Quantenmechanik

Sommersemester 2021
Nachklausur. **Matrikeln. 7305731**

David Gross, Mariami Gachechiladze
Institut für Theoretische Physik, Universität zu Köln

Aufgabe	1	2	3	4	5	6	Gesamt
Punkte							
	6	11	6	10	8	3	44
Initialen							

Nützliche Formeln

- Leiteroperatoren des harmonischen Oszillators:

$$a = \frac{1}{\sqrt{2}}\left(\frac{X}{x_0} + i\frac{P}{p_0}\right), \quad a^\dagger = \frac{1}{\sqrt{2}}\left(\frac{X}{x_0} - i\frac{P}{p_0}\right) \quad \text{mit} \quad x_0 = \sqrt{\frac{\hbar}{m\omega}},\ p_0 = \sqrt{\hbar m\omega}.$$

  Wirkung: $a|n\rangle = \sqrt{n}|n-1\rangle$, $a^\dagger|n\rangle = \sqrt{n+1}|n+1\rangle$. Kommutatorrelation: $[a, a^\dagger] = \mathbb{1}$.

- Energiekorrekturen in 2. Ordnung Störungstheorie (ohne Entartung):

$$E_n^{(2)} = \lambda^2 \sum_{m \neq n} \frac{|\langle m|V|n\rangle|^2}{E_n - E_m}.$$

- Der Grundzustand des harmonischen Oszillators:

$$\psi_0(x) = \left(\frac{m\omega}{\pi\hbar}\right)^{1/4} e^{-m\omega x^2/2\hbar}.$$

1 Erwartungswerte und Wahrscheinlichkeiten (6 Punkte)

Sei

$$|\varphi\rangle = \frac{1}{\sqrt{3}}(|1\rangle + |0\rangle + |-1\rangle)$$

ein Quantenzustand eines Spin-1-Teilchens, und

$$S_x = \frac{1}{\sqrt{2}}\begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}$$

die Observable für die x-Komponente des Spins, ausgedrückt in der $\{|1\rangle, |0\rangle, |-1\rangle\}$-Basis. (Wir setzen dabei der Einfachheit halber $\hbar = 1$.)

a) (2 Punkte) Berechnen Sie den Erwartungswert $\langle\varphi|S_x|\varphi\rangle$.

b) (4 Punkte) Welche Ergebnisse können bei der Messung von S_x auftreten? Wie hoch ist die Wahrscheinlichkeit, bei der Messung von S_x bezüglich des Zustands $|\varphi\rangle$ den kleinsten möglichen Wert zu erhalten? Bitte geben Sie eine nachvollziehbare Rechnung an.

2 Endlicher symmetrischer Potentialtopf (11 Punkte)

Betrachten Sie folgendes Potential mit $-V_0 > 0$:

$$V(x) = \begin{cases} 0 & x < -a \\ -V_0 & -a \leq x < a \\ 0 & x > a \end{cases}$$

a) (2 Punkte) Nehmen Sie an, dass $0 > E > -V_0$. Zeigen Sie, dass mit der Wahl

$$k_1 = k_3 = \frac{\sqrt{2m|E|}}{\hbar} \quad \text{und} \quad k_2 = \frac{\sqrt{2m(E+V_0)}}{\hbar},$$

die Funktion

$$\psi(x) = \begin{cases} Ae^{k_1 x} + De^{-k_1 x} & : \quad x < -a \\ B_1 \cos(k_2 x) + B_2 \sin(k_2 x) & : \quad -a \leq x \leq a \\ Ee^{k_3 x} + Ce^{-k_3 x} & : \quad x > -a \end{cases}$$

in den drei angegebenen Gebieten formal die zeitunabhängige Schrödingergleichung löst. Über Rand- und Anschlussbedingungen müssen Sie sich in dieser Teilaufgabe noch keine Gedanken machen.

Hinweis: Wenn Sie wollen, können Sie die Symmetrie des Problems ausnutzen, um zwei Schritte zusammenzufassen. Bitte dann einen Satz dazu schreiben.

b) (1 Punkte) Warum gilt für physikalische Lösungen, dass $D = E = 0$? Verwenden Sie diese Vereinfachung im Weiteren.

c) (3 Punkte) Der *Paritätsoperator* P reflektiert Funktionen am Ursprung:

$$(Pf)(x) = f(-x).$$

Zeigen Sie, dass für die beiden Möglichkeiten

$$(A = C \text{ und } B_2 = 0) \quad \text{oder} \quad (A = -C \text{ und } B_1 = 0)$$

die Funktion ψ jeweils auch eine Eigenfunktion des Paritätsoperators ist. Was sind die Eigenwerte?

d) **(3 Punkte)** Betrachten Sie jetzt nur den zweiten Fall der letzten Teilaufgaben. Nutzen Sie aus, dass $\psi(x)$ stetig ist. Zeigen Sie damit die Relation

$$k_2 \cdot \cot(k_2 a) = -k_1.$$

3 Klassisch verbotener Bereich des harmonischen Oszillators (6 Punkte)

In dieser Aufgabe soll ein Ausdruck für die Wahrscheinlichkeit gefunden werden, dass ein quantenmechanisches Teilchen im klassisch verbotenen Bereich $V(x) > E$ gefunden wird. Wir betrachten dazu einen harmonischen Oszillator mit Potential $V(x) = \frac{1}{2}m\omega^2 x^2$ und ein Teilchen dass die quantenmechanische Grundzustandsenergie $E = E_0$ innehat.

a) **(2 Punkte)** Zeigen Sie, dass die Umkehrpunkte der klassichen Bewegung durch

$$x_t = \sqrt{\frac{\hbar}{m\omega}}$$

gegeben sind.

b) **(4 Punkte)** Drücken Sie die Wahrscheinlichkeit, dass das Teilchen im klassisch verbotenen Bereich gefunden wird als konkretes Integral aus. Sie müssen das Integral nicht lösen.

Hinweis: Schauen Sie auf die Liste der "Nützlichen Formeln".

4 Kubische Störung des harmonischen Oszillators (10 Punkte)

Betrachten Sie eine kubische Störung des harmonischen Oszillators wie folgt

$$H = \frac{P^2}{2m} + \frac{1}{2}m\omega^2 X^2 + \lambda P^3.$$

Berechnen Sie die Korrektur zu den Energieeigenwerten des ungestörten harmonischen Oszillators in *zweiter Ordnung* Störungstheorie.

Hinweis: Drücken Sie den Störoperator durch Leiteroperatoren aus.

5 Drehimpuls und Heisenberg-Bild (8 Punkte)

Seien $L = (L_x, L_y, L_z)$ Drehimpulsoperatoren. Es gilt also $[L_x, L_y] = i\hbar L_z$ und zyklische Vertauschungen. Wir interessieren uns für die Relationen

$$e^{\frac{i}{\hbar}L_y t} L_x e^{-\frac{i}{\hbar}L_y t} = L_x \cos t + L_z \sin t,$$
$$e^{\frac{i}{\hbar}L_y t} L_z e^{-\frac{i}{\hbar}L_y t} = L_z \cos t - L_x \sin t.$$

a) **(4 Punkte)** Zunächst wollen wir uns vergewissern, dass die Relationen korrekt sind. Wir begnügen uns hier damit, die erste Relation bis zur *zweiten Ordnung* in t zu überprüfen.

Verwenden Sie dazu die Operatoridentität

$$e^Y X e^{-Y} = X + [Y, X] + \frac{1}{2!}[Y, [Y, X]] + \frac{1}{3!}[Y, [Y, [Y, X]]] + \dots$$

und vernachlässigen Sie auf beiden Seiten Terme höherer Ordnung in t.

b) **(4 Punkte)** Sei nun $|\psi\rangle$ ein Zustand dessen L_z-Erwartungswert durch $\langle\psi|L_z|\psi\rangle = m$ gegeben ist. Setze $U(t) := e^{\frac{i}{\hbar}L_y t}$ und $|\psi(t)\rangle := U(t)|\psi\rangle$. Zeigen Sie, dass $|\psi(t)\rangle$ für die Observable $L_x \sin t + L_z \cos t$ Erwartungswert m hat. Nutzen Sie dazu die oben angegebenen Relationen.

6 Quantenkorrelationen (3 Punkte)

Sei

$$|\varphi\rangle = \frac{1}{\sqrt{3}}(|\uparrow,\uparrow,\downarrow\rangle + |\uparrow,\downarrow,\uparrow\rangle + |\downarrow,\uparrow,\uparrow\rangle)$$

ein verschränkter Quantenzustand von drei Spin-1/2-Teilchen.

Berechnen Sie die folgenden Erwartungswerte.

a) (1 Punkte)

$$\left\langle \varphi|\sigma_z^{(1)}\sigma_z^{(2)}\sigma_z^{(3)}|\varphi\right\rangle$$

b) (2 Punkte)

$$\left\langle \varphi|\sigma_y^{(1)}\sigma_z^{(2)}\sigma_x^{(3)}|\varphi\right\rangle$$