Institut für Theoretische Physik
Mateus Araújo, David Gross

1 Störungstheorie und der Zeemaneffekt (Einfachheit halber ohne Spin)

(10 P) Der Hamiltonoperator für ein Teilchen (Ladung $-e$, Masse m) in einem elektromagnetischen Feld, gegeben durch ein Vektorpotential $\vec{A}$ lautet

$$H = \frac{1}{2m}\left(\vec{P} + e\vec{A}(\vec{X}, t)\right)^2 - \frac{e^2}{r}.$$

Ein Wasserstoffatom sei einem homogenen, zeitlich konstanten Magnetfeld $\vec{B}$ ausgesetzt.

a) (1 P) Zeigen Sie, dass ein Vektorpotential für dieses $\vec{B}$ gegeben ist durch $\vec{A} = \frac{1}{2}\vec{B} \times \vec{X}$. Von nun an gehen wir davon aus, dass das Magnetfeld parallel zur e_z-Richtung liegt: $\vec{B} = Be_z$.

b) (2 P) Zeigen Sie, dass der Hamilontoperator geschrieben werden kann als $H = H_0 + H_1 + H_2$, wobei

$$H_0 = \frac{1}{2m}\vec{P}^2 - \frac{e^2}{r}, \qquad H_1 = \frac{e}{2m}\vec{B}.\vec{L}, \qquad H_2 = \frac{e^2}{8m}\vec{B}^2\vec{R}_\perp^2,$$

mit $\vec{R}_\perp^2 = x^2 + y^2$.

c) (1 P) Wir vernachlässigen zunächst den Term H_2. Zeigen Sie, dass die Eigenfunktionen $\psi_{n,l,m}$ von $H_0 + H_1$ die (aus der Vorlesung bekannten) Eigenfunktionen des freien Wasserstoffproblems sind, aber die Energien wie folgt verschoben sind:

$$E'_{n,l,m} = E_n + m\mu_B B.$$

Hierbei sind E_n die Eigenenergien das ungestörten Atoms und $\mu_B = \frac{e\hbar}{2m}$.

Hinweis: Zeigen Sie dass $[H_0, H_1] = 0$. Was passiert mit den Eigenwerten und Eigenvektoren von H_0, wenn man ein kommutierendes H_1 addiert? Verwenden Sie an dieser Stelle *keine* Störtheorie.

d) (1 P) Bei starkem B wird H_2 relevant. Zeigen Sie, dass gilt:

$$H_2 = \frac{e^2B^2}{8m}r^2\sin^2\vartheta.$$

e) (3 P) Berechnen Sie die Energiekorrektur erster Ordnung zum Grundzustand $\psi_{1,0,0}$.

Hinweis: Der korrekt normierte Ausdruck für die Grundzustandswellenfunktion ist $\psi_{1,0,0} = 2(a_0)^{-3/2}e^{-\frac{r}{2a_0}}$.

f) (2 P) Die Energien des Wasserstoffatoms oberhalb des Grundzustands sind entartet. Entartete Störtheorie wird in der nächsten Woche eingeführt. Die Energiekorrekturen zu E_n werden von den Eigenwerten der folgenden Matrix abhängen:

$$E^{(1)}_{(k,l),(k',l')} = \langle\psi_{n,k,l}|H_2|\psi_{n,k',l'}\rangle.$$

Um den Einfluß von H_2 zu berücksichtigen, müßen Sie also wieder Matrixelemente der Störung berechnen. Durch Ausnutzung von Symmetrien kann man hierbei Arbeit sparen. Zeigen Sie, dass die Matrixelemente von H_2 nur zwischen Zuständen gleicher Parität und gleicher m-Quantenzahl nicht verschwinden. (Solche Einschränkungen nemmt man manchmal *Auswahlregeln*). Welche der Matrixelemente $\langle\psi_{n,l,m}|H_2|\psi_{n,l',m'}\rangle$ für $n = 3$ können verschieden von Null sein?

Hinweis: Die Parität ist definiert als Erwartungswert des Operators Π mit $(\Pi\psi)(x) = \psi(-x)$. Für die Eigenzustände des Wasserstoffatoms gilt $\langle n\ell m|\Pi|n\ell m\rangle = (-1)^l$.