Hinweise zum Übungsbetrieb

- Homepage zur Übung: http://www.thp.uni-koeln.de/gross/qm-summer17.html
- Die Übungsaufgaben werden immer Donerstag auf oben genannter Seite zum Download zur Verfügung gestellt. Die Abgabe der Lösungen erfolgt eine Woche später, bis zu Beginn der Vorlesung.
- Heften Sie alle Blätter in der richtigen Reihenfolge zusammen und schreiben Sie Ihren Namen, Ihre Übungsgruppe und den Namen des Übungsgruppenleiters bzw. der Übungsgruppenleiterin auf die erste Seite.
- Bitte geben Sie die Übungen in Dreiergruppen ab. Wir ermuntern Sie ausdrücklich dazu, die Aufgaben in dieser Konstellation zu bearbeiten und über möglichen Lösungswege zu diskutieren.
- Wenn Sie Schwierigkeiten mit dem Stoff haben und etwas nicht verstehen, versuchen Sie, diese Probleme umgehend zu beheben. Anlaufstellen bei Fragen: Literatur, Ihre Kommilitonen/Kommilitoninnen, die Fragestunde Montags nach der VL, die Übungen, oder die Dozenten.
- Durch den Feiertag in der ersten Woche wird dieser Übungszettel erst nach der Vorlesung am 24.04. verständlich sein. Daher gibt es nur eine (einfache) Aufgabe mit halb so vielen Punkten wie auf den nachfolgenden Zetteln. In den Tutorien am 27. und 28. werden neben dieser Aufgabe noch einige Grundlagen der linearen Algebra wiederholt werden. Im Anhang finden Sie Beispielaufgaben dazu. Es lohnt sich, diese vorher anzusehen!

1 Unschärferelationen (5P). In dieser Übung werden wir eine Unschärferelation beweisen, die zeigt, dass die x und die z-Komponente des Spins nicht gleichzeitig scharf definiert sein können. Erinnern Sie sich daran (VL am Montag), dass die Observablen für den Spin in x bzw. z-Richtung in der $\{|\uparrow\rangle, |\downarrow\rangle\}$-Basis durch die *Pauli-Matrizen* gegeben sind:

$$\sigma_x = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}, \qquad \sigma_z = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}.$$

a) Sei A eine Observable. Die *Varianz* von A im Zustand $|\psi\rangle$ is gegeben durch

$$\mathrm{Var}_\psi(A) := \langle\psi|A^2|\psi\rangle - \langle\psi|A|\psi\rangle^2.$$

Zeigen Sie, dass $\mathrm{Var}_\psi(A) = 0$, wenn $|\psi\rangle$ ein Eigenvektor von A ist.

b) Sei $|\psi_\uparrow^{(\alpha)}\rangle = \cos(\alpha/2)|\uparrow\rangle + \sin(\alpha/2)|\downarrow\rangle$. Berechnen Sie $\mathrm{Var}_{\psi_\uparrow^{(\alpha)}}(\sigma_z)$ (bitte mit Hilfe trigonometrischer Formeln vereinfachen). Für welche Werte von $\alpha \in [0, 2\pi)$ ist $|\psi_\uparrow^{(\alpha)}\rangle$ ein Eigenvektor von σ_x? Wie ist die Varianz von σ_z für diese Vektoren?

c) Es sollte nun plausibel sein, dass die Varianz ein Maß für die "Unbestimmtheit" einer Größe ist. Zeigen Sie die *Unschärferelation*

$$\mathrm{Var}_{\psi_\uparrow^{(\alpha)}}(\sigma_x) + \mathrm{Var}_{\psi_\uparrow^{(\alpha)}}(\sigma_z) = 1.$$

Beschreiben Sie in nicht mehr als zwei Sätzen die Aussage dieser Formel.

2 Lineare Algebra in Hilberträumen. Dies sind Beispielaufgaben für die Tutorien. Es gibt hierfür keine Punkte – aber jeder sollte diese Aufgaben lösen können!
Im Folgenden sei $\{|\psi_i\rangle\}_{i=1}^d$ eine Orthonormal-Basis.

a) Gegeben ist ein Vektor $|\alpha\rangle = \sum_i c_i |\psi_i\rangle$. Zeigen Sie: $c_j = \langle\psi_j|\alpha\rangle$ und $\|\alpha\|_2^2 = \sum_i |c_i|^2$.

b) Zeigen Sie die *Vollständigkeitsrelation* $\sum_i |\psi_i\rangle\langle\psi_i| = \mathbb{1}$, wobei $\mathbb{1}$ der *Identitätsoperator* ist, der jeden Vektor auf sich selbst abbildet.

c) Die *Spur* (engl. *trace*) eines Operators A kann so definiert werden: $\operatorname{tr} A = \sum_i \langle\psi_i|A|\psi_i\rangle$. Zeigen Sie, dass für je zwei Operatoren A, B, die Relation $\operatorname{tr}(AB) = \operatorname{tr}(BA)$ gilt. (Hinweis: Schieben Sie die Vollständigkeitsrelation ein...). Folgern Sie: $\operatorname{tr}(ABC) = \operatorname{tr}(BCA)$ (*zyklische Invarianz der Spur*) und $\operatorname{tr}(ABA^{-1}) = \operatorname{tr} B$ für A invertierbar (*Invarianz under Konjugation*). Folgern Sie weiter, dass $\operatorname{tr} A$ gleich die Summe der mit Multiplikativität gezählten Eigenwerte von A ist. (Insbesondere hängt die Spur also nicht von der Basis ab, bezgl. derer wir sie definiert haben).

d) Sei A ein Operator. Der *adjungierte* Operator $A^\dagger$ ist durch die Bedingung $\langle\alpha|A^\dagger|\beta\rangle = \overline{\langle\beta|A|\alpha\rangle}$ definiert. Warum legt diese Relation $A^\dagger$ eindeutig fest? Sei $|\psi\rangle$ ein Eigenvektor von A zum Eigenwert λ: $A|\psi\rangle = \lambda|\psi\rangle$. Zeigen Sie, dass $\langle\psi|A^\dagger = \bar{\lambda}\langle\psi|$ Zeigen Sie: Wenn A *selbst-adjungiert* ist $A = A^\dagger$, dann sind alle Eigenwerte von A reell.