Klassische Mechanik

WS 2021/22 — David Gross, David Wierichs, Johan Åberg

Klausur. **Matrikeln. 7377723** — Institut für Theoretische Physik, Universität zu Köln

Aufgabe	1	2	3	4	5	6	7	Gesamt
Punkte								
	6	8	5	8	11	9	8	55
Initialien								

Nützliche Formeln

- **Noether-Theorem**. Es sei $L(\vec{q},\dot{\vec{q}})$ eine Lagrange-Funktion. Falls eine Koordinatentransformation $\vec{q} \mapsto \vec{q}' = \vec{\Phi}^{(s)}(\vec{q})$ die Bedingung

$$\frac{d}{ds}\Big|_{s=0} L\Big(\vec{\Phi}^{(s)}\big(\vec{q}(t)\big), \frac{d}{dt}\vec{\Phi}^{(s)}\big(\vec{q}(t)\big)\Big) = 0,$$

erfüllt, dann ist

$$I = \sum_{j=1}^{n} \frac{\partial L}{\partial \dot{q}_j} \frac{d\vec{\Phi}_j^{(s)}}{ds}\Big|_{s=0}$$

eine Erhaltungsgröße.

- **Poisson-Klammern**

$$\{f,g\} = \sum_{n=1}^{N} \left(\frac{\partial f}{\partial p_n}\frac{\partial g}{\partial q_n} - \frac{\partial f}{\partial q_n}\frac{\partial g}{\partial p_n} \right)$$

- Achten Sie genau auf totale Zeitableitungen, die als Punkt geschrieben werden, und vergrößern Sie das Dokument auf Ihrem Endgerät entsprechend. Folgende Formeln sind nützlich und können gleichzeitig als Test für die Lesbarkeit verwendet werden:

$$0 = \frac{\partial L}{\partial q} - \frac{d}{dt}\frac{\partial L}{\partial \dot{q}},$$
$$H = p\dot{q} - L,$$
$$\dot{q} = \frac{\partial H}{\partial p}, \quad \dot{p} = -\frac{\partial H}{\partial q}.$$

1 Aufstellen der Lagrange-Funktion (6 Punkte)

Ein Teilchen der Masse m bewege sich auf einer Kurve C. In kartesischen Koordinaten x und y kann die Kurve C mittels der Funktionen $x(s) = \alpha s \sin(\gamma s)$ und $y(s) = \alpha s \cos(\gamma s)$ parametrisiert werden. Außerdem stehe das Teilchen unter dem Einfluss eines Potentials der Form $V(r) = br^2$, wobei $r = \sqrt{x^2 + y^2}$.
Bestimmen Sie die Lagrange-Funktion für dieses System bezüglich der Koordinate s.

2 Euler-Lagrange-Gleichungen (5 + 2 + 2 = 9 Punkte)

Ein Teilchen werde durch die Lagrange-Funktion

$$L(x, y, z, \dot{x}, \dot{y}, \dot{z}) = \gamma y^2 \dot{x}^4 + \frac{m_0}{2}\dot{y}^2 + \alpha y \dot{z}^2,$$

beschrieben, wobei m_0, α und γ Konstanten sind.

a) *Ermitteln Sie die Bewegungsgleichungen für x, y und z mit Hilfe der Euler-Lagrange-Gleichungen.*

b) *Bestimmen Sie die zyklischen Koordinaten und die zugehörigen Erhaltungsgrößen*

c) *Verwenden Sie das Ergebnis aus b) um eine Bewegungsgleichung für y aufzustellen, die nicht von x oder z (oder von deren Zeitableitungen) abhängt.*

Hinweis: Eliminieren Sie die zyklischen Koordinaten aus einer der Bewegungsgleichungen.

3 Von Lagrange zu Hamilton (1 + 2 + 2 = 5 Punkte)

Betrachten Sie die Lagrange-Funktion

$$L(\theta, \dot{\theta}, t) = \frac{m}{2}\ell^2\dot{\theta}^2 + m\ell \sin(\alpha t)\dot{\theta}\cos\theta + mg\ell\cos\theta,$$

wobei m, g, ℓ und α Konstanten sind.

a) *Bestimmen Sie den verallgemeinerten Impuls zu θ.*

b) *Ermitteln Sie die Hamilton-Funktion.*

c) *Stellen Sie die Hamiltonschen Bewegungsgleichungen auf.*

4 Phasenraumporträt (3 + 5 = 8 Punkte)

Betrachten Sie ein Teilchen der Masse m, das sich in einer Dimension bewege und unter dem Einfluss des Potentials

$$V(x) = 5\alpha x - 2\beta x^3, \quad \alpha > 0, \quad \beta > 0$$

stehe.

a) *Erstellen Sie eine grobe Skizze des Potentials. Ermitteln Sie, bei welchen Werten von x ein Gleichgewichtspunkt vorliegt. Was können Sie über die Stabilität dieser Punkte sagen?*

b) *Skizzieren Sie das Phasenraumporträt. Tragen Sie die elliptischen und hyperbolischen Fixpunkte ein. Zeichnen Sie die Niveaulinien mit der Energie der hyperbolischen Fixpunkte (die Separatrizen). Tragen Sie die Richtung des Flusses in den verschiedenen Bereichen ein, die durch die Separatrizen voneinander getrennt werden. Beachten Sie, dass lediglich eine qualitative Skizze gefordert ist.*

5 Normalmoden (2 + 2 + 4 + 3 = 11 Punkte)

Zwei Teilchen der Masse m stehen unter dem Einfluss eines harmonischen Potentials der Form

$$V(y_1, y_2) = 9ky_1^2 + 9ky_2^2 + \frac{7}{2}k(y_1 - y_2)^2, \tag{1}$$

wobei $k > 0$ gelte und y_1 und y_2 die Positionen der Teilchen seien.

a) Die zum Potential V in (1) gehörigen Bewegungsgleichungen der Teilchen haben die Form

$$\begin{aligned} m\ddot{y}_1 &= -bky_1 + 7ky_2, \\ m\ddot{y}_2 &= 7ky_1 - bky_2, \end{aligned} \tag{2}$$

mit einer Konstanten b. *Bestimmen Sie b.*

Hinweis: Sie können beispielsweise die Euler-Lagrange-Gleichungen verwenden, um die Bewegungsgleichungen aufzustellen und b zu erhalten.

b) Wenn Sie den Ansatz $y_1 = v_1 e^{i\omega t}$ und $y_2 = v_2 e^{i\omega t}$ aufstellen, wobei ω, v_1 und v_2 Konstanten sind, und ihn in (2) (mit dem korrekten Wert für b) einsetzen, erhalten Sie eine Eigenwertgleichung der Form

$$\lambda \vec{v} = A\vec{v}, \qquad \vec{v} = \left[\begin{smallmatrix} v_1 \\ v_2 \end{smallmatrix}\right], \quad \lambda = \frac{m\omega^2}{k},$$

mit einer Matrix A. *Bestimmen Sie die Matrix A.*

c) *Ermitteln Sie die Eigenwerte λ und Eigenvektoren $\vec{v}$ der Matrix A aus b).*

d) *Verwenden Sie die Ergebnisse aus c) um die allgemeine physikalische Lösung der Gleichungen in (2) zu finden.*

Hinweis: Mit einer "physikalischen Lösung"meinen wir, dass y_1 und y_2 reellwertig sein sollten.

6 Dynamische Lösungen mittels kanonischer Transformationen (5 + 1 + 3 = 9 Punkte)

Wir möchten die Bewegungen bestimmen, die von der Hamilton-Funktion

$$H(q, p) = \frac{1}{2} q e^{4p}, \tag{3}$$

erzeugt werden, und wir werden dafür kanonische Transformationen nutzen.

a) Betrachten Sie die Familie der Transformationen von (q, p) nach (Q, P), die durch

$$P = \frac{2}{\sqrt{|\beta|}} q^\alpha e^{\beta p/2}, \quad Q = \frac{1}{\sqrt{|\gamma|}} q^\alpha e^{-\gamma p/2}, \tag{4}$$

gegeben ist, wobei $\beta \neq 0$ und $\gamma \neq 0$. *Was sind die Bedingungen an α, β und γ, sodass (4) eine kanonische Transformation ist?*

b) *Verwenden Sie das Ergebnis aus a) um eine kanonische Transformation von (q, p) nach (Q, P) zu finden, die die Hamilton-Funktion (3) in die Hamilton-Funktion eines freien Teilchens, also*

$$H(Q, P) = \frac{1}{2} P^2,$$

transformiert.

c) *Nutzen Sie das Ergebnis aus b) um die Bewegungsgleichungen zu lösen, die von (3) erzeugt werden, finden Sie also $q(t)$ und $p(t)$.*

Hinweis: Beachten Sie, dass die Lösung der Bewegungsgleichungen freie Parameter enthalten wird.

7 Kreisbahnen **(2 + 6 = 8 Punkte)**

Betrachten Sie ein Zwei-Körper-Problem (in $\mathbb{R}^3$) mit reduzierter Masse $\mu > 0$. Das Wechselwirkungspotential ausgedrückt in der Relativkoordinate $\vec{r}$ sei gegeben durch

$$U(r) = U_0 \left(8\frac{\lambda}{r} - 8\frac{\lambda^2}{r^2} + \ln\frac{5r}{\lambda} \right), \quad r = \|\vec{r}\|, \tag{5}$$

wobei $U_0 > 0$ und $\lambda > 0$ Konstanten sind.

a) *Bestimmen Sie das zu (5) gehörige effektive Potential V_{eff} für einen fixierten Betrag des Drehimpulses $\|\vec{L}\| = \ell$. Wie lautet die Bedingung für eine Kreisbahn?*

b) *Gibt es Kreisbahnen für gegebene λ, μ, U_0 und ℓ? Falls ja, bestimmen Sie, wie viele Kreisbahnen es gibt und wie groß ihre Radien sind.* Betrachten Sie ausschließlich Bahnen mit $r > 0$.