

# Quantenmechanik

Sommersemester 2021

Nachklausur. Matrikeln. 9999992

David Gross, Mariami Gachechiladze

Institut für Theoretische Physik, Universität zu Köln

---

Aufgabe	1	2	3	4	5	6	Gesamt
Punkte							
	6	11	6	10	8	3	44
Initialen							

## Nützliche Formeln

- Leiteroperatoren des harmonischen Oszillators:

$$a = \frac{1}{\sqrt{2}} \left( \frac{X}{x_0} + i \frac{P}{p_0} \right), \quad a^\dagger = \frac{1}{\sqrt{2}} \left( \frac{X}{x_0} - i \frac{P}{p_0} \right) \quad \text{mit} \quad x_0 = \sqrt{\frac{\hbar}{m\omega}}, \quad p_0 = \sqrt{\hbar m\omega}.$$

Wirkung:  $a|n\rangle = \sqrt{n}|n-1\rangle$ ,  $a^\dagger|n\rangle = \sqrt{n+1}|n+1\rangle$ . Kommutatorrelation:  $[a, a^\dagger] = \mathbb{1}$ .

- Energiekorrekturen in 2. Ordnung Störungstheorie (ohne Entartung):

$$E_n^{(2)} = \lambda^2 \sum_{m \neq n} \frac{|\langle m|V|n\rangle|^2}{E_n - E_m}.$$

- Der Grundzustand des harmonischen Oszillators:

$$\psi_0(x) = \left( \frac{m\omega}{\pi\hbar} \right)^{1/4} e^{-m\omega x^2/2\hbar}.$$

**1 Erwartungswerte und Wahrscheinlichkeiten****(6 Punkte)**

Sei

$$|\varphi\rangle = \frac{1}{\sqrt{3}}(|1\rangle + |0\rangle + |-1\rangle)$$

ein Quantenzustand eines Spin-1-Teilchens, und

$$S_x = \frac{1}{\sqrt{2}} \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}$$

die Observable für die  $x$ -Komponente des Spins, ausgedrückt in der  $\{|1\rangle, |0\rangle, |-1\rangle\}$ -Basis. (Wir setzen dabei der Einfachheit halber  $\hbar = 1$ .)

- a) **(2 Punkte)** Berechnen Sie den Erwartungswert  $\langle\varphi|S_x|\varphi\rangle$ .
- b) **(4 Punkte)** Welche Ergebnisse können bei der Messung von  $S_x$  auftreten? Wie hoch ist die Wahrscheinlichkeit, bei der Messung von  $S_x$  bezüglich des Zustands  $|\varphi\rangle$  den größten möglichen Wert zu erhalten? Bitte geben Sie eine nachvollziehbare Rechnung an.

**2 Endlicher symmetrischer Potentialtopf****(11 Punkte)**Betrachten Sie folgendes Potential mit  $-V_0 > 0$ :

$$V(x) = \begin{cases} 0 & x < -a \\ -V_0 & -a \leq x < a \\ 0 & x > a \end{cases}$$

- a) **(2 Punkte)** Nehmen Sie an, dass  $0 > E > -V_0$ . Zeigen Sie, dass mit der Wahl

$$k_1 = k_3 = \frac{\sqrt{2m|E|}}{\hbar} \quad \text{und} \quad k_2 = \frac{\sqrt{2m(E + V_0)}}{\hbar},$$

die Funktion

$$\psi(x) = \begin{cases} Ae^{k_1x} + De^{-k_1x} & : x < -a \\ B_1 \cos(k_2x) + B_2 \sin(k_2x) & : -a \leq x \leq a \\ Ee^{k_3x} + Ce^{-k_3x} & : x > a \end{cases}$$

in den drei angegebenen Gebieten formal die zeitunabhängige Schrödingergleichung löst. Über Rand- und Anschlussbedingungen müssen Sie sich in dieser Teilaufgabe noch keine Gedanken machen.

**Hinweis:** Wenn Sie wollen, können Sie die Symmetrie des Problems ausnutzen, um zwei Schritte zusammenzufassen. Bitte dann einen Satz dazu schreiben.

- b) **(1 Punkte)** Warum gilt für physikalische Lösungen, dass  $D = E = 0$ ? Verwenden Sie diese Vereinfachung im Weiteren.
- c) **(3 Punkte)** Der *Paritätsoperator*  $P$  reflektiert Funktionen am Ursprung:

$$(Pf)(x) = f(-x).$$

Zeigen Sie, dass für die beiden Möglichkeiten

$$(A = C \text{ und } B_2 = 0) \quad \text{oder} \quad (A = -C \text{ und } B_1 = 0)$$

die Funktion  $\psi$  jeweils auch eine Eigenfunktion des Paritätsoperators ist. Was sind die Eigenwerte?

- d) (3 Punkte) Betrachten Sie jetzt nur den zweiten Fall der letzten Teilaufgaben. Nutzen Sie aus, dass  $\psi(x)$  stetig ist. Zeigen Sie damit die Relation

$$k_2 \cdot \cot(k_2 a) = -k_1.$$

### 3 Klassisch verbotener Bereich des harmonischen Oszillators (6 Punkte)

In dieser Aufgabe soll ein Ausdruck für die Wahrscheinlichkeit gefunden werden, dass ein quantenmechanisches Teilchen im klassisch verbotenen Bereich  $V(x) > E$  gefunden wird. Wir betrachten dazu einen harmonischen Oszillator mit Potential  $V(x) = \frac{1}{2}m\omega^2 x^2$  und ein Teilchen das die quantenmechanische Grundzustandsenergie  $E = E_0$  innehat.

- a) (2 Punkte) Zeigen Sie, dass die Umkehrpunkte der klassischen Bewegung durch

$$x_t = \sqrt{\frac{\hbar}{m\omega}}$$

gegeben sind.

- b) (4 Punkte) Drücken Sie die Wahrscheinlichkeit, dass das Teilchen im klassisch verbotenen Bereich gefunden wird als konkretes Integral aus. Sie müssen das Integral nicht lösen.

**Hinweis:** Schauen Sie auf die Liste der "Nützlichen Formeln".

### 4 Kubische Störung des harmonischen Oszillators (10 Punkte)

Betrachten Sie eine kubische Störung des harmonischen Oszillators wie folgt

$$H = \frac{P^2}{2m} + \frac{1}{2}m\omega^2 X^2 + \lambda P^3.$$

Berechnen Sie die Korrektur zu den Energieeigenwerten des ungestörten harmonischen Oszillators in *zweiter Ordnung* Störungstheorie.

**Hinweis:** Drücken Sie den Störoperator durch Leiteroperatoren aus.

### 5 Drehimpuls und Heisenberg-Bild (8 Punkte)

Seien  $L = (L_x, L_y, L_z)$  Drehimpulsoperatoren. Es gilt also  $[L_x, L_y] = i\hbar L_z$  und zyklische Vertauschungen. Wir interessieren uns für die Relationen

$$e^{\frac{i}{\hbar}L_y t} L_x e^{-\frac{i}{\hbar}L_y t} = L_x \cos t + L_z \sin t,$$

$$e^{\frac{i}{\hbar}L_y t} L_z e^{-\frac{i}{\hbar}L_y t} = L_z \cos t - L_x \sin t.$$

- a) (4 Punkte) Zunächst wollen wir uns vergewissern, dass die Relationen korrekt sind. Wir begnügen uns hier damit, die erste Relation bis zur *zweiten Ordnung* in  $t$  zu überprüfen.

Verwenden Sie dazu die Operatoridentität

$$e^Y X e^{-Y} = X + [Y, X] + \frac{1}{2!}[Y, [Y, X]] + \frac{1}{3!}[Y, [Y, [Y, X]]] + \dots$$

und vernachlässigen Sie auf beiden Seiten Terme höherer Ordnung in  $t$ .

- b) (4 Punkte) Sei nun  $|\psi\rangle$  ein Zustand dessen  $L_z$ -Erwartungswert durch  $\langle\psi|L_z|\psi\rangle = m$  gegeben ist. Setze  $U(t) := e^{\frac{i}{\hbar}L_y t}$  und  $|\psi(t)\rangle := U(t)|\psi\rangle$ . Zeigen Sie, dass  $|\psi(t)\rangle$  für die Observable  $L_x \sin t + L_z \cos t$  Erwartungswert  $m$  hat. Nutzen Sie dazu die oben angegebenen Relationen.

**6 Quantenkorrelationen****(3 Punkte)**

Sei

$$|\varphi\rangle = \frac{1}{\sqrt{3}}(|\uparrow, \uparrow, \downarrow\rangle + |\uparrow, \downarrow, \uparrow\rangle + |\downarrow, \uparrow, \uparrow\rangle)$$

ein verschränkter Quantenzustand von drei Spin-1/2-Teilchen.  
Berechnen Sie die folgenden Erwartungswerte.

**a) (1 Punkte)**

$$\langle \varphi | \sigma_z^{(1)} \sigma_z^{(2)} \sigma_z^{(3)} | \varphi \rangle$$

**b) (2 Punkte)**

$$\langle \varphi | \sigma_x^{(1)} \sigma_z^{(2)} \sigma_y^{(3)} | \varphi \rangle$$