Quantenmechanik

David Gross, Mateus Araújo

Übungsblatt 10 **Abgabe: 18.06 um 12 Uhr**

1 Quantenkorrelationen (6 P)

In der VL haben wir den berühmten Singulett-Zustand kennengelernt, der zwei Spin-1/2-Teilchen mit Gesamtdrehimpuls Null beschreibt. Wir werden ein Paar seiner Eigenschaften analysieren.

a) **(0,5 P)** Die Observable $S_\alpha = \sin(\alpha)\sigma_x + \cos(\alpha)\sigma_z$ misst den Drehimpuls eines Spin-$\frac{1}{2}$-Teilchens bzgl. einer Richtung in der $x - z$ Ebene, die den Winkel α relativ zur z-Achse einschließt. Um dies einzusehen, zeigen Sie, dass der Erwartungswert, wenn man mit dem Quantenzustand $|\psi(\theta)\rangle = \cos(\theta/2)|\uparrow\rangle + \sin(\theta/2)|\downarrow\rangle$ rechnet, durch

$$\langle\psi(\theta)|S_\alpha|\psi(\theta)\rangle = \cos(\theta - \alpha)$$

gegeben ist.

b) **(1 P)** Der Singulett-Zustand kann als

$$|\Psi^-\rangle = \frac{1}{\sqrt{2}}(|\uparrow,\downarrow\rangle - |\downarrow,\uparrow\rangle)$$

geschrieben werden. Wir können den Erwartungswert von einer Drehimpulsmessung am ersten bzw. zweiten Teilchen berechnen indem wir den Erwartungswert von der Observablen S^1_α bzw. S^2_α berechnen. Die Wirkung von S^1_α am Singulett ist gegeben durch

$$S^1_\alpha|\Psi^-\rangle = \frac{1}{\sqrt{2}}\Big((S_\alpha|\uparrow\rangle)|\downarrow\rangle - (S_\alpha|\downarrow\rangle)|\uparrow\rangle\Big),$$

und analog dazu ist die Wirkung von S^2_α am Singulett gegeben durch

$$S^2_\alpha|\Psi^-\rangle = \frac{1}{\sqrt{2}}\Big(|\uparrow\rangle(S_\alpha|\downarrow\rangle) - |\downarrow\rangle(S_\alpha|\uparrow\rangle)\Big).$$

Zeigen Sie, dass

$$\langle\Psi^-|S^1_\alpha|\Psi^-\rangle = 0 = \langle\Psi^-|S^2_\alpha|\Psi^-\rangle.$$

Was ist die physikalische Aussage dieser Gleichung?

c) **(2,5 P)** Stellen Sie sich vor, dass zwei Experimentalisten, Anna und Bernhard, die *korrelationen* zwischen den Teilchen messen wollen. Dafür messen sie jeweils S^1_α bzw. S^2_β. Zeigen Sie, dass

$$\langle\Psi^-|S^1_\alpha S^2_\beta|\Psi^-\rangle = -\cos(\alpha - \beta),$$

und erklären Sie physikalisch, warum der Erwartungswert für $\alpha = \beta$ gleich -1 sein muss.

d) **(2 P)** Der Singulett ist ein *verschränkter Quantenzustand*, das heißt, es ist kein Produkt von einem Quantenzustand $|\psi(\theta_1)\rangle$ für das erste Teilchen mit einem Quantenzustand $|\psi(\theta_2)\rangle$ für das zweite Teilchen. Um dies zu beweisen, zeigen Sie dass

$$\langle\psi(\theta_1)|\langle\psi(\theta_2)|S^1_\alpha S^2_\beta|\psi(\theta_1)\rangle|\psi(\theta_2)\rangle = \cos(\theta_1 - \alpha)\cos(\theta_2 - \beta),$$

und dass keine Winkel θ_1, θ_2 existieren, sodass

$$\cos(\theta_1 - \alpha)\cos(\theta_2 - \beta) = -\cos(\alpha - \beta).$$

für alle Werte von α, β.

Hinweis: Dies müsste gelten für ein fixes Paar von θ_1, θ_2, das unabhängig von α und β ist. Finden Sie θ_1, θ_2 für jeweils einen bestimmten Wert von α und β und zeigen Sie, dass dies für andere Werte von α und β nicht funktioniert.

2 Klassisches Analogon (4 P)

Die Korrelation die Sie in Übung **1c** berechnet haben ist etwas eigenartig. Um zu sehen was komisch daran ist, werden wir hier ein klassisches Analogon zum Singulettzustand bauen und sehen dass dessen Korrelationen qualitativ anders sind. Unserer Modell ist eine Bombe mit Anfangsdrehimpuls Null, die in zwei Teile explodiert, eine mit Drehimpuls $J_1 = (\cos\theta, \sin\theta)$ für $\theta \in [0, 2\pi)$ und die andere mit Drehimpuls $J_2 = -J_1$. Anna und Bernhard führen wieder Messungen an J_1 und J_2 durch.

a) **(1 P)** Hier werden wir die lokalen Erwartunswerte berechnen, analog zu Übung **1b**. Anna misst den Drehimpuls ihrer Hälfte bzgl. einer Richtung $m_\alpha = (\cos\alpha, \sin\alpha)$ für $\alpha \in [0, 2\pi)$. Das Ergebnis sei

$$r_\alpha = \operatorname{sgn}(m_\alpha \cdot J_1),$$

wobei $\operatorname{sgn}(x)$ die Vorzeichenfunktion ist. Der Erwartungswert von r_α für gleichmäßig verteilte Drehimpulse ist gegeben durch

$$\langle r_\alpha \rangle = \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} \mathrm{d}\theta \operatorname{sgn}(m_\alpha \cdot J_1).$$

Zeigen Sie dass $\langle r_\alpha \rangle = 0$, das heißt, die lokalen Erwartungswerte gleich sind.

b) **(2 P)** Analog zu Übung **1c**, werden wir hier den *korrelierte* Erwartungswert von Anna und Bernhard berechnen. Er ist gegeben durch

$$\langle r_\alpha r_\beta \rangle = \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} \mathrm{d}\theta \operatorname{sgn}(m_\alpha \cdot J_1) \operatorname{sgn}(m_\beta \cdot J_2),$$

wieder für gleichmäßig verteilte Drehimpulse. Zeigen Sie, dass

$$\langle r_\alpha r_\beta \rangle = -1 + \frac{2\phi_{\alpha\beta}}{\pi}$$

gilt, wobei $\phi_{\alpha\beta} = \min\{|\alpha - \beta|, 2\pi - |\alpha - \beta|\}$ der Winkel zwischen m_α und m_β ist.

Hinweis: Beachten Sie, dass $J_2 = (\cos(\theta + \pi), \sin(\theta + \pi))$.

c) **(1 P)** Skizzieren Sie $-1 + \frac{2\phi_{\alpha\beta}}{\pi}$ und $-\cos(\alpha - \beta)$ um zu zeigen dass die Quanten- und die klassischen Korrelationen *nicht* gleich sind.