Institut für Theoretische Physik
Mateus Araújo, David Gross

1 Unitarität (5 P) Ein Operator U ist *unitär*, wenn $U^\dagger U = UU^\dagger = \mathbb{1}$ gilt.
In dieser Übung werden wir grundlegende Eigenschaften der Unitarität einführen und zeigen, dass die Menge der quantenmechanischen Zeitentwicklungsoperatoren mit der Menge der unitären Operatoren übereinstimmt.

a) (1 P) Sei $U = \exp(itH)$, wobei $t \in \mathbb{R}$ und $H = H^\dagger$. (U ist also ein Zeitentwicklungsoperator zum Hamiltonian H). Zeigen Sie, dass $U^\dagger = \exp(-itH)$ ist, und dass U unitär ist.

b) (1 P) Sei $|\psi\rangle$ ein beliebiger Quantenzustand, wobei $\||\psi\rangle\|_2 = 1$, und U ein unitärer Operator. Zeigen Sie, dass

$$\|U|\psi\rangle\|_2 = 1.$$

Das bedeutet, dass die Schrödinger-Zeitentwicklung Wahrscheinlichkeiten erhält.

c) (2 P) Der Spektralsatz sagt, dass wenn ein endlich-dimensionaler Operator M normal ist — das heißt $[M, M^\dagger] = 0$ — dann hat M die Darstellung

$$M = \sum_i \lambda_i |\psi_i\rangle\langle\psi_i|,$$

wobei $\lambda_i \in \mathbb{C}$ und $\{|\psi_i\rangle\}$ eine Orthonormalbasis ist. Sei A ein Operator. Zeigen Sie, dass, wenn für jede Quantenzustand $|\psi\rangle$

$$\|A|\psi\rangle\|_2 = 1$$

gilt, dann ist $A^\dagger A = \mathbb{1}$.

Hinweis: Verwenden Sie den Spektralsatz mit $M = A^\dagger A$.

d) (1 P) Zeigen Sie, dass jeder unitärer Operator U normal ist, und dass seine Eigenwerte als $e^{i\theta}$ geschrieben werden können, $\theta \in \mathbb{R}$. Zeigen sie damit, dass jeder unitärer Operator U geschrieben werden kann als $U = \exp(iH)$, wobei H ein selbst-adjungierter Operator ist.

Das bedeutet, jede unitäre Zeitentwicklung kann als Schrödinger-Zeitentwicklung physikalische implementiert werden.

2 Fouriertransformation (5 P) In den nächsten Vorlesungen werden wir sehen, dass die Fouriertransformation eine wichtige Rolle in der Quantenmechanik spielt, z.B. für die Beschreibung von Impulsmessungen. Daher betrachten wir hier einige Eigenschaften der Transformation. Die physikalische Interpretation wird in den nächsten Vorlesungen klar werden.
Im Folgenden ist $\psi : \mathbb{R} \to \mathbb{C}$ eine Funktion, die im Unendlichen gegen 0 geht: $\lim_{x\to\infty} \psi(x) = 0$. Die Fouriertransformation ist gegeben durch

$$\mathcal{F}[\psi](k) = \widetilde{\psi}(k) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} \mathrm{d}x\, e^{-ikx} \psi(x)\,,$$

mit inverser Transformation

$$\mathcal{F}^{-1}[\widetilde{\psi}](x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} \mathrm{d}k\, e^{ikx} \widetilde{\psi}(k) = \psi(x).$$

a) (1 P) Zeigen Sie:

$$\psi(x) = \psi^*(x) \iff \widetilde{\psi}^*(k) = \widetilde{\psi}(-k),$$

wobei der Stern komplexe Konjugation bedeutet.

b) (2 P) Wir definieren den Translationsoperator $T_a$und den Multiplikationsoperator X als:

$$(T_a\psi)(x) = \psi(x-a), \qquad (X\psi)(x) = x\psi(x).$$

Die Ableitung von ψ wird mit ψ' bezeichnet. Zeigen Sie

$$\begin{aligned} \mathcal{F}[T_a\psi](k) &= e^{-ika}\widetilde{\psi}(k)\,, \\ \mathcal{F}[\psi'](k) &= i(X\widetilde{\psi})(k)\,, \\ \mathcal{F}[X\psi](k) &= i\widetilde{\psi}'(k)\,. \end{aligned}$$

Hinweis: Partielle Integration. Ein Einschieben von $\psi = \mathcal{F}^{-1}[\widetilde{\psi}]$ könnte helfen.

c) (2 P) Sei $\psi(x) = e^{-x^2}$. Das Integral, das $\widetilde{\psi}$ definiert ist schwer direkt zu lösen. Wir gehen daher indirekt vor. Zeigen Sie (mit Hilfe partieller Integration!) die Relation

$$\frac{\partial}{\partial_k}\widetilde{\psi}(k) = -\frac{k}{2}\widetilde{\psi}(k).$$

Lösen Sie diese Differentialgleichung. Die Lösung ist bis auf eine Normierungskonstante eindeutig. Diese Konstante muss hier nicht bestimmt werden.