Institut für Theoretische Physik
Mateus Araújo, David Gross

1 Der freie Wellenpaket (10 P) In diese Übung werden wir die Zeitentwicklung Gaußscher Wellenpakete berechnen.

a) (1 P) Zeigen Sie, dass wenn $V(x) = 0$, dann hat die allgemeine Lösung der zeitabhängigen Schrödingergleichung die Form

$$\Psi(x,t) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} \mathrm{d}k \; g(k) e^{i\left(kx - \frac{\hbar k^2}{2m} t\right)},$$

wobei $g(k)$ eine geeignete normierte Funktion ist (also $\int_{-\infty}^{\infty} \mathrm{d}k \; |g(k)|^2 = 1$).

b) (1 P) Betrachten Sie eine Wellenfunktion die zur Zeit $t = 0$ durch

$$\Psi(x,0) = A e^{ik_0 x} e^{-x^2/a^2}$$

gegeben ist. Zeigen Sie, dass die Normierungskonstante A gleich $\sqrt[4]{\frac{2}{\pi a^2}}$ ist.

Hinweis: Dafür müssen Sie die berühmte Gaußintegral $\int_{-\infty}^{\infty} \mathrm{d}x \; e^{-px^2} = \sqrt{\pi/p}$ berechnen. Es geht leicht wenn man $\left(\int_{-\infty}^{\infty} \mathrm{d}x \; e^{-px^2}\right)^2$ als Doppelintegral über die $x - y$ Ebene schreibt, und von rechtwinkligen zu Polarkoordinaten wechselt. Fakt für später (muss hier nicht bewiesen werden): Dieses Ergebniss stimmt auch für komplexe p, wenn $\Re(p) > 0$.

c) (1 P) Um Gaußintegrale mit komplexe Zahlen zu lösen, es ist sehr hilfreich, dass

$$f(\alpha,\beta) = \int_{-\infty}^{\infty} \mathrm{d}x \; e^{-p(x+\alpha+i\beta)^2}$$

unabhängig von α und β ist. Hier werden α, β als reell angenommen, und p ist komplex mit $\Re(p) > 0$. Um dies einzusehen, zeigen Sie erst, dass

$$\frac{\partial}{\partial \beta} f(\alpha,\beta) = i \int_{-\infty}^{\infty} \mathrm{d}x \; \frac{\partial}{\partial x} e^{-p(x+\alpha+i\beta)^2} = 0.$$

Zeigen Sie zusätzlich, dass $f(\alpha,\beta)$ auch unabhängig von α ist. Berechnen Sie $f(\alpha,\beta)$.

d) (2 P) Zeigen Sie, dass $g(k)$ aus Übung 1a durch

$$g(k) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} \mathrm{d}x \; \Psi(x,0) e^{-ikx}$$

gegeben ist. Wählen Sie nun speziell $\Psi(x,0)$ wie in 1b) und zeigen Sie

$$\frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} \mathrm{d}x \; \Psi(x,0) e^{-ikx} = \sqrt[4]{\frac{a^2}{2\pi}} e^{-\frac{a^2}{4}(k-k_0)^2}.$$

Hinweis: Lösen Sie diese Integral mit Hilfe von Übungen 1b und 1c. Alternativ können Sie Übung 2c aus Zettel 3 verwenden, zusammen mit der Tatsache, dass die Fouriertransformation die L^2-Norm einer Funktion nicht ändert.

e) (2 P) Die Lösung für ein Wellenpaket mit Gaußschem Anfangszustand ist also

$$\Psi(x,t) = \frac{\sqrt{a}}{(2\pi)^{\frac{3}{4}}} \int_{-\infty}^{\infty} \mathrm{d}k \, e^{-\frac{a^2}{4}(k-k_0)^2} e^{i\left(kx - \frac{\hbar k^2}{2m} t\right)}.$$

Zeigen Sie, dass

$$\Psi(x,t) = \left(\frac{2a^2}{\pi}\right)^{\frac{1}{4}} \frac{1}{\sqrt{a^2 + \frac{2i\hbar t}{m}}} \exp\left(\frac{-x^2 + ia^2k_0x - ia^2k_0^2 t\hbar/2m}{a^2 + \frac{2i\hbar t}{m}}\right)$$

Hinweis: Bringen Sie mit quadratischer Ergänzung das Integral auf die Form 1c.

f) (2 P) Zeigen Sie, dass die Wahrscheinlichkeitsdichte von $\Psi(x,t)$

$$|\Psi(x,t)|^2 = \left(\frac{2a^2}{\pi}\right)^{\frac{1}{2}} \frac{1}{\sqrt{a^4 + \frac{4\hbar^2 t^2}{m^2}}} \exp\left(\frac{-2a^2(x - \frac{\hbar k_0}{m} t)^2}{a^4 + \frac{4\hbar^2 t^2}{m^2}}\right)$$

ist. Wo ist das Maximum von $|\Psi(x,t)|^2$ (als Funktion von x), und wie bewegt es sich (als Funktion von t)? **Hinweis:** $|e^z|^2 = e^{2\Re(z)}$

g) (1 P) Die Standardabweichung eines Operators A ist $\Delta A(t) = \sqrt{\langle A^2 \rangle - \langle A \rangle^2}$. Zeigen Sie, dass für $\Psi(x,t)$ und für die Orts- und Impulsoperatoren gilt:

$$\Delta x(t) = \frac{a}{2}\sqrt{1 + \frac{4\hbar^2 t^2}{m^2 a^4}} \quad \text{und} \quad \Delta p(t) = \frac{\hbar}{a}.$$

Zeigen Sie, dass diese mit der Unschärferelation $\Delta x \Delta p \geq \hbar/2$ konsistent ist. **Hinweis:** Mit den richtigen Ansatz ist dies sehr einfach...

2 Zeit-Frequenz-Unschärfe

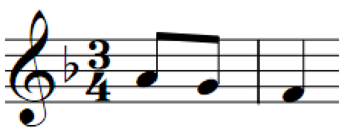
(2 Bonus-Punkte) Die Heisenbergsche Unschärferelation $\Delta x \Delta p \geq \hbar/2$ ist auch für klassische Signale relevant. Betrachten Sie ein akustisches Signal $\psi(t)$, wobei t die verstrichene Zeit in Sekunden angibt. Der Zeitoperator $(T\psi) = t\psi(t)$ misst den Schwerpunkt des Signals auf der Zeitachse:

$$\langle \psi | T | \psi \rangle = \int_{-\infty}^{\infty} t\psi(t)^2.$$

Genauso misst der Frequenzoperator

$$(F\psi)(t) = -i\frac{1}{2\pi}\frac{\partial}{\partial t}\psi(t)$$

den Frequenzschwerpunkt von ψ.
Leiten Sie aus der Vertauschungsrelation $[x,p] = i\hbar$ für den Orts- und Impulsoperator die Vertauschungsrelation von T und F ab und beweisen Sie die Zeit-Frequenz-Unschärferelation $\Delta t \Delta f \geq 1/(4\pi)$.
Die unten stehenden Noten kodieren gleichzeitig Zeit- und Frequenzinformation. Damit könnten sie der Unschärfebedingung widersprechen. Schätzen Sie für die erste Note grob Δt und Δf ab und argumentieren Sie, dass hier kein Problem auftritt.



Die tiefste Note, die ein Klavier spielen kann, ist ein A mit Frequenz 27.5 Hz. Macht es Sinn diese note als Zweiunddreißigstelnote zu spielen?