Institut für Theoretische Physik
Mateus Araújo, David Gross

Hinweise zum Übungsbetrieb

- Um den Tutoren mehr Zeit zu geben, die Zettel vor den Tutoriaten zu korrigieren, werden wir den Aus- und Abgabetermin für die Übungen von Donnerstag auf Mittwoch vorverlegen. Wir bitten Sie, diesen Zettel wenn möglich bis Mittwoch den 03.05. um 12:00 Uhr abzugeben. Ab dem nächsten Zettel ist die Abgabe bis Mittwoch dann verbindlich. In Zukunft sollen die Zettel in den Briefkästen am Eingang der alten Theorie abgegeben werden.
- Wir suche einen Termin für eine Fragestunde. Zur Koordinierung wird es eine Doodle-Umfrage geben. Wir werden den Link per Email herumschicken. Teilnehmerinnen und Teilnehmer, die nicht das KLIP2-System nutzen, können den Link bis spätestens Freitag dem 28.05. auf der Homepage finden.

1 Quantenzustandsraum (4 P) In dieser Übung werden wir eine beliebte Darstellung für den Zustandsraum der Quantenzustände von einem Spin-$\frac{1}{2}$ Teilchen entwickeln. Diese ist als Bloch-Sphäre bekannt (nach Felix Bloch benannt). Das ist einer der sehr wenigen Fälle, in denen man einen Quantenzustand vollständig visualisieren kann, und damit viele fundamentale Phänomene illustrieren kann.

a) (1 P) Der Quantenzustand von Spin-$\frac{1}{2}$ Teilchen ist ein Vektor $|\psi\rangle \in \mathbb{C}^2$, der die Normierungsbedingung $\||\psi\rangle\|_2 = 1$ erfüllt. Zeigen Sie, dass jeder solche Vektor als

$$|\psi\rangle = \begin{pmatrix} e^{i\alpha}\cos(\theta/2) \\ e^{i\beta}\sin(\theta/2) \end{pmatrix}$$

geschrieben werden kann, für $\theta \in [0, \pi]$ und $\alpha, \beta \in [0, 2\pi)$.

b) (1 P) Zeigen Sie, dass die Quantenzustände $|\psi\rangle$ und $e^{i\gamma}|\psi\rangle$ für jede mögliche Messung die gleichen Wahrscheinlichkeiten ergeben werden. Das heißt, dass $|\psi\rangle$ und $e^{i\gamma}|\psi\rangle$ physikalisch äquivalent sind.

c) (1 P) Diese Äquivalenz ermöglicht uns γ so zu wählen, dass die Darstellung von $|\psi\rangle$ vereinfacht wird. Sei $\gamma = -\alpha$, und $\varphi = \beta - \alpha$. Damit

$$|\psi\rangle = \begin{pmatrix} \cos(\theta/2) \\ e^{i\varphi}\sin(\theta/2) \end{pmatrix},$$

und zwei verschiedene θ, φ stellen zwei verschiedene Quantenzustände dar, die physikalisch *nicht* äquivalent sind.

Berechnen Sie mit dieser Darstellung die Erwartungswerte $\langle\psi|\sigma_x|\psi\rangle$, $\langle\psi|\sigma_y|\psi\rangle$, und $\langle\psi|\sigma_z|\psi\rangle$, wobei σ_x, σ_y, und σ_z die Pauli-Matrizen

$$\sigma_x = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}, \quad \sigma_y = \begin{pmatrix} 0 & -i \\ i & 0 \end{pmatrix} \quad \text{und} \quad \sigma_z = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}$$

sind, und zeigen Sie, dass die Vektoren

$$\begin{pmatrix} a \\ b \\ c \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \langle\psi|\sigma_x|\psi\rangle \\ \langle\psi|\sigma_y|\psi\rangle \\ \langle\psi|\sigma_z|\psi\rangle \end{pmatrix}$$

eine Sphäre bilden. Diese ist die Bloch-Sphäre.

d) (1 P) Wo in der Bloch-Sphäre sind die Eigenzustände von σ_x, σ_y, und σ_z dargestellt?

2 Bewegung rund um die Bloch-Sphäre (6 P) In dieser Übung werden wir die Dynamik von Spin-$\frac{1}{2}$ Quantenzuständen berechnen und visualisieren. Diese Dynamik beschreibt zum Beispiel, wie ein Spin-$\frac{1}{2}$ Teilchen sich in einem magnetischen Feld verhält. Die hier entwickelte Darstellung wird z.B. in der Theorie von Quantencomputern oder der NMR-Spektroskopie verwendet.

a) (1 P) Zeigen Sie, dass

$$\exp(it\sigma_x) = \cos(t)\mathbb{1} + i\sin(t)\sigma_x,$$

wobei $t \in \mathbb{R}$.

Hinweis: Das Exponential von eine Matrix A ist definiert als

$$\exp(A) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{A^n}{n!}$$

b) (1 P) Sei $|\psi\rangle$ ein beliebiger Quantenzustand. Beschreiben Sie die Bewegung von

$$\exp(it\sigma_x)|\psi\rangle$$

rund um die Bloch-Sphäre als Funktion von t.

Hinweis: Schreiben Sie $|\psi\rangle$ in der Basis der Eigenzustände von σ_x

c) (2 P) Zeigen Sie, dass

$$\exp\left[i\theta\left(a\sigma_x + b\sigma_y + c\sigma_z\right)\right] = \cos(\theta)\mathbb{1} + i\sin(\theta)\left[a\sigma_x + b\sigma_y + c\sigma_z\right],$$

wobei $t, a, b, c \in \mathbb{R}$ und $a^2 + b^2 + c^2 = 1$.

Hinweis: Don't panic! Berechnen Sie zuerst $\left[i\theta\left(a\sigma_x + b\sigma_y + c\sigma_z\right)\right]^2$ und vereinfachen Sie es so weit wie möglich.

d) (2 P) Sei $|\psi\rangle$ ein beliebiger Quantenzustand. Beschreiben Sie die Bewegung von

$$\exp\left[i\theta\left(a\sigma_x + b\sigma_y + c\sigma_z\right)\right]|\psi\rangle$$

rund um die Bloch-Sphäre als Funktion von θ.

Hinweis: Schreiben Sie $|\psi\rangle$ in der Basis der Eigenzuständen von $\left(a\sigma_x + b\sigma_y + c\sigma_z\right)$.