

# Quantenmechanik

Sommersemester 2021

Klausur. Matrikeln. 7348769

David Gross, Mariami Gachechiladze

Institut für Theoretische Physik, Universität zu Köln

---

| Aufgabe   | 1 | 2 | 3 | 4  | 5  | 6 | Gesamt |
|-----------|---|---|---|----|----|---|--------|
| Punkte    |   |   |   |    |    |   |        |
|           | 4 | 8 | 7 | 10 | 10 | 6 | 45     |
| Initialen |   |   |   |    |    |   |        |

## Nützliche Formeln

- Leiteroperatoren des harmonischen Oszillators:

$$a = \frac{1}{\sqrt{2}} \left( \frac{X}{x_0} + i \frac{P}{p_0} \right), \quad a^\dagger = \frac{1}{\sqrt{2}} \left( \frac{X}{x_0} - i \frac{P}{p_0} \right) \quad \text{mit} \quad x_0 = \sqrt{\frac{\hbar}{m\omega}}, \quad p_0 = \sqrt{\hbar m\omega}.$$

Wirkung:  $a|n\rangle = \sqrt{n}|n-1\rangle$ ,  $a^\dagger|n\rangle = \sqrt{n+1}|n+1\rangle$ . Kommutatorrelation:  $[a, a^\dagger] = \mathbb{1}$ .

- Darstellung der Orts- und Impulsoperatoren im Impulsraum:

$$X = \int \left( i \frac{\partial}{\partial k} \right) |k\rangle \langle k| dk \quad \text{und} \quad P = \int \hbar k |k\rangle \langle k| dk.$$

- Energiekorrekturen in 2. Ordnung Störungstheorie (ohne Entartung):

$$E_n^{(2)} = \lambda^2 \sum_{m \neq n} \frac{|\langle m|V|n\rangle|^2}{E_n - E_m}.$$

- Gaußintegral:

$$\int_{-\infty}^{\infty} dx e^{-\alpha^2(x+\beta)^2} = \frac{\sqrt{\pi}}{\alpha}$$

für komplexe  $\alpha, \beta$  mit  $\text{Re}(\alpha^2) > 0$ .

**1 Erwartungswerte und Wahrscheinlichkeiten****(4 Punkte)**

Sei

$$|\varphi\rangle = \frac{1}{\sqrt{3}}(|1\rangle + |0\rangle + i|-1\rangle)$$

ein Quantenzustand von Spin-1-Teilchen, und

$$S_z = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \end{pmatrix}$$

die Spin-1-Observable in der  $\{|1\rangle, |0\rangle, |-1\rangle\}$ -Basis.

- a) **(2 Punkte)** Berechnen Sie den Erwartungswert  $\langle\varphi|S_z|\varphi\rangle$ .
- b) **(2 Punkte)** Was sind die möglichen Messergebnisse von  $S_z$  und wie hoch sind die Wahrscheinlichkeiten, diese bei der Messung im Zustand  $|\varphi\rangle$  zu erhalten?

**2 Schrödingergleichung****(8 Punkte)**

Sei

$$H = \frac{\mu B}{\sqrt{2}} \begin{pmatrix} -1 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}$$

der Hamiltonoperator eines Spin- $\frac{1}{2}$ -Teilchens in einem homogenen Magnetfeld der Stärke  $B$ , ausgedrückt in der  $\{|\uparrow\rangle, |\downarrow\rangle\}$ -Basis. Betrachten Sie den Anfangszustand  $|\psi(t=0)\rangle = |\uparrow\rangle$ .

- a) **(4 Punkte)** Berechnen Sie den Zeitentwicklungsoperator  $U(t) = \exp(-itH/\hbar)$  und drücken Sie ihn als Matrix in der  $\{|\uparrow\rangle, |\downarrow\rangle\}$ -Basis aus.

**Hinweis:**  $\left(\frac{H}{\mu B}\right)^2 = \mathbb{1}$ .

- b) **(2 Punkte)** Berechnen sie damit  $|\psi(t)\rangle$ .
- c) **(2 Punkte)** Berechnen Sie die Wahrscheinlichkeit das Ergebnis  $\uparrow$  bzw.  $\downarrow$  bei einer Messung in der Basis  $\{|\uparrow\rangle, |\downarrow\rangle\}$  im Zustand  $|\psi(t)\rangle$  zu erhalten.

**3 Asymmetrischer Potentialtopf****(10 Punkte)**Betrachten Sie folgendes Potential mit  $V_0 > 0$ :

$$V(x) = \begin{cases} \infty & x < 0 \\ 0 & 0 \leq x < a \\ V_0 & a \leq x \end{cases}$$

- a) **(2 Punkte)** Nehmen Sie an, dass  $0 < E \leq V_0$  und  $\text{Im}(k_2) > 0$  und finden Sie die Werte von  $k_1$  und  $k_2$  als Funktion von  $E$  und  $V_0$ , so dass die Funktion

$$\varphi(x) = \begin{cases} 0 & : x < 0 \\ Ae^{ik_1x} + Be^{-ik_1x} & : 0 \leq x < a \\ Ce^{ik_2x} + De^{-ik_2x} & : a \leq x \end{cases}$$

eine Lösung für die zeitunabhängige Schrödingergleichung ist.

**b) (2 Punkte)** Nutzen Sie die Randbedingungen und dass  $\varphi(x)$  stetig ist. Zeigen Sie damit, dass

$$\begin{aligned} D &= 0, \\ A + B &= 0, \\ C &= 2iAe^{-ik_2a} \sin(k_1a). \end{aligned}$$

**c) (3 Punkte)** Nutzen Sie a)-b) und dass  $\varphi'(x)$  bei  $x = a$  stetig ist und zeigen Sie dass

$$\sqrt{\frac{V_0}{E} - 1} = -\cot\left(\frac{a\sqrt{2mE}}{\hbar}\right)$$

gilt.

**d) (2 Punkte)** Wählen Sie  $a = \frac{\pi\hbar}{\sqrt{8V_0m}}$  und zeigen Sie, dass

$$\sin\left(\frac{\pi}{2}\sqrt{\frac{E}{V_0}}\right) = \sqrt{\frac{E}{V_0}}.$$

**e) (1 Punkte)** Zur Interpretation des Ergebnisses aus d): Die Zustände mit Energie  $\leq V_0$  sind genau die *gebundenen Zustände*. Wie viele gebundene Zustände gibt es also für diese Wahl von  $a$ ?

**Hinweis:** Eine Skizze der beiden Seiten der Gleichung als Funktion von  $E$  könnte helfen.

#### 4 Harmonischer Oszillator

**(10 Punkte)**

Sei  $|\psi_0\rangle$  eine Wellenfunktion, die im Impulsraum durch

$$\langle k|\psi_0\rangle = \frac{1}{\pi^{1/4}\sqrt{p_0}} \exp\left(-\frac{(\hbar k)^2}{2p_0^2}\right)$$

gegeben ist.

**a) (3 Punkte)** Zeigen Sie, dass  $|\psi_0\rangle$  der Grundzustand des harmonischen Oszillators ist, in dem sie die Darstellung von  $X$  und  $P$  im Impulsraum nutzen, um die Differentialgleichung

$$a|\psi_0\rangle = 0$$

zu verifizieren. Zeigen Sie auch, dass  $|\psi_0\rangle$  normiert ist.

**Hinweis:** Die Formelsammlung am Anfang könnte nützlich sein.

**b) (3 Punkte)** Benutzen Sie nun den Erzeugungsoperator  $a^\dagger$ , um die Impulsdarstellung  $\langle k|\psi_1\rangle$  des ersten angeregten Zustandes zu berechnen.

**c) (4 Punkte)** Sei nun  $\Delta A_{|\psi\rangle} = \langle\psi|A^2|\psi\rangle - \langle\psi|A|\psi\rangle^2$  die Varianz einer Observablen  $A$ . Benutzen Sie die Leiteroperatoren um zu zeigen, dass

$$\Delta X_{|n\rangle}\Delta P_{|n\rangle} = x_0^2 p_0^2 \left(n + \frac{1}{2}\right)^2.$$

Dabei ist  $|n\rangle$  der  $n$ -te angeregte Zustand des harmonischen Oszillators.

**5 Kubische Störung des harmonischen Oszillators****(10 Punkte)**

Betrachten Sie eine kubische Störung des harmonischen Oszillators wie folgt

$$H = \frac{p^2}{2m} + \frac{1}{2}m\omega^2 X^2 + \mu X^3.$$

Berechnen Sie die Korrektur zu den Energieeigenwerten des ungestörten harmonischen Oszillators in *zweiter Ordnung* Störungstheorie.

**Hinweis:** Drücken Sie den Störoperator durch Leiteroperatoren aus.

**6 Quantenkorrelationen****(6 Punkte)**

Sei

$$|\varphi\rangle = \frac{1}{\sqrt{2}}(|\uparrow, \uparrow, \uparrow\rangle - |\downarrow, \downarrow, \downarrow\rangle)$$

ein Quantenzustand von drei Spin-1/2-Teilchen, und

$$S_\alpha = \sin(\alpha)\sigma_x + \cos(\alpha)\sigma_z.$$

Zeigen sie dass die Erwartungswert

$$\langle \varphi | S_\alpha^{(1)} S_\beta^{(2)} S_\gamma^{(3)} | \varphi \rangle = -\sin(\alpha) \sin(\beta) \sin(\gamma)$$

ist, wobei  $S_\alpha^{(1)}$ ,  $S_\beta^{(2)}$  und  $S_\gamma^{(3)}$  die Spin-1/2-Observablen des ersten, zweiten und dritten Teilchens sind.