dot{\vec{r}}_1 - \vec{v}, \dots, \dot{\vec{r}}_n - \vec{v}, t)$

Bew.:
$$\ddot{\vec{r}}_j' = \ddot{\vec{r}}_j = \frac{1}{m_j}\vec{F}_j(\vec{r}, \dot{\vec{r}}, t) = \frac{1}{m_j}\vec{F}_j(\vec{r}_1' - \vec{v}t, \dots, \vec{r}_n' - \vec{v}t, \dot{\vec{r}}_1' - \vec{v}, \dots, \dot{\vec{r}}_n' - \vec{v}, t)$$
$\boxtimes$

Bsp.: ZK.

(3) BWGL sind inv. unter $\vec{r}_j' = M\vec{r}_j$

$\Leftrightarrow \vec{F}_j(M\vec{r}_1, \dots, M\vec{r}_n, M\dot{\vec{r}}_1, \dots, M\dot{\vec{r}}_n, t) = M\vec{F}_j(\vec{r}, \dot{\vec{r}}, t)$

Bew:

$\ddot{\vec{r}}_j' = M\ddot{\vec{r}}_j = \frac{M}{m_j} F_j(\vec{r}, \dot{\vec{r}}, t) = \frac{M}{m_j} \vec{F}_j(M^{-1}\vec{r}_1', \dots, M^{-1}\vec{r}_n', M^{-1}\dot{\vec{r}}_1', \dots)$ ▨

Bsp.:
- $\vec{F}(\vec{r}, \dot{\vec{r}}, t) = 0$
- ZK, wenn M so ist, dass $\|M\vec{r}\| = \|\vec{r}'\|$ $\forall \vec{r} \Leftrightarrow M$ orth.

7. Vorlesung | TP1 08.11.18

Wiederholung

③ BWGl. sind inv. unter linearer Trafo

$$\vec{r}_j' = M\vec{r}_j \iff \forall \vec{x},\vec{\omega} : \vec{F}_j(M\vec{x}_1,\dots,M x_m, M\vec{\omega}_1,\dots,M\vec{\omega}_n,t) = M\vec{F}_j(\vec{x}_1,\dots,\vec{x}_m,\vec{\omega}_1,\dots,\vec{\omega}_n,t)$$

Bsp. ZK $\vec{F}_{ij} = f(\|\vec{r}_j - \vec{r}_i\|)\frac{\vec{r}_j - \vec{r}_i}{\|\dots\|}$

$\iff$ M Längen erhaltend

$\rightsquigarrow$ Einschub: Orthogonale Gruppe

$$\{M \mid M \text{ } 3\times 3 \text{ Matrix}, \|M\vec{v}\| = \|\vec{v}\| \ \forall \vec{v}\} =: O(3)$$

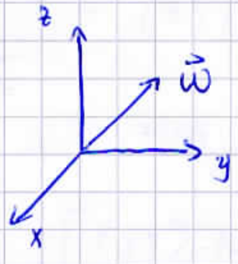
$$\|Mv\|^2 = (Mv, Mv) = (\underbrace{M^T M} v, v) \overset{!}{=} (v,v)$$

$$\iff M^T M = \mathbb{1} = \begin{pmatrix} 1&0&0\\0&1&0\\0&0&1\end{pmatrix}$$

$$\Rightarrow 1 = \det \mathbb{1} = \det M^T M = (\det M)^2 \Rightarrow \det = \pm 1$$

$\{M \in O(3) \mid \det = +1\} =: SO(3)$ spezielle orth. Gruppe.

Bsp. $SO(3) \mathrel{\hat{=}}$ Drehungen



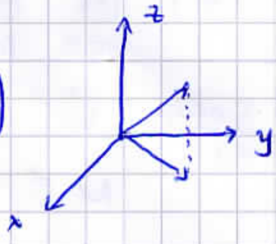
$\|\vec{\omega}\| \in [0, 2\pi)$

(spez. z.B. durch Drehachse $\frac{\vec{\omega}}{\|\vec{\omega}\|}$ und Winkel $\|\vec{\omega}\|$)

Bsp. für $M \in O(3)$, $M \notin SO(3)$. Spiegelung an Ebene

④ Zeitkoordinate

$$\begin{pmatrix} 1 & & \emptyset \\ & 1 & \\ \emptyset & & -1\end{pmatrix}$$



(*) $\rightsquigarrow$ $\tau(t) = \lambda t + s$, $s \in \mathbb{R}$, $\lambda = \pm 1$

$\iff t(\tau) = \frac{1}{\lambda}(\tau - s)$

$$\frac{d^2}{(d\tau)^2}\vec{r} = \frac{d}{d\tau}\Big(\frac{d\vec{r}}{dt}\underbrace{\frac{dt}{d\tau}}_{\frac{1}{\lambda}}\Big) = \underbrace{\frac{1}{\lambda^2}}_{=1}\frac{d^2}{dt^2}\vec{r} = \frac{d^2}{(dt)^2}\vec{r}$$

$\Rightarrow$ BewGl. invariant unter (*) $\iff \forall \vec{x},\vec{\omega},u,s: \vec{F}(\vec{x},\vec{\omega},u) = \vec{F}(\vec{x},\vec{\omega},\lambda u + s)$

Bsp. Alle zeitunabhängigen Kraftgesetze, insb. ZK

$\rightsquigarrow$ Insgesamt für Z.K.:

$$\underset{\vec{a}}{3} + \underset{\vec{v}}{3} + \underset{M \in SO(3)}{3} + \underset{s}{1} = 10 \quad \text{kont. Parameter}$$

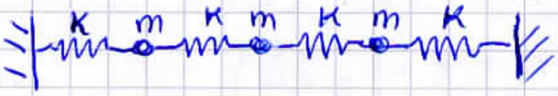
Gekoppelte Oszillatoren, Normalenmoden, Kontinuums-limes

Betrachten System mit N FHG.

Also: $\ddot{\vec{r}}_j(t) = f_i(\vec{r}) \qquad j = 1, \dots, N$

Bsp. • n Teilchen im $\mathbb{R}^3$, $N = 3n$, $f_i = \frac{1}{m_j} F_j$

• N " in 1.-Dim.



$\vec{x} \in \mathbb{R}^N$ ist Gleichgewichtskonfiguration, wenn $\vec{f}(\vec{x}) = 0$

$\rightsquigarrow$ $\vec{r}(t) = \vec{x}$ Lsg von (*)

Def: $\vec{r}(t) = \vec{x} + \vec{\delta}(t)$

$\rightsquigarrow$ Taylor: $f_j(\vec{r}) = \underbrace{f_j(\vec{x})}_{=0} = \sum_i \frac{\partial f_i}{\partial x_i} \delta_i(t) + \underbrace{\text{Term } O(\delta^2)}_{\text{Hier: Vernachlässigbar}}$

Def: M Matrix mit $M_{ji} = \frac{\partial f_j(x)}{\partial x_i}$

$\overset{(*)}{\rightsquigarrow} \left[\ddot{\vec{\delta}}(t) = M \vec{\delta}(t) \right]$ Linearisierte BWGL. !

[(*) ist explizit lösbar, indem man in der Eigenbasis von M arbeitet.]

Seien $\vec{v}_k$ $k = 1, \dots, N$ ein Satz von Recht-Eigenvektoren von M:

$$M \vec{v}_k = \lambda_k \vec{v}_k .$$

Nehme an, $\{\vec{v}_k\}_{k=1}^N$ sind Basis.

Ansatz: Entwickele $\vec{\delta}(t) = \sum_{k=1}^{N} c_k(t) \vec{v}_k$

7. Vorlesung Teil. 2	/ 8. Vorlesung	08. 11. 18 TP1

$$(*) \Rightarrow \sum_k \ddot{c}_k(t)\, \vec{v}_k = \sum_k c_k(t)\, M \vec{v}_k = \sum_k c_k(t)\, \lambda_k \vec{v}_k$$

$$\Leftrightarrow \quad \ddot{c}_k(t) = \lambda_k c_k(t) \qquad k = 1, \dots, N$$

Entkoppeln! $\rightsquigarrow$ N 1-D gew DGL. 2. Ordnung!

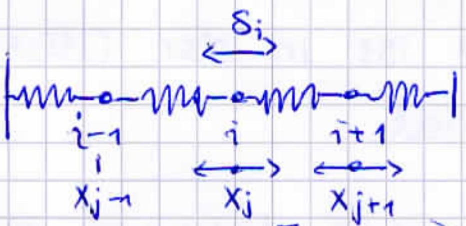
$$\ddot{c}_k = \lambda_k c_k(t) \quad \hat{=} \quad c_k(t) = A e^{i\omega_k t} + B e^{-i\omega_k t} \quad *$$

Nehme an: $\lambda_k = -\underset{\in \mathbb{R}}{\omega_k^2} < 0$

$$* = \tilde{A} \sin \omega_k t + \tilde{B} \cos \omega_k t$$

$\rightsquigarrow$ 2 N lin. unabhängige Lösungen $\rightsquigarrow$ Das sind alle $\rightsquigarrow$ fertig

① Die $\vec{v}_k$ heißen Normalmoden.



$$f_j(\vec{x} + \vec{\delta}) = \frac{1}{m}\left(k(\delta_{j-1} - \delta_j) - k(\delta_j - \delta_{j+1})\right)$$

$$\Rightarrow \quad M = \frac{k}{m} \begin{bmatrix} -2 & \ddots & & & 0 \\ \ddots & 1 & -2 & 1 & \\ & & \ddots & \ddots & \\ & & 1 & -2 & 1 \\ 0 & & & 1 & -2 \end{bmatrix} \leftarrow j$$

$$\uparrow \; j$$

8. Vorlesung 09.11.18

Vergessen, Namen zu nennen:

$$\begin{pmatrix} \vec{r}_j \\ t \end{pmatrix} \mapsto \begin{pmatrix} M\vec{r}_j + \vec{v}t + \vec{a} \\ \lambda t + s \end{pmatrix} \qquad \left.\begin{matrix} M \in SO(3) \\ \vec{v}, \vec{u} \in \mathbb{R}^3 \\ s \in \mathbb{R} \\ \lambda \in \pm 1 \end{matrix}\right\} \text{Galileo-Gruppe}$$

→ M ist analytisch diag. bar.
Zwei besonders einfache Varianten

① zyklische RB: Koppeln 1 und N-te Masse

② Kontinuumslimes

zu ①:

$$M_{zykl} = \frac{k}{m} \begin{bmatrix} -2 & 1 & & & & & 1 \\ 1 & -2 & 1 & & & & \\ & & \ddots & & & & \\ & & 1 & -2 & 1 & & \\ & & & & \ddots & & \\ & & & & 1 & -2 & 1 \\ 1 & & & & & 1 & -2 \end{bmatrix}$$

M ist zyklische Matrix : $M_{ji} = g(i-j \mod N)$

$$\begin{array}{lcccc} \mathbb{Z} & \dots -2 \; -1 & \boxed{0 \;\; 1 \;\; 2 \;\; \dots \;\; N-1} & \boxed{N \;\; N+1} \\ \downarrow \text{mod } N & & \downarrow & \\ \mathbb{Z}_N & \dots \boxed{N-2 \;\; N-1} & \boxed{0 \;\; 1 \;\; \dots \;\; N-1} & \boxed{0 \;\; 1 \;\; 2 \;\; \dots} \\ \parallel & & & \\ \{0, \dots, N-1\} & & & \end{array}$$

Für M_{zykl}:

ℓ	0	1	2	...	N-2	N-1
$g(\ell)$	-2	1	0	...	0	1

Lemma ① Jede zylische Matrix ist in der (diskreten) Fourier-Basis diagonal

Dazu: Die (disk.) FB $\{\vec{b}_k\}_1^N$ sind Vektoren mit Elementen

$$(\vec{b}_k)_j := \frac{1}{\sqrt{N}} e^{i \frac{2\pi}{N} jk}$$

Lemma ②

$$M \vec{b}_k = \lambda_k \vec{b}_k \quad \text{mit Eigenwert}$$

$$\lambda_k = \hat{g}(k) = \frac{1}{\sqrt{N}} \sum_{\ell=0}^{N-1} e^{i \frac{2\pi}{\pi} k l} g(\ell) = (\vec{g}, \vec{b}_k)$$

Beweis:

$$(M\vec{b}_k)_j = \sum_\ell M_{j\ell} \, e^{i \frac{2\pi}{N} k\ell} / \sqrt{N} = \sum_\ell g(\underbrace{j-\ell}_{=x \Rightarrow j-x}) e^{i \frac{2\pi}{N} k\ell} / \sqrt{N}$$

$$\overset{!}{=} \sum_{x=0}^{N-1} g(x) \, e^{i \frac{2\pi}{N} (j-x) k} \frac{1}{\sqrt{N}}$$

$$= \underbrace{\frac{e^{i \frac{2\pi}{N} (j-k)}}{\sqrt{N}}}_{(\vec{b}_k)_j} \underbrace{\sum_x g(x) \, e^{-i \frac{2\pi}{N} x k}}_{\hat{g}(k)} \qquad ▨$$

In unserem Fall:

$$-\omega_k^2 = \lambda_k = \hat{g}(k) = \frac{1}{\sqrt{N}}\left(-2 + \underbrace{1 e^{-i\frac{2\pi}{N}k} + 1 \cdot e^{-i\frac{2\pi}{N}k(N-1)}}_{e^{-i\frac{2\pi}{N}k} + e^{+i\frac{2\pi}{N}k} = 2\cos\left(\frac{2\pi}{N}k\right)}\right)$$

$$= \frac{2}{\sqrt{N}}\left(\cos\left(\frac{2\pi}{N}k\right) - 1\right)$$

$$\Rightarrow \omega_k^2 = \frac{2}{\sqrt{N}}\left(1 - \cos\frac{2\pi}{N}k\right)$$ Dispersion. Gl.

⇝ Eigenwerte sind 2. Fach entartet

$\Rightarrow \lambda_k = \lambda_{-k}$ ⇝ kann in diesem entarteten ER neue Eigenvektoren finden:

$$(\vec{b}_k + \vec{b}_{-k})_j = \frac{2}{\sqrt{N}}\cos\left(\frac{2\pi}{N}k \cdot j\right)$$

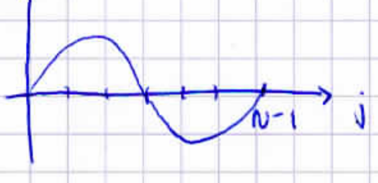
$$\frac{1}{i}(\vec{b}_k + \vec{b}_{-k})_j = \frac{2}{\sqrt{N}}\sin\left(\frac{2\pi}{N}k \cdot j\right)$$

Normalenmoden:

$k = 0$: δ_j

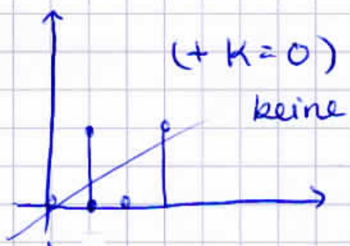
$\omega_0 = 0$ ⇝ gleichförmige Bwg.

$K = 1$

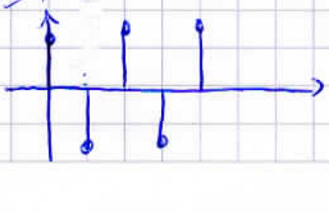


Stehende Welle.
Eine volle räumliche Schw.
zeitl. Fre. $\omega_1 = \ldots$

$K = \frac{N}{2}$ ⇝ Grenzfrequenz

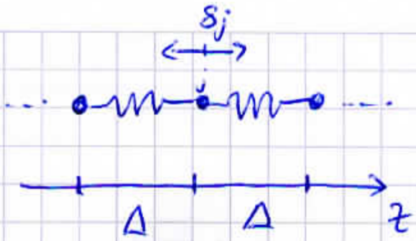


$(+K=0)$
keine Normalmode



cos - Normalmode

zu ②:



$\delta(z) = \delta_{\lfloor \frac{z}{\Delta} \rfloor}$ Verschiebungsfeld

BWgl.: $\ddot{\delta}(z,t) = \frac{k}{m}\left(+\delta(z-\Delta,t) - 2\delta(z,t) + \delta(z+\Delta,t)\right)$

$$\Longleftrightarrow \quad \frac{m}{\Delta}\ddot{\delta}(z,t) = \frac{k}{\Delta}(\ldots)$$

$$= (k\Delta)\frac{\frac{\delta(z+\Delta)-\delta(z)}{\Delta} - \frac{\delta(z)-\delta(z-\Delta)}{\Delta}}{\Delta}$$

limes:

$$\xrightarrow[\substack{\Delta \to 0 \\ \frac{m}{\Delta} \to \rho \\ k\Delta \to E}]{} \quad E\frac{d^2}{(dz)^2}\delta(z,t)$$

$$\rightsquigarrow \quad \left[\frac{d^2}{(dt)^2} - \frac{E}{\rho}\frac{d^2}{(dz)^2}\right]\delta(z,t) = 0$$

Wellengleichung für δ-Feld.

Lsg: $\delta(z,t) = e^{i(kz-\omega t)} \rightsquigarrow \omega(k) = \sqrt{\frac{E}{\rho}}\,k$

9. Vorlesung

TP 1
15.11.18

Lagrange

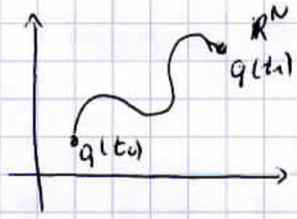
Variationsrechnung

Ein Funktional ist Fkt., die einer Kurve $\vec{q}: [t_0, t_1] \to \mathbb{R}^N$ eine Zahl zuordnet.

Wir arbeiten nur mit Funktionalen in "Integralform"

→ Wähle eine Lagrange-Fkt., also eine beliebige Fkt.

$L: \mathbb{R}^N \times \mathbb{R}^N \times \mathbb{R} \to \mathbb{R}$



Def. nun - Wirkungs-Funktionale

$$S[\vec{q}(\cdot)] = \int_{t_0}^{t_1} L(\vec{q}(t), \dot{\vec{q}}(t), t)\, dt$$

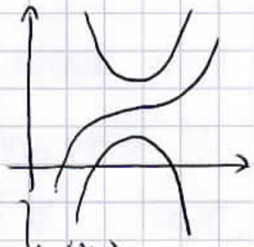
Bsp. Bogenlängen

$L(\vec{x}, \vec{v}, t) = \|\vec{v}\|$

$$\to S[\vec{q}(\cdot)] = \int_{t_0}^{t_1} L(\vec{q}, \dot{\vec{q}}, t)\, dt = \int_{t_0}^{t_1} \|\dot{\vec{q}}(t)\|\, dt = \text{Länge der Kurve}$$

Natürliche Frage: Wann ist ein Funktional stationär?

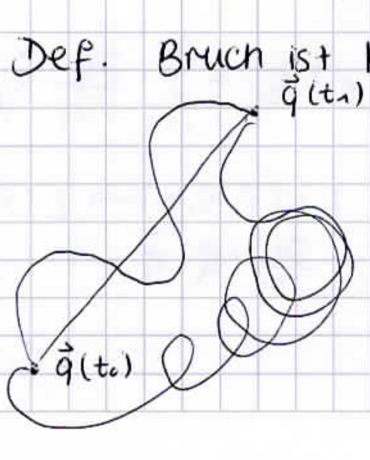
In 1-D Analysis: Betrachte $f: \mathbb{R} \to \mathbb{R}$. Pkt. $x \in \mathbb{R}$ ist stationär wenn $f'(x) = \frac{d}{d\varepsilon}\Big|_{\varepsilon=0} f(x+\varepsilon) = 0$



Verallgemeinerung für Funktionale

Wählen:
- Anfangs- und Endzeit t_0 / t_1
- Anfangs- und Endpunkt $\vec{q}(t_0)$, $\vec{q}(t_1)$ $\Big\}$ (*)

Def. Bruch ist Menge aller (glatten) Kurven mit (*)



Def. S ist bei $\vec{q}(\cdot)$ stationär wenn $S[\vec{q}(\cdot) + \varepsilon \vec{\delta}(\cdot)]$ für Variationen $\varepsilon \vec{\delta}(\cdot)$ in erster Ordnung in ε konstant ist.

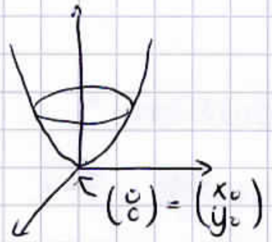
Also:

S bei $\vec q(\cdot)$ stationär $:\Leftrightarrow$ $\forall$ Variationen

$\vec\delta : [t_0, t_1] \to \mathbb{R}^N$, $\quad \vec\delta(t_0) = \vec\delta(t_1) = 0$ gilt:

$$\frac{d}{d\varepsilon}\Big|_{\varepsilon=0} S[\vec q(\cdot) + \varepsilon\,\vec\delta(\cdot)] = 0$$

Bsp. $f(x,y) = x^2 + y^2$



Abl.: ① wähle Richt. $\vec\delta \in \mathbb{R}^2$

↳ $g_\delta(\varepsilon) = f\left(\binom{x_0}{y_0} + \varepsilon\vec\delta\right)$

↳ $g'_\delta(0) = \frac{d}{d\varepsilon}\Big|_{\varepsilon=0} f\left(\underbrace{\binom{x_0}{y_0}}_{\vec q} + \varepsilon\vec\delta\right)$

② Gradient: $\vec\nabla f(x_0, y_0)$

$$g'_\delta(0) = (\vec\nabla f, \vec\delta)$$

$$\frac{d}{d\varepsilon} f(\vec q + \varepsilon\vec\delta) = \frac{\partial f}{\partial q_1}\frac{\partial(\varepsilon\vec\delta)_1}{\partial\varepsilon} + \frac{\partial f}{\partial q_2}\underbrace{\frac{\partial(\varepsilon\vec\delta)_2}{\partial\varepsilon}}_{=\delta_2}$$

$$= \frac{\partial f}{\partial q_1}\delta_1 + \frac{\partial f}{\partial q_2}\delta_2 = (\nabla f, \vec\delta)$$

$f : \mathbb{R}^N \to \mathbb{R}$ ist bei $\vec q \in \mathbb{R}^N$ stationär wenn äquiv.:

① $\forall \vec\delta \in \mathbb{R}^N$, $\frac{d}{d\varepsilon}\Big|_{\varepsilon=0} f(\vec q + \varepsilon\vec\delta) = 0$

② $\vec\nabla f(\vec q) = 0$

Wie kann man testen, ob ein $\vec q(\cdot)$ für ein Funktional S stationär ist?

Dazu: $\forall\vec\delta$

$$0 = \frac{d}{d\varepsilon}\Big|_{\varepsilon=0} S[\vec q(\cdot) + \varepsilon\vec\delta(\cdot)] = \frac{d}{d\varepsilon}\Big|_{\varepsilon=0} \int L(\vec q(t) + \varepsilon\vec\delta(t),$$

$$\dot{\vec q}(t) + \varepsilon\dot{\vec\delta}(t), t)\,dt = \int \sum_{j=1}^{N} \frac{\partial L}{\partial q_j}(\vec q, \dot{\vec q}, t)\,\delta_j + \sum_{j=1}^{N} \underbrace{\frac{\partial L}{\partial \dot q_j}}\,\dot\delta_j)\,dt$$

$$\underset{P.I}{=} \int \sum_j \left(\left(\frac{\partial L}{\partial q_j} - \frac{d}{dt}\frac{\partial L}{\partial \dot q_j}\right)\delta_j\right)dt \overset{!}{=} 0$$

$\forall\vec\delta(t)$

$L : (\vec x, \vec v, t) \mapsto L(\vec x, \vec v, t)$

$\frac{\partial L}{\partial v_j}(\vec q, \dot{\vec q}, t)$

9. Vorlesung / 11. Vorlesung — TP 1
2. Teil — 15.11.18

Hinreichend: $\forall j = 1, \dots, N$

$$\frac{\partial L}{\partial q_j} - \frac{d}{dt}\frac{dL}{\partial \dot q_j} = 0 \qquad \text{Euler-Lagrange-Gl.}$$

Auch notwendig.

Bsp: Bogenlänge:

$$L(\vec x, \vec v, t) = \|\vec v\| = \left(\sum_j v_j^2\right)^{1/2}$$

$$\frac{\partial L}{\partial x_j} = 0 \qquad \frac{\partial L}{\partial v_j} = \frac{v_j}{\|\vec v\|} \rightsquigarrow \frac{d}{dt}\left(\frac{\dot q_j(t)}{\|\dot{\vec q}_j\|}\right) = 0 \quad \forall j$$

$$\Rightarrow \quad \frac{\dot{\vec q}(t)}{\|\dot{\vec q}(t)\|} = \text{Konst.}$$

11. Vorlesung — 22.11.18

"Verallgemeinerte Koordinaten"

Betrachte $\mathbb{R}^N$, mit Kartesischen Koordinaten $\vec r$. Sei $\vec q$ ein anderer Satz von Koordinaten

Also: $\vec q(\vec r)$ ist umkehrbare Funktion: $\exists\, \vec r(\vec q)$.

Hier Schreibe $\vec r(\vec q) = \vec\Phi(\vec q)$, $\vec\Phi : \mathbb{R}^N \to \mathbb{R}^N$

Bsp.: • $\vec q(\vec r) = R\vec r + \vec a$ eine Galileo Transformation

• $\vec q(\vec r) = \begin{pmatrix} \sqrt{x^2+y^2} \\ \arcsin\left(\frac{x}{y}\right)\end{pmatrix}$ Polarkoordinaten.

$\uparrow$ $\binom{x}{y}$

Ziel: BWGL. in $\vec q$-Koordinaten

Erinn. Galileo-Fall: $\ddot{\vec r}_j(t) = \frac{1}{m_j}\vec F_j(\vec r(t), \dot{\vec r}(t), t)$

Setze ein $\vec q(t) = \phi(\vec q(t))$

$$\rightsquigarrow \frac{d}{dt} r_j(t) = \sum_{i=1}^{N} \frac{\partial \phi_i}{\partial q_i}\frac{d}{dt} q_i(t)$$

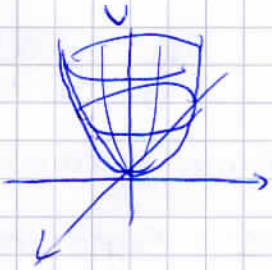
$\vdots$

Im Lag.-Formalismus

Gegeben sei Lag-Fkt $L(\vec{r}, \dot{\vec{r}}, t) = L_r(\vec{r}, \dot{\vec{r}}, t)$

Def.: $L_q(\vec{q}, \dot{\vec{q}}, t) := L_r\left(\vec{\Phi}(\vec{q}), \frac{d}{dt}(\vec{\Phi}(\vec{q})), t\right)$

Bsp.: $N=2$



$$L_r(\vec{r}, \dot{\vec{r}}, t) = \frac{1}{2} m \|\dot{\vec{r}}\|^2 - c\|\vec{r}\|^2$$

Wähle: $\vec{q} = (r, \phi)$ Polarkoordinaten

$$V(\vec{q}) = c r^2$$

$$\vec{r}(t) = r(t)\begin{pmatrix}\cos\phi(t)\\ \sin\phi(t)\end{pmatrix} \rightsquigarrow \frac{d}{dt}\vec{r}(t) = r\dot{\phi}\begin{pmatrix}-\sin\phi\\ \cos\phi\end{pmatrix} + \dot{r}\begin{pmatrix}\cos\phi\\ \sin\phi\end{pmatrix}$$

$$\rightsquigarrow \|\dot{\vec{r}}(t)\|^2 = r^2\dot{\phi}^2 + \dot{r}^2$$

$$L_q(r, \phi, \dot{r}, \dot{\phi}) = \frac{1}{2} m (r^2\dot{\phi}^2 + \dot{r}^2) - c r^2$$

Sei nun $\vec{r}(\cdot)$ eine Bahn, $\vec{q}(\cdot) = \Phi^{-1}(\vec{r}(\cdot))$ die selbe in $\vec{q}$-Koordinaten Nach Konstr.:

$$\forall t: \; L_r(\vec{r}(t), \dot{\vec{r}}(t), t) = L_q(\vec{q}(t), \dot{\vec{q}}(t), t).$$

$$\Rightarrow \quad S_{L_r}[r(\cdot)] = \int_{t_0}^{t_1} L_r(\vec{r}(t), \dot{\vec{r}}(t), t)\, dt$$

$$= \int_{t_1}^{t_2} L_q(\vec{q}(t), \dot{\vec{q}}(t), t)\, dt = S_{L_q}[\vec{q}(\cdot)].$$

Gilt insbesondere auch für Variationen:

$$S_{L_r}[\vec{r}(\cdot) + \varepsilon\vec{\delta}(\cdot)] = S_{L_q}[\vec{q}(\cdot) + \varepsilon\Phi^{-1}(\delta)]$$

$\rightsquigarrow$ $\vec{r}(\cdot)$ stationär (für S_{L_r}) $\Leftrightarrow$ $\vec{q}(\cdot)$ st. (für $S_{L_q}[\,]$)

$\Rightarrow$ BWGl. in $\vec{q}$-Koordinaten sind ELG für L_q!

Rezept: ⓪ Wähle passendes Koordinatensystem

① Drücke T, in $\dot{\vec{q}}$, V in $\vec{q}$ aus

$\rightsquigarrow L_q = T - V$.

② ELG. $\rightsquigarrow$ rechnen

(Alt: "Postuliere" L)

(= rate)

11. Vorlesung	TP 1
2. Teil	22.11.18

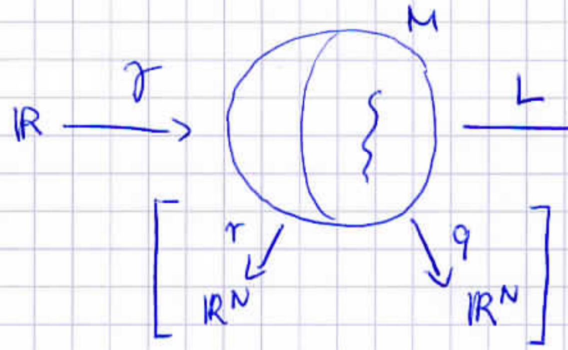
Zurück zum Bsp:

- $q_2 = \phi$: $\frac{\partial L}{\partial \phi} = 0 \rightsquigarrow \phi$ zyklisch! $\rightsquigarrow$ EHG: $\frac{\partial L}{\partial \dot{\phi}} = m r^2 \dot{\phi}$

  (2. Kepler Gesetz)

- $q_1 = r$: $\frac{\partial L}{\partial r} \dots$ Selber machen!

N.B. Stationaritätsprinzip kann Koordinatenfrei form. werden!



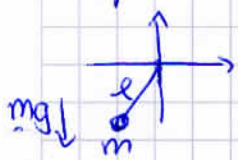
"$\gamma = (\vec{q}, \dot{\vec{q}})$
Tangentenbündel"

$$S = \int L(\gamma(t))\, dt = \int L((r^{-1} \circ r \circ \gamma(t))\, dt$$
$$= \int L_r(\gamma_r(t))\, dt = L_q(\gamma_q(t))\, dt$$

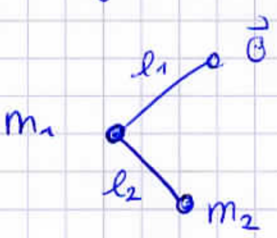
Zwangsbedingungen

Häufig: "Konfigurationsraum" ist eingeschränkt

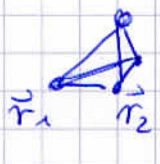
Bsp.: ① Pendel in $\mathbb{R}^2$, $\mathbb{R}^3$



Doppelpendel:

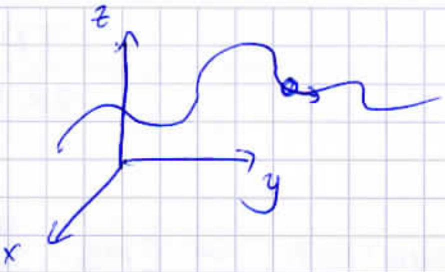


Bsp. ② Starrer Körper

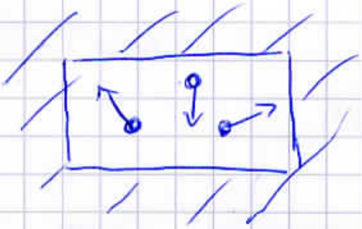


$\vec{d}_{ji}(t) = \vec{r}_j - \vec{r}_i$ sollen der Länge und der relativen Winkel nach erhalten sein.

$(\vec{d}_{ij}, \vec{d}_{i'j'}) = \text{const} \quad \forall (i,j), (i',j')$

③ 

Erbse im Rohr.

④ 

12. Vorlesung

TP1
23.11.18

bisher:

Newton. Mechanik $\longleftrightarrow$ Stationaritätsprinzip

z.B für Teilchen im kons. Kraftfeld $\vec{F} = -\operatorname{grad} U$
Masse m

Newton: Bahn $\vec{r}(t)$ ist Lösung der BWGl.:

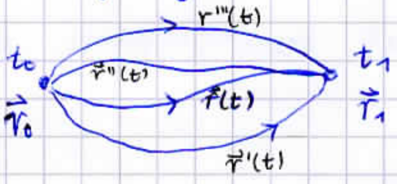
$$m\ddot{\vec{r}}(t) = \vec{F}(\vec{r}(t))$$

Stationaritätsprinzip:

Bahn $\vec{r}(t)$ ist stationäre Funktion des Wirkungsfunktionals

$$S[\vec{r}] = \int_{t_0}^{t_1} L(\vec{r}(t), \dot{\vec{r}}(t))\, dt$$

mit Lagrange-Fkt. $L(\vec{r}, \dot{\vec{r}}) = \underbrace{\frac{m}{2}|\dot{\vec{r}}|^2}_{T} - \underbrace{U(\vec{r})}_{V}$



$\vec{r}(t)$ minimiert $S[\vec{r}]$!

Warum Newton $\longleftrightarrow$ S.P?

$\vec{r}(t)$ stationär (ELG)

$\longleftrightarrow$ $\vec{r}(t)$ genügt Euler-Lagrange Gl.en

$$0 = \frac{\partial L}{\partial r_i}(\vec{r}(t), \dot{\vec{r}}(t)) - \frac{d}{dt}\frac{\partial L}{\partial \dot{r}_i}(\vec{r}(t), \dot{\vec{r}}(t))$$

$\vec{r} = \begin{pmatrix} r_1 \\ r_2 \\ r_3 \end{pmatrix}$ (kurz $\frac{\partial L}{\partial r_i} - \frac{d}{dt}\frac{\partial L}{\partial \dot{r}_i} = 0$)

$$0 \overset{!}{=} -\operatorname{grad} U(\vec{r}(t)) - m\ddot{\vec{r}}(t)$$

d.h. $\vec{r}(t)$ genügt Newt. Bew. Gl.

beachte: Wirkung einer Bahn ist unabhängig von Wahl der Koordinaten!

$$\vec{r}(t) \underset{\Phi}{\overset{\Phi^{-1}}{\rightleftarrows}} \vec{q}(t) = \Phi^{-1}(\vec{r}(t))$$

$$\underbrace{S[\vec{r}]}_{\int_{t_0}^{t_1} L(\vec{r}(t), \dot{\vec{r}}(t))\,dt} \overset{!!}{=} S_q[\vec{q}] = \int_{t_0}^{t_1} L_q(\vec{q}(t), \dot{\vec{q}}(t))\, dt$$

d.h. $\vec{r}(t)$ stationär $\Leftrightarrow$ $\vec{q}(t)$ stationär

$\rightsquigarrow$ ELG gelten in allen Koordinaten!

|| Rezept: Lagrange Mechanik

(0) Wähle geeignete Koordinaten

$$\vec{q} \equiv q = (q_1, q_2, \ldots, q_n)$$ # Freiheitsgrade

(1) bestimme $L(q, \dot{q}) = T(q, \dot{q}) - V(q)$

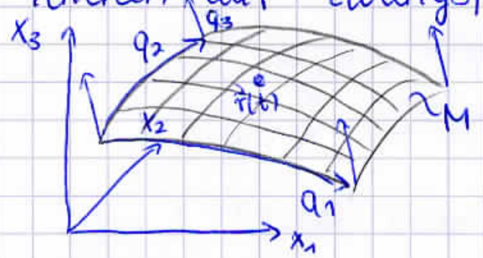
(2) Löse ELG $\frac{\partial L}{\partial q_i} - \frac{d}{dt}\frac{\partial L}{\partial \dot{q}_i} = 0$

$\rightsquigarrow$ Bahn $q(t)$!

Lagrange-Mechanik besonders vorteilhaft bei

Bewegung unter Zwangsbedingungen

Teilchen auf Zwangsfläche: unter kons. Kraft $\vec{F} = -\text{grad}\, U$



- Zwangskraft $\vec{F}_z(t)$ hält per. def. Teilchen auf Zwangsebene M
- $\vec{F}_z \perp M$

Welcher Bahn $\vec{r}(t)$ folgt das Teilchen?

Newton: $m\ddot{\vec{r}}(t) = \vec{F}(\vec{r}(t)) + \vec{F}_z(t)$

Lagrange:

(0) Wähle geeignete Koordinaten $q = (q_1, q_2, q_3)$ derart, dass für alle $q \in M$ $q_3 = 0$:

$$q = (q_1, q_2, q_3) \in M \Leftrightarrow q_3 = 0$$

(1) Annahme:

Lagr.-Funktion $L(q, \dot{q})$ des vollst. Systems (inkl. Zwangskraft!) bekannt!

(2) $q(t) = (q_1(t), q_2(t), q_3(t))$ als Lösungen der ELGen!

Wichtig: wenn alles stimmt muss $q(t) \in M$ für alle t!

d.h. $q_3(t) \equiv 0$!

12. Vorlesung
Teil. 2

23.11.18
TP 1

Konsequenzen:

in (1): $L_q(\vec{q}, \dot{\vec{q}})$

brauch nur für $q_3 \equiv 0$ und $\dot{q}_3 = 0$ bestimmt werden

in (2): • setze $q_3(t) = 0$!

→ nur Lösungen der ELG für q_1, q_2!

Rezept:

Lagrange-Mechanik unter Zwangsbedingungen

(0) wähle sog. unabhängige Koordinaten auf Zwangsfl. M $q = (q_1, q_2)$

allg: • n Freiheitsgrade ohne Z-Bed.

• k Zwangsbedingungen

⇝ $m = n - k$ unabh. Koordinaten:

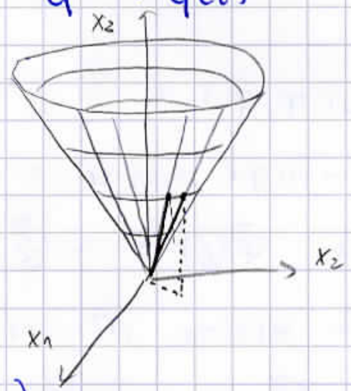
(1) bestimme $L_q(q, \dot{q})$ anhand $T(q, \dot{q})$ und $V(q)$

(2) Löse ELG in unabh. Koordinaten $q \rightarrow q(t)$

1. Beispiel

Teilchen auf Kegelmantel unter Schwerkraft

$g \downarrow$



(0) unabhängige Koordinaten:

$$q = (r, \varphi)$$

$$q \longrightarrow \vec{r} = \begin{pmatrix} r\cos\varphi \\ r\sin\varphi \\ ur \end{pmatrix} \quad \left(\frac{z}{r} = u = \cot\alpha\right)$$

(1)
$$\dot{\vec{r}} = \frac{\partial \vec{r}}{\partial r} \cdot \dot{r} + \frac{\partial \vec{r}}{\partial \varphi} \dot{\varphi} = \begin{pmatrix} \cos\varphi \\ \sin\varphi \\ u \end{pmatrix} \dot{r} + \begin{pmatrix} -\sin\varphi \\ \cos\varphi \\ 0 \end{pmatrix} r\dot{\varphi}$$

$$\rightsquigarrow |\dot{\vec{r}}|^2 = (1 + u^2)\dot{r}^2 + r^2\dot{\varphi}^2$$

$$\longrightarrow T(r, \cancel{\varphi}, \dot{r}, \dot{\varphi}) = \frac{m}{2} |\dot{\vec{r}}|^2 = \frac{m}{2}\left((1 + u^2)\dot{r}^2 + r^2\dot{\varphi}^2\right)$$

$$V(r, \cancel{\varphi}) = m \cdot g \cdot u \cdot r$$

$$\Rightarrow L(r, \varphi, \dot{r}, \dot{\varphi}) = \frac{m}{2}\left((1+u^2)\dot{r}^2 + r^2\dot{\varphi}^2\right) - m \cdot g\, ur$$

(2') ELG:

(i) φ: • $\frac{\partial L}{\partial \varphi} = 0$

• $\frac{\partial L}{\partial \dot\varphi} = mr^2\dot\varphi$

$\rightarrow 0 = -\frac{d}{dt}\frac{\partial L}{\partial \dot\varphi} = -\frac{d}{dt}(mr^2\dot\varphi) = 0$

d.h. $l_z := mr^2\dot\varphi$ ist Erhaltungsgröße

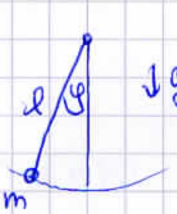
(ii) r: $\frac{\partial L}{\partial r} = mr\dot\varphi^2 - mgu$

$$\frac{d}{dt}\frac{\partial L}{\partial \dot r} = \frac{d}{dt}\left(m(1+u^2)\dot r\right) = m(1+u^2)\ddot r$$

ELG: $m(1+u^2)\ddot r = mr\dot\varphi^2 - mgu = \frac{l_z^2}{mr^3} - mgu$

$$m(1+u^2)\ddot r = -\frac{\partial}{\partial r}\underbrace{\left(\frac{l_z^2}{2mr^2} + mgur\right)}_{U_{eff}} \quad \rightsquigarrow r(t)$$

2. Beispiel: ebene Pendel



$U(\vec r) = mg\, x_3 + \text{konst}$

(0): $q = \varphi$!

(1): $T(\varphi,\dot\varphi) = \frac{m}{2}(l\dot\varphi)^2 = \frac{m}{2}l^2\dot\varphi^2$

$V(\varphi) = -mgl\cos\varphi$

$$L(\varphi,\dot\varphi) = \frac{m}{2}l^2\dot\varphi^2 + mgl\cos\varphi$$

(2) $-mgl\sin\varphi = \frac{\partial L}{\partial \varphi} = \frac{d}{dt}\frac{\partial L}{\partial \dot\varphi} = ml^2\ddot\varphi$

$\rightsquigarrow \ddot\varphi(t) = -\frac{g}{l}\sin(\varphi(t))$

für kleine Auslenkung $\varphi \ll 1$: $\sin\varphi = \varphi$

$\ddot\varphi = -\omega^2\varphi$, $\omega = \sqrt{\frac{g}{l}}$

$\rightsquigarrow$ harm. Schwingung mit

Offene Fragen:

1) Bestimmung der Zwangskräfte

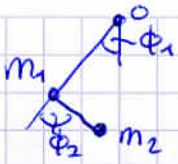
2) explizite Behandlung des Zwangsmechanismus (physik. realisier.)

$L(q,\dot q) \to q(t)$! $\quad q(t) \xrightarrow{\Phi} \vec r(t) = \Phi(q)$

$\rightsquigarrow m\ddot{\vec r}(t) = \vec F(\vec r(t)) + \vec F_z(t) \Rightarrow \vec F_z(t) = m\ddot{\vec r}(t) - \vec F(\vec r(t))$

13. Vorlesung | TP 1
29.11.18

Wiederholung:



Rezept:

① Identifiziere die FHG des Systems mit z.B

$\hat{=}$ Minimale # m, von Parametern, die gültige Konfig. eindeutig festlegen. Bsp.: $q_1 = \phi_1$, $q_2 = \phi_2$

② Drücke T, V in $\vec{q}, \dot{\vec{q}}$ aus $\vec{q} = \begin{pmatrix} q_1 \\ \vdots \\ q_m \end{pmatrix} \rightsquigarrow L(\vec{q}, \dot{\vec{q}})$

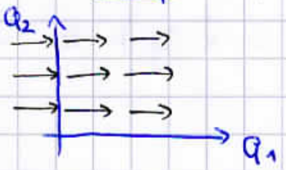
③ ELG-Gl. lösen. Für m<N Gleichungen

Anm.: Traditionell: Führe Thema über das "d'Alembertsche Prinzip der virtuellen Arbeit."

Noether - Theorem

Erinnerung: q_i zyklisch

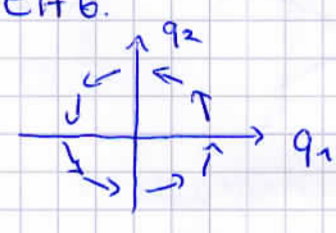
$$\left.\begin{aligned} &\Leftrightarrow \frac{\partial L}{\partial q_i} = 0 \\ &\Leftrightarrow \forall \vec{q}, \vec{v};\ L(\underbrace{\vec{q} + s\vec{e}_i}, \vec{v}) = L(\vec{q}, \vec{v}) \end{aligned}\right\} \underset{ELG}{\Rightarrow} \frac{\partial L}{\partial \dot{q}_i}(\vec{q}(t), \dot{\vec{q}}(t)) \text{ EHG.}$$



$$\vec{q} \mapsto \vec{q} + s\vec{e}_1$$

$\Rightarrow$ "Symm. ∥ zu Koordinatenachsen $\Rightarrow$ EHG."

Allgemeinere Symmetrien: Bsp.



$\vec{\Phi}^{(s)}$ Transformation $\mathbb{R}^N \to \mathbb{R}^N$ s.d

① $\vec{\Phi}^{(0)}(\vec{r}) = \vec{r}$

② $\forall \vec{q}(\cdot)$ gilt: $L(\vec{q}(t), \frac{d}{dt}\vec{q}(t)) = L(\Phi^{(s)}(\vec{q}(t)), \frac{d}{dt}\Phi^{(s)}(\vec{q}(t)))$

Bsp. ① $\Phi^{(s)}(\vec{r}) = \vec{r} + s\vec{e}_i$ Transl.

② $\Phi^{(s)}(\vec{r}) = $ (Rotation von Winkel s) $(\vec{r})$

Mögliche Beweisstrategie: Wähle Koordinaten $\vec{q}$ s.d.

$\vec{\Phi}^{(s)}: \vec{q} \longmapsto \vec{q} + s\vec{e}_1$ und benutze, dass q_1 zyklisch ist.

Bsp.: $\vec{\Phi}^{(s)}$: Rotation, in 2D ⇝ in Polarkoordinaten

$\hat{=}\ \Phi \to \Phi + s$

Noether:

Sei $\Phi^{(s)}$, L wie zuvor

Setze: $I(\vec{q}, \dot{\vec{q}}) = \sum_j \frac{\partial L}{\partial \dot{q}_j} \frac{\partial}{\partial s}\Big|_{s=0} \Phi^{(s)}(\vec{q})$

Dann ist
$$\frac{d}{dt} I(\vec{q}(t), \dot{\vec{q}}(t)) = 0$$

Beweis: $\frac{d}{dt} \sum_j \frac{\partial L}{\partial \dot{q}_j} \frac{\partial}{\partial s}\Big|_0 \Phi_j^{(s)}(\vec{q})$

Produktregel, ELG
$$= \sum_j \frac{\partial L}{\partial q_j} \frac{\partial}{\partial s}\Big|_0 \Phi_j^{(s)}(\vec{q}) + \sum_j \frac{\partial L}{\partial \dot{q}_j} \frac{\partial}{\partial s}\Big|_{s=0} \frac{d}{dt} \Phi_j^{(s)}(\vec{q})$$

$$= \frac{d}{ds}\Big|_{s=0} L\left(\Phi^{(s)}(\vec{q}), \frac{d}{dt}\Phi^{(s)}(\vec{q})\right) \underset{\text{Annahme}}{=} 0. \quad \blacksquare$$

Bsp.: Zentralkraft $\hat{=}\ L(\vec{r}, \vec{v}) = \frac{1}{2} m \|\vec{v}\|^2 - V(\|\vec{r}\|)$

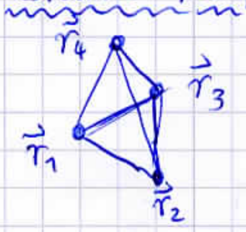
$$\Phi^{(s)}(\vec{r}) = \begin{pmatrix} \cos s & -\sin s & \\ \sin s & \cos s & \\ & & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix}$$

① $\frac{\partial}{\partial s}\Big|_{s=0} \Phi^{(s)}(\vec{r}) = \begin{pmatrix} 0 & -1 & \\ 1 & 0 & \\ & & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -y \\ x \\ 0 \end{pmatrix} = \vec{e}_z \times \vec{r}$, $\vec{e}_z = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$

② $\frac{\partial L}{\partial \dot{\vec{r}}_i} = m \cdot \dot{\vec{r}}_i = m \begin{pmatrix} \dot{x} \\ \dot{y} \\ \dot{z} \end{pmatrix}$

$$\Rightarrow I(\vec{r}, \dot{\vec{r}}) = m(\dot{y}x - \dot{x}y) = -L_z.$$

Starre Körper



$\vec{r}_i \in \mathbb{R}^3$, $\vec{r}_i = \vec{r}_i(t)$

Fixiere: $\|\vec{r}_i - \vec{r}_j\| = d_{ij} = \text{const}$

$(\vec{r}_i, \vec{r}_j) = \text{const}$

Freiheitsgrade:
- Schwerpunktskoordinate $\in \mathbb{R}$

Ann. Körper ist nicht in einer Linie enthalten ⇝
- Rotation, die die Orientierung des Körpers relativ zu einer Referenzor. (z.B. zum Zeitpunkt 0) $\in SO(3)$