Quantenmechanik

Sommersemester 2021 — David Gross, Mariami Gachechiladze

Klausur. **Matrikeln. 7345071** — Institut für Theoretische Physik, Universität zu Köln

Aufgabe	1	2	3	4	5	6	Gesamt
Punkte							
	4	8	7	10	10	6	45
Initialen							

Nützliche Formeln

- Leiteroperatoren des harmonischen Oszillators:

$$a = \frac{1}{\sqrt{2}}\left(\frac{X}{x_0} + i\frac{P}{p_0}\right), \quad a^\dagger = \frac{1}{\sqrt{2}}\left(\frac{X}{x_0} - i\frac{P}{p_0}\right) \quad \text{mit} \quad x_0 = \sqrt{\frac{\hbar}{m\omega}},\ p_0 = \sqrt{\hbar m\omega}.$$

  Wirkung: $a|n\rangle = \sqrt{n}|n-1\rangle$, $a^\dagger|n\rangle = \sqrt{n+1}|n+1\rangle$. Kommutatorrelation: $[a, a^\dagger] = \mathbb{1}$.

- Darstellung der Orts- und Impulsoperatoren im Impulsraum:

$$X = \int \left(i\frac{\partial}{\partial k}\right)|k\rangle\langle k|\,\mathrm{d}k \quad \text{und} \quad P = \int \hbar k|k\rangle\langle k|\mathrm{d}k.$$

- Energiekorrekturen in 2. Ordnung Störungstheorie (ohne Entartung):

$$E_n^{(2)} = \lambda^2 \sum_{m\neq n} \frac{|\langle m|V|n\rangle|^2}{E_n - E_m}.$$

- Gaußintegral:

$$\int_{-\infty}^{\infty} \mathrm{d}x\ e^{-\alpha^2(x+\beta)^2} = \frac{\sqrt{\pi}}{\alpha}$$

  für komplexe α, β mit $\mathrm{Re}(\alpha^2) > 0$.

1 Erwartungswerte und Wahrscheinlichkeiten (4 Punkte)

Sei
$$|\varphi\rangle = \frac{1}{\sqrt{3}}(|1\rangle - |0\rangle + i|-1\rangle)$$
ein Quantenzustand von Spin-1-Teilchen, und
$$S_z = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \end{pmatrix}$$
die Spin-1-Observable in der $\{|1\rangle, |0\rangle, |-1\rangle\}$-Basis.

a) **(2 Punkte)** Berechnen Sie den Erwartungswert $\langle\varphi|S_z|\varphi\rangle$.

b) **(2 Punkte)** Was sind die möglichen Messergebnisse von S_z und wie hoch sind die Wahrscheinlichkeiten, diese bei der Messung im Zustand $|\varphi\rangle$ zu erhalten?

2 Schrödingergleichung (8 Punkte)

Sei
$$H = \frac{\mu B}{\sqrt{2}} \begin{pmatrix} -1 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}$$
der Hamiltonoperator eines Spin-$\frac{1}{2}$-Teilchens in einem homogenen Magnetfeld der Stärke B, ausgedrückt in der $\{|\uparrow\rangle, |\downarrow\rangle\}$-Basis. Betrachten Sie den Anfangszustand $|\psi(t=0)\rangle = |\uparrow\rangle$.

a) **(4 Punkte)** Berechnen Sie den Zeitentwicklungsoperator $U(t) = \exp(-itH/\hbar)$ und drücken Sie ihn als Matrix in der $\{|\uparrow\rangle, |\downarrow\rangle\}$ -Basis aus.

Hinweis: $\left(\frac{H}{\mu B}\right)^2 = \mathbb{1}$.

b) **(2 Punkte)** Berechnen sie damit $|\psi(t)\rangle$.

c) **(2 Punkte)** Berechnen Sie die Wahrscheinlichkeit das Ergebnis $\uparrow$ bzw. $\downarrow$ bei einer Messung in der Basis $\{|\uparrow\rangle, |\downarrow\rangle\}$ im Zustand $|\psi(t)\rangle$ zu erhalten.

3 Asymmetrischer Potentialtopf (10 Punkte)

Betrachten Sie folgendes Potential mit $V_0 > 0$:
$$V(x) = \begin{cases} \infty & x < 0 \\ 0 & 0 \le x < r \\ V_0 & r \le x \end{cases}$$

a) **(2 Punkte)** Nehmen Sie an, dass $0 < E \le V_0$ und $\mathrm{Im}(k_2) > 0$ und finden Sie die Werte von k_1 und k_2 als Funktion von E und V_0, so dass die Funktion
$$\varphi(x) = \begin{cases} 0 & & & : & x < 0 \\ Ae^{ik_1 x} & + & Be^{-ik_1 x} & : & 0 \le x < r \\ Ce^{ik_2 x} & + & De^{-ik_2 x} & : & r \le x \end{cases}$$
eine Lösung für die zeitunabhängige Schrödingergleichung ist.

b) (2 Punkte) Nutzen Sie die Randbedingungen und dass $\varphi(x)$ stetig ist. Zeigen Sie damit, dass

$$\begin{aligned} D &= 0, \\ A + B &= 0, \\ C &= 2iAe^{-ik_2 r}\sin(k_1 r). \end{aligned}$$

c) (3 Punkte) Nutzen Sie a)-b) und dass $\varphi'(x)$ bei $x = r$ stetig ist und zeigen Sie dass

$$\sqrt{\frac{V_0}{E} - 1} = -\cot\left(\frac{r\sqrt{2mE}}{\hbar}\right)$$

gilt.

d) (2 Punkte) Wählen Sie $r = \frac{\pi\hbar}{\sqrt{8V_0 m}}$ und zeigen Sie, dass

$$\sin\left(\frac{\pi}{2}\sqrt{\frac{E}{V_0}}\right) = \sqrt{\frac{E}{V_0}}.$$

e) (1 Punkte) Zur Interpretation des Ergebnises aus d): Die Zustände mit Energie $\leq V_0$ sind genau die *gebundenen Zustände*. Wie viele gebundene Zustände gibt es also für diese Wahl von r?

Hinweis: Eine Skizze der beiden Seiten der Gleichung als Funktion von E könnte helfen.

4 Harmonischer Oszillator (10 Punkte)

Sei $|\psi_0\rangle$ eine Wellenfunktion, die im Impulsraum durch

$$\langle k|\psi_0\rangle = \frac{1}{\pi^{1/4}\sqrt{p_0}}\exp\left(-\frac{(\hbar k)^2}{2p_0^2}\right)$$

gegeben ist.

a) (3 Punkte) Zeigen Sie, dass $|\psi_0\rangle$ der Grundzustand des harmonischen Oszillators ist, in dem sie die Darstellung von X und P im Impulsraum nutzen, um die Differentialgleichung

$$a|\psi_0\rangle = 0$$

zu verifizieren. Zeigen Sie auch, dass $|\psi_0\rangle$ normiert ist.

Hinweis: Die Formelsammlung am Anfang könnte nützlich sein.

b) (3 Punkte) Benutzen Sie nun den Erzeugungsoperator $a^\dagger$, um die Impulsdarstellung $\langle k|\psi_1\rangle$ des ersten angeregten Zustandes zu berechnen.

c) (4 Punkte) Sei nun $\Delta A_{|\psi\rangle} = \langle\psi|A^2|\psi\rangle - \langle\psi|A|\psi\rangle^2$ die Varianz einer Observablen A. Benutzen Sie die Leiteroperatoren um zu zeigen, dass

$$\Delta X_{|n\rangle}\Delta P_{|n\rangle} = x_0^2 p_0^2\left(n + \frac{1}{2}\right)^2.$$

Dabei ist $|n\rangle$ der n-te angeregte Zustand des harmonischen Oszillators.

5 Kubische Störung des harmonischen Oszillators (10 Punkte)

Betrachten Sie eine kubische Störung des harmonischen Oszillators wie folgt

$$H = \frac{P^2}{2m} + \frac{1}{2}m\omega^2 X^2 + \lambda X^3.$$

Berechnen Sie die Korrektur zu den Energieeigenwerten des ungestörten harmonischen Oszillators in *zweiter Ordnung* Störungstheorie.

Hinweis: Drücken Sie den Störoperator durch Leiteroperatoren aus.

6 Quantenkorrelationen (6 Punkte)

Sei

$$|\varphi\rangle = \frac{1}{\sqrt{2}}(|\uparrow,\uparrow,\uparrow\rangle + |\downarrow,\downarrow,\downarrow\rangle)$$

ein Quantenzustand von drei Spin-1/2-Teilchen, und

$$S_\alpha = \sin(\alpha)\sigma_x + \cos(\alpha)\sigma_z.$$

Zeigen sie dass die Erwartungswert

$$\langle\varphi|S_\alpha^{(1)} S_\beta^{(2)} S_\gamma^{(3)}|\varphi\rangle = -\sin(\alpha)\sin(\beta)\sin(\gamma)$$

ist, wobei $S_\alpha^{(1)}$, $S_\beta^{(2)}$ und $S_\gamma^{(3)}$ die Spin-1/2-Observablen des ersten, zweiten und dritten Teilchens sind.