Institut für Theoretische Physik
Mateus Araújo, David Gross

1 Quantenkorrelationen (6 P) Im Übungsblatt 7 haben wir den berühmten Singulett-Zustand kennengelernt, der zwei Spin-1/2-Teilchen mit Gesamtdrehimpuls Null beschreibt. Wir werden ein paar seiner Eigenschaften analysieren.

a) (0.5 P) Die Observable $S_\alpha = \sin(\alpha)\sigma_x + \cos(\alpha)\sigma_z$ misst den Drehimpuls eines Spin-$\frac{1}{2}$-Teilchens bzgl. einer Richtung in der $x - z$ Ebene, die den Winkel α relativ zur z-Achse einschliesst. Wir haben S_α so normiert, dass die Eigenwerte ± 1 (und nicht etwa $\pm\frac{1}{2}$) sind. Um dies einzusehen, zeigen Sie, dass der Erwartungswert, wenn mit dem Quantenzustand $|\psi(\theta)\rangle = \cos(\theta/2)|\uparrow\rangle + \sin(\theta/2)|\downarrow\rangle$ rechnet, durch

$$\langle\psi(\theta)|S_\alpha|\psi(\theta)\rangle = \cos(\theta - \alpha)$$

gegeben ist.

b) (1 P) Der Singulett-Zustand kann als

$$|\Psi^-\rangle = \frac{1}{\sqrt{2}}(|\uparrow,\downarrow\rangle - |\downarrow,\uparrow\rangle)$$

geschrieben werden. Die Wirkung von S_α am ersten Teilchen des Singulett ist gegeben durch

$$S_\alpha^1|\Psi^-\rangle = \frac{1}{\sqrt{2}}\Big((S_\alpha|\uparrow\rangle)|\downarrow\rangle - (S_\alpha|\downarrow\rangle)|\uparrow\rangle\Big),$$

und analog dazu ist die Wirkung von S_α am zweiten Teilchen des Singulett gegeben durch

$$S_\alpha^2|\Psi^-\rangle = \frac{1}{\sqrt{2}}\Big(|\uparrow\rangle(S_\alpha|\downarrow\rangle) - |\downarrow\rangle(S_\alpha|\uparrow\rangle)\Big).$$

Zeigen Sie, dass

$$\langle\Psi^-|S_\alpha^1|\Psi^-\rangle = 0 = \langle\Psi^-|S_\alpha^2|\Psi^-\rangle.$$

Was ist die physikalische Aussage dieser Gleichung?

c) (2.5 P) Stellen Sie sich vor, dass zwei Experimentalisten, Anna und Bernhard, jeweils S_α^1 bzw. S_β^2 messen. Zeigen Sie, dass

$$\langle\Psi^-|S_\alpha^1 S_\beta^2|\Psi^-\rangle = -\cos(\alpha - \beta),$$

und erklären Sie physikalisch, warum der Erwartungswert für $\alpha = \beta$ gleich -1 sein muss.

d) (2 P) Der Singulett ist ein sogenannter *verschränkter Quantenzustand* (dazu später mehr). Das heißt, es ist kein Produkt von einem Quantenzustand $|\psi(\theta_1)\rangle$ für das erste Teilchen mit einem Quantenzustand $|\psi(\theta_2)\rangle$ für das zweite Teilchen. Um dies zu beweisen, zeigen Sie dass

$$\langle\psi(\theta_1)|\langle\psi(\theta_2)|S_\alpha^1 S_\beta^2|\psi(\theta_1)\rangle|\psi(\theta_2)\rangle = \cos(\theta_1 - \alpha)\cos(\theta_2 - \beta),$$

und dass keine Winkel θ_1, θ_2 existieren, sodass

$$\cos(\theta_1 - \alpha)\cos(\theta_2 - \beta) = -\cos(\alpha - \beta).$$

für alle werte von α, β.

Hinweis: Dies müsste gelten für ein fixes Paar von θ_1, θ_2, das unabhängig von α und β ist. Finden Sie θ_1, θ_2 für jeweils einen bestimmten Wert von α und β und zeigen Sie, dass dies für andere Werte von α und β nicht funktioniert.

2 Klassische Korrelationen (4 P) Wir betrachten ein – etwas drastisches – klassisches Analogon zum Singulettzustand: eine Bombe mit Anfangsdrehimpuls Null, die in zwei Teile explodiert, eine mit Drehimpuls $J_1 = (\cos\theta, \sin\theta)$ für $\theta \in [0, 2\pi)$ und die andere mit Drehimpuls $J_2 = -J_1$. Anna und Bernhard führen wieder Messungen an J_1 und J_2 durch.

a) (1 P) Anna misst den Drehimpuls ihrer Hälfte bzgl. einer Richtung $m_\alpha = (\cos\alpha, \sin\alpha)$ für $\alpha \in [0, 2\pi)$. Das Ergebniss sei

$$r_\alpha = \operatorname{sgn}(m_\alpha \cdot J_1),$$

wobei sgn der Vorzeichenfunktion ist. Die Erwartungswert von r_α ist gegeben durch

$$\langle r_\alpha \rangle = \int_0^{2\pi} \mathrm{d}\theta \mu(\theta) \operatorname{sgn}(m_\alpha \cdot J_1),$$

wobei $\mu(\theta)$ die Verteilung des Drehimpuls beschreibt. Zeigen Sie, dass wenn der Drehimpuls gleichmessig verteilt ist (das heißt $\mu(\theta) = 1/2\pi$), dann ist der Erwartungswert $\langle r_\alpha \rangle = 0$.

b) (2 P) Der korrelierte Erwartungswert von Anna und Bernhard ist gegeben durch

$$\langle r_\alpha r_\beta \rangle = \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} \mathrm{d}\theta \operatorname{sgn}(m_\alpha \cdot J_1) \operatorname{sgn}(m_\beta \cdot J_2),$$

wieder für gleichmessig verteilte Drehimpulse. Zeigen Sie, dass

$$\langle r_\alpha r_\beta \rangle = -1 + \frac{2\phi_{\alpha\beta}}{\pi}$$

gilt, wobei $\phi_{\alpha\beta}$ die Winkel zwischen m_α und m_β ist.

Hinweis: Beachten Sie, dass $J_2 = (\cos(\theta + \pi), \sin(\theta + \pi))$.

c) (1 P) Skizzieren Sie $-1 + \frac{2\phi_{\alpha\beta}}{\pi}$ und $-\cos(\alpha - \beta)$ um zu zeigen dass die Quanten- und die klassichen Korrelationen *nicht* gleich sind.