Bloch-Sphäre in verschiedenen Basen

Mateus Araújo

Viele Studenten hatten Schwierigkeiten mit der Bearbeitung von Übung 2b und 2d. Um diese zu lösen gibt es einen Trick, der die Rechnung ziemlich kürzt. Dieser ist, eine Bloch-Sphäre in verschieden Basen zu definieren.

In die Übung 1 haben wir die Bloch-Sphären Darstellung definiert, wo der Quantenzustand

$$|\psi\rangle = \begin{pmatrix} \cos(\theta/2) \\ e^{i\varphi}\sin(\theta/2) \end{pmatrix}$$

als der reelle Vektor

$$\vec{v} = \begin{pmatrix} \langle\psi|\sigma_x|\psi\rangle \\ \langle\psi|\sigma_y|\psi\rangle \\ \langle\psi|\sigma_z|\psi\rangle \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \cos(\varphi)\sin(\theta) \\ \sin(\varphi)\sin(\theta) \\ \cos(\theta) \end{pmatrix}$$

dargestellt wird, wobei

$$\sigma_x = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}, \quad \sigma_y = \begin{pmatrix} 0 & -i \\ i & 0 \end{pmatrix}, \quad \text{und} \quad \sigma_z = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}$$

die Pauli-Matrizen sind. In dieser Darstellung sind $|\psi\rangle$ und die Pauli-Matrizen in der Standard-Basis $\{|\uparrow\rangle, |\downarrow\rangle\}$ definiert, der Basis von Eigenvektoren von σ_z. Das heißt,

$$|\psi\rangle = \cos(\theta/2)|\uparrow\rangle + e^{i\varphi}\sin(\theta/2)|\downarrow\rangle$$

und

$$\sigma_x = |\uparrow\rangle\langle\downarrow| + |\downarrow\rangle\langle\uparrow|, \quad \sigma_y = -i|\uparrow\rangle\langle\downarrow| + i|\downarrow\rangle\langle\uparrow|, \quad \text{und} \quad \sigma_z = |\uparrow\rangle\langle\uparrow| - |\downarrow\rangle\langle\downarrow|.$$

Es gibt aber nichts besonderes an der $\{|\uparrow\rangle, |\downarrow\rangle\}$ Basis. Man kann sie durch eine beliebige Orthonormalbasis $\{|\phi_0\rangle, |\phi_1\rangle\}$ ersetzen, und erhält damit eine ebenso gute Bloch-Sphären Darstellung. Das heißt, wenn man

$$|\psi'\rangle := \cos(\theta'/2)|\phi_0\rangle + e^{i\varphi'}\sin(\theta'/2)|\phi_1\rangle$$

und

$$\sigma'_x := |\phi_0\rangle\langle\phi_1| + |\phi_1\rangle\langle\phi_0|, \quad \sigma'_y := -i|\phi_0\rangle\langle\phi_1| + i|\phi_1\rangle\langle\phi_0|, \quad \text{und} \quad \sigma'_z := |\phi_0\rangle\langle\phi_0| - |\phi_1\rangle\langle\phi_1|.$$

definiert, gilt immer noch

$$\begin{pmatrix} \langle\psi'|\sigma'_x|\psi'\rangle \\ \langle\psi'|\sigma'_y|\psi'\rangle \\ \langle\psi'|\sigma'_z|\psi'\rangle \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \cos(\varphi')\sin(\theta') \\ \sin(\varphi')\sin(\theta') \\ \cos(\theta') \end{pmatrix},$$

Aber jetzt sind Nord- und Südpol der Sphäre die Quantenzustände $|\phi_0\rangle$ und $|\phi_1\rangle$ anstatt $|\uparrow\rangle$ und $|\downarrow\rangle$.

Wenn man verstehen will, wie die Punkte von der zweiten Bloch-Sphäre in der ersten Bloch-Sphäre dargestellt sind, berechnet man

$$\begin{pmatrix} \langle\psi'|\sigma_x|\psi'\rangle \\ \langle\psi'|\sigma_y|\psi'\rangle \\ \langle\psi'|\sigma_z|\psi'\rangle \end{pmatrix}.$$

Zum Beispiel, wenn $\{|\phi_0\rangle, |\phi_1\rangle\}$ die Eigenvektoren von σ_x sind, erhält man

$$\begin{pmatrix} \langle\psi'|\sigma_x|\psi'\rangle \\ \langle\psi'|\sigma_y|\psi'\rangle \\ \langle\psi'|\sigma_z|\psi'\rangle \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \cos(\theta') \\ \sin(\varphi')\sin(\theta') \\ \cos(\varphi')\sin(\theta') \end{pmatrix}.$$