Institut für Theoretische Physik
Mateus Araújo, David Gross

1 Eigenschaften von Drehimpulsoperatoren (2 P) Sei $J = (J_x, J_y, J_z)$ ein Drehimpulsoperator, $J_\pm = J_x \pm iJ_y$ die dazugehörenden Leiteroperatoren, und $J^2 = J_x^2 + J_y^2 + J_z^2$. Die folgenden Eigenschaften werden in der VL benutzt, aber nicht bewiesen. Sie alle folgen aus den definierenden Vertauschungsrelationen. Zeigen Sie:

$$[J_z, J_\pm] = \pm\hbar J_\pm, \quad J_- J_+ = J^2 - J_z^2 - \hbar J_z, \quad [J^2, J_z] = 0.$$

2 Addition von Drehimpulsen (5 P) In dieser Aufgabe betrachten wir den Gesamtdrehimpuls zweier Spin-1/2 Teilchen. (Über die allgemeine Theorie von Quantensystemen mit mehr als einem Teilchen werden wir uns erst später unterhalten – diese ist hier aber nicht nötig). Der Einfachheit halber setzen wir $\hbar = 1$.

a) (1 P) Seien $S_1 = (S_{1x}, S_{1y}, S_{1z})$ und $S_2 = (S_{2x}, S_{2y}, S_{2z})$ jeweils Drehimpulsoperatoren. Gehen Sie davon aus, dass $[S_{1i}, S_{2j}] = 0$ für alle $i, j \in \{x, y, z\}$. Zeigen Sie, dass $S = S_1 + S_2$ wieder ein Drehimpulsoperator ist.

b) (2 P) Der Hilbertraum von zwei Spin-1/2 Teilchen hat folgende Basis:

$$|\frac{1}{2}, \frac{1}{2}\rangle, |\frac{1}{2}, -\frac{1}{2}\rangle, |-\frac{1}{2}, \frac{1}{2}\rangle, |-\frac{1}{2}, -\frac{1}{2}\rangle.$$

Die z-Komponente der Drehimpulsoperatoren sind so definiert ($s_1, s_2 \in \{\frac{1}{2}, -\frac{1}{2}\}$):

$$S_{1z}|s_1, s_2\rangle = s_1|s_1, s_2\rangle \quad \text{und} \quad S_{2z}|s_1, s_2\rangle = s_2|s_1, s_2\rangle.$$

Die Leiteroperatoren des ersten Drehimpulses sind

$$S_{1-}|\frac{1}{2}, s_2\rangle = |-\frac{1}{2}, s_2\rangle, \quad S_{1-}|-\frac{1}{2}, s_2\rangle = 0,$$
$$S_{1+}|\frac{1}{2}, s_2\rangle = 0, \quad S_{1+}|-\frac{1}{2}, s_2\rangle = |\frac{1}{2}, s_2\rangle.$$

Analoges gilt für $S_{2\pm}$. Sei, wie in Aufgabe 1, $S = S_1 + S_2$. Zeigen Sie, dass die Matrixdarstellungen von $S_z = S_{1z} + S_{2z}$ und $S^2 = S_x^2 + S_y^2 + S_z^2$ durch

$$S_z = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -1 \end{pmatrix}, \qquad S^2 = \begin{pmatrix} 2 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 2 \end{pmatrix}$$

gegeben sind. S_x und S_z sind analog zu S_z definiert.

Ohne zu rechnen: Was sind also die möglichen Werte einer Messung der z-Komponente S_z des Gesamtdrehimpulses?

Hinweis: Drücken Sie S^2 mit Hilfe von Aufgabe 1 durch $S_{1\pm}, S_{2\pm}, S_{1z}, S_{2z}$ aus.

c) (2 P) Diagonalisieren Sie nun S^2, in dem Sie den mittleren Block diagonalisieren. Sie erhalten eine gemeinsame Eigenbasis von S^2 und S_z. Geben Sie für jeden Eigenvektor jeweils die zugehörigen Eigenwerte von S^2 und S_z an.

Hintergrund: Die Eigenräume heißen *Triplett* und *Singlett*. Der Singletvektor ist ein besonders wichtiges Beispiel für einen *veschränkten Zustand*. Dazu später mehr…

3 Drehimpulsoperator in Kugelkoordinaten (3 P) Zeigen Sie, dass die Komponenten des Drehimpulsoperators

$$
\begin{aligned}
L_x &= -i\hbar\left(y\frac{\partial}{\partial z} - z\frac{\partial}{\partial y}\right)\\
L_y &= -i\hbar\left(z\frac{\partial}{\partial x} - x\frac{\partial}{\partial z}\right)\\
L_z &= -i\hbar\left(x\frac{\partial}{\partial y} - y\frac{\partial}{\partial x}\right)
\end{aligned}
$$

in Kugelkoordinaten folgende Form annehmen:

$$
\begin{aligned}
L_x &= i\hbar\left(\sin\varphi\frac{\partial}{\partial\theta} + \frac{\cos\varphi}{\tan\theta}\frac{\partial}{\partial\varphi}\right)\\
L_y &= i\hbar\left(-\cos\varphi\frac{\partial}{\partial\theta} + \frac{\sin\varphi}{\tan\theta}\frac{\partial}{\partial\varphi}\right)\\
L_z &= -i\hbar\frac{\partial}{\partial\varphi}.
\end{aligned}
$$

Hinweis: Ähnliche Rechnungen sollten Ihnen in der Elektrodynamik und/oder den mathematischen Methoden begegnet sein. Die Rechnung mag etwas lang sein, ist aber nicht an sich schwierig.