Institut für Theoretische Physik
Mateus Araújo, David Gross,
Markus Heinrich

Anmerkungen

- In dieser Musterlösung sind einige Rechenschritte ausgelassen und durch "…" ersetzt. In der Klausur erwarten von Ihnen an dieser Stelle einen nachvollziehbaren Rechenweg!
- In der Klausur werden wir auch einige nützliche trigonometrische Identitäten in die Formelsammlung aufnehmen.

1 Erwartungswerte und Wahrscheinlichkeiten σ_y wirkt auf die Eigenzustände von σ_z wie folgt:

$$\sigma_y|\uparrow\rangle = i|\downarrow\rangle, \quad \sigma_y|\downarrow\rangle = -i|\uparrow\rangle.$$

Daher erhalten wir

$$\begin{aligned}\langle\psi|\sigma_y|\psi\rangle &= \dots \\ &= 2\sin(\theta/2)\cos(\theta/2)\sin(\varphi) \\ &= \sin(\theta)\sin(\varphi).\end{aligned}$$

Zu den Eigenvektoren. Da $\sigma_y^2 = \mathbb{1}$ (die Einheitsmatrix), liegen die Eigenwerte von σ_y in $\{\pm 1\}$. Wir such zuerst den $+1$-Eigenvektor $|+_y\rangle = a|\uparrow\rangle + b|\downarrow\rangle$, für zu bestimmende komplexe Zahlen a, b. Da Eigenvektoren nur bist auf eine multiplikative Konstante definiert sind, setzen wir zunächst $a = 1$. Die Eigenwertgleichung $\sigma_y|+_y\rangle = (+1)\,|+_y\rangle$ ist dann

$$\begin{pmatrix} -ib \\ i \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ b \end{pmatrix} \qquad \Leftrightarrow \qquad b = i.$$

Die normalisierte Lösung ist $|+_y\rangle = \frac{1}{\sqrt{2}}(|\uparrow\rangle + i|\downarrow\rangle)$. Ebenso erhält man $|-_y\rangle = \frac{1}{\sqrt{2}}(|\uparrow\rangle - i|\downarrow\rangle)$ für den (-1)-Eigenvektor.
Es wäre auch akzeptabel gewesen, die Eigenvektoren zu raten (oder sich an sie zu erinnern), und dann die Eigenwertgleichung zu prüfen.
Die Wahrscheinlichkeiten können berechnet werden, indem man das Gleichungssystem

$$\begin{aligned}p(+|\psi) + p(-|\psi) &= 1, \\ p(+|\psi) - p(-|\psi) &= \langle\psi|\sigma_y|\psi\rangle,\end{aligned}$$

löst:

$$p(\pm|\psi) = \frac{1}{2}(1 \pm \sin(\varphi)\sin(\theta)).$$

2 Schrödingergleichung auf der Bloch-Sphäre Wir berechnen den Zeitentwicklungsoperator für $H = B\sigma_y$:

$$\begin{aligned}
U(t) &= \exp\left(\frac{1}{i\hbar} tB\sigma_y\right) \\
&= \sum_k \frac{1}{k!}\left(\frac{1}{i\hbar} t\mu B\sigma_y\right)^k \\
&= \sum_{k=2k' \text{ even}} \frac{(-1)^{k'}(t\mu B)^{2k'}}{(2k')!}\sigma_y^{2k'} - i \sum_{k=2k'+1 \text{ odd}} \frac{(-1)^{k'}(t\mu B)^{2k'+1}}{(2k'+1)!}\sigma_y^{2k'+1} \\
&= \sum_{k=2k' \text{ even}} \frac{(-1)^{k'}(t\mu B)^{2k'}}{(2k')!}\mathbb{1} - i \sum_{k=2k'+1 \text{ odd}} \frac{(-1)^{k'}(t\mu B)^{2k'+1}}{(2k'+1)!}\sigma_y \\
&= \cos(\frac{B}{\hbar}t)\mathbb{1} - i\sin(\frac{B}{\hbar}t)\sigma_y,
\end{aligned}$$

was der wohlbekannten Drehoperation entspricht. Die Zeitentwicklung von ψ ist also

$$\begin{aligned}
|\psi(t)\rangle &= U(t)|\psi\rangle \\
&= \dots \\
&= \frac{e^{i\pi/8}}{\sqrt{2}}\left[\left(\cos(\frac{B}{\hbar}t) - e^{-i\pi/4}\sin(\frac{B}{\hbar}t)\right)|\uparrow\rangle + \left(\sin(\frac{B}{\hbar}t) + e^{-i\pi/4}\cos(\frac{B}{\hbar}t)\right)|\downarrow\rangle\right].
\end{aligned}$$

Damit können wir nun die Erwartungswerte berechnen:

$$\begin{aligned}
\langle\psi(t)|\sigma_x|\psi(t)\rangle &= \frac{1}{2}\Big((\cos(tB/\hbar) - e^{+i\pi/4}\sin(tB/\hbar))(\sin(tB/\hbar) + e^{-i\pi/4}\cos(tB/\hbar)) + \\
&\quad (\sin(tB/\hbar) + e^{+i\pi/4}\cos(tB/\hbar))(\cos(tB/\hbar) - e^{-i\pi/4}\sin(tB/\hbar))\Big) \\
&= \frac{1}{2}\Big(\cos^2(tB/\hbar)(e^{+i\pi/4} + e^{-i\pi/4}) - \sin^2(tB/\hbar)(e^{+i\pi/4} + e^{-i\pi/4})\Big) \\
&= \frac{1}{2}\Big(\cos^2(tB/\hbar)\sqrt{2} - \sin^2(tB/\hbar)\sqrt{2}\Big) \\
&= \frac{1}{\sqrt{2}}\cos(2Bt/\hbar),
\end{aligned}$$

wobei wir die Identität $\cos(2x) = \cos^2(x) - \sin^2(x)$ benutzt haben. Analog berechnet man:

$$\begin{aligned}
\langle\psi(t)|\sigma_z|\psi(t)\rangle &= \dots = -\frac{1}{\sqrt{2}}\sin(2Bt/\hbar), \\
\langle\psi(t)|\sigma_y|\psi(t)\rangle &= \dots = -\frac{1}{\sqrt{2}}.
\end{aligned}$$

Für den letzten Wert kann man auch benutzen, dass ein Hamiltonian proportional zu σ_y den Erwartungswert von σ_y invariant lässt (Heisenbergbild!). Dann findet man direkt:

$$\langle\psi(t)|\sigma_y|\psi(t)\rangle = \langle\psi|\sigma_y|\psi\rangle = -\frac{1}{\sqrt{2}}.$$

Wir sehen also, dass der Bloch-Vektor von $|\psi(t)\rangle$ eine Kreisbewegung in der um $1/\sqrt{2}$ verschobenen x-z-Ebene vollführt. Die Periode dieser Bewegung ist offensichtlich $T = \frac{2\pi\hbar}{2B} = \frac{h}{2B}$.

3 Rechteckige Potentialbarriere Die Lösung dieser Aufgabe ist sehr ähnlich zur Aufgabe 1 auf Blatt 4. Die Unterscheide werden hier skizziert:
Durch Einsetzen in die Eigenwertgleichung des Hamitonians sieht man direkt, dass φ eine allgemeine Lösung des Problems ist. Aus den Stetigkeitsbedingungen bekommt man ebenso direkt das Gleichungssystem für die Koeffizienten A, B, C, D, F. Die Berechnung des Transmissionskoeffizienten ist zunächst sehr ähnlich zu Blatt 4 (mit Sinus und Kosinus anstatt der hyperbolischen Versionen). Um das Ergebnis zu bekommen, bedarf es schließlich aber etwas anderer Tricks:

$$
\begin{aligned}
\frac{1}{T} &= \left|\frac{A}{F}\right|^2 \\
&= \dots \\
&= \left|\cos(da_2) + i\frac{a_1^2 + a_2^2}{2a_1a_2}\sin(da_2)\right|^2 \\
&= \cos^2(da_2) + \frac{\left(a_1^2 + a_2^2\right)^2}{4a_1^2a_2^2}\sin^2(da_2) \\
&= 1 + \sin^2(da_2)\left(\frac{\left(a_1^2 + a_2^2\right)^2}{4a_1^2a_2^2} - 1\right) \\
&= 1 + \sin^2(da_2)\left(\frac{a_1^4 + 2a_1^2a_2^2 + a_2^4}{4a_1^2a_2^2} - \frac{4a_1^2a_2^2}{4a_1^2a_2^2}\right) \\
&= 1 + \sin^2(da_2)\frac{\left(a_1^2 - a_2^2\right)^2}{4a_1^2a_2^2}.
\end{aligned}
$$

4 Lineare Störung des harmonischen Oszillators Wir schreiben die Störung mit Hilfe der Leiteroperatoren als

$$X = \frac{x_0}{\sqrt{2}}\left(a + a^\dagger\right).$$

Nun ist klar, dass die Korrekturen in erster Ordnung alle verschwinden:

$$E_n^{(1)} = \frac{\lambda x_0}{\sqrt{2}}\langle n|a + a^\dagger|n\rangle = \dots = 0.$$

Wir berechnen nun also die Übergangselemente

$$\langle n|a + a^\dagger|m\rangle = \dots = \sqrt{n+1}\,\delta_{n,m-1} + \sqrt{n}\,\delta_{n,m+1}.$$

Und damit bekommen wir in zweiter Ordnung schließlich

$$
\begin{aligned}
E_n^{(2)} &= \left(\frac{\lambda x_0}{\sqrt{2}}\right)^2 \sum_{n \neq m} \frac{\left|\langle n|a + a^\dagger|m\rangle\right|^2}{E_n - E_m} \\
&= \dots \\
&= -\frac{\lambda^2 x_0^2}{2\hbar\omega}.
\end{aligned}
$$

Bemerkung: Das Resultat ist unabhängig von der Quantenzahl n und gibt, wie man sehr einfach zeigen kann, auch die exakten Eigenwerte des gestörten Hamiltonians.

5 Kugelflächenfunktionen Die Kugelflächenfunktionen können direkt durch Anwenden des Absteigeoperators und entsprechender Normierung berechnet werden:

$$\begin{aligned}
Y_{1,0}(\theta,\varphi) &= \frac{1}{\sqrt{2}\hbar} L_- Y_{1,1}(\theta,\varphi) \\
&= -\sqrt{\frac{3}{16\pi}} e^{-i\varphi} \left(-\frac{\partial}{\partial\theta} + i\cot\theta \frac{\partial}{\partial\varphi} \right) \sin\theta e^{i\varphi} \\
&= \dots \\
&= \sqrt{\frac{3}{4\pi}} \cos\theta. \\
Y_{1,-1}(\theta,\varphi) &= \frac{1}{\sqrt{2}\hbar} L_- Y_{1,0}(\theta,\varphi) \\
&= \dots \\
&= \sqrt{\frac{3}{8\pi}} \sin\theta e^{-i\varphi}.
\end{aligned}$$

6 Quantenkorrelationen Die Rechnung ist analog zu Aufgabe 1 auf Blatt 9:

$$\begin{aligned}
\langle \phi^+ | S^1_\alpha S^2_\beta | \phi^+ \rangle \quad = \quad & \frac{1}{2} \Big(\sin\alpha \sin\beta \, \langle \phi^+ | \sigma^1_x \sigma^2_x | \phi^+ \rangle + \sin\alpha \cos\beta \, \langle \phi^+ | \sigma^1_x \sigma^2_z | \phi^+ \rangle + \\
& \cos\alpha \sin\beta \, \langle \phi^+ | \sigma^1_z \sigma^2_x | \phi^+ \rangle + \cos\alpha \cos\beta \, \langle \phi^+ | \sigma^1_z \sigma^2_z | \phi^+ \rangle \Big).
\end{aligned}$$

Nun sehen wir uns die einzelnen bra-ket's an. Z.B.:

$$\begin{aligned}
\langle \phi^+ | \sigma^1_x \sigma^2_x | \phi^+ \rangle \quad = \quad & \frac{1}{2} \Big(\langle \uparrow,\uparrow | \sigma^1_x \sigma^2_x | \uparrow,\uparrow \rangle + \langle \uparrow,\uparrow | \sigma^1_x \sigma^2_x | \downarrow,\downarrow \rangle + \\
& \langle \downarrow,\downarrow | \sigma^1_x \sigma^2_x | \uparrow,\uparrow \rangle + \langle \downarrow,\downarrow | \sigma^1_x \sigma^2_x | \downarrow,\downarrow \rangle \Big).
\end{aligned}$$

Da σ^1_x den ersten Spin umdreht und σ^2_x den zweiten, ergeben die mittleren beiden Summanden jeweils 1, während die äusseren beiden 0 geben. Also: $\langle \phi^+ | \sigma^1_x \sigma^2_x | \phi^+ \rangle = \frac{1}{2} 2 = 1$. Auf die gleiche Art kann man die verbleibenen drei bra-ket's ausrechnen. Man findet:

$$\langle \phi^+ | S^1_\alpha S^2_\beta | \phi^+ \rangle = \dots = \sin\alpha \sin\beta + \cos\alpha \cos\beta = \cos(\alpha - \beta),$$

wobei wir zum Schluss wieder eine trigonometrische Identität genutzt haben, die im Ernstfall angegeben oder bei der Klausuraufsicht zu erfragen gewesen wäre.