Quantenmechanik

David Gross, Mateus Araújo

Übungsblatt 2 **Abgabe: 16.04 um 12 Uhr**

1 Quantenzustandsraum (5 P)

In dieser Übung werden wir eine beliebte Darstellung für den Zustandsraum der Quantenzustände von einem Spin-$\frac{1}{2}$ Teilchen entwickeln. Diese ist als Bloch-Sphäre bekannt (nach Felix Bloch benannt). Das ist einer der sehr wenigen Fälle, in denen man einen Quantenzustand vollständig visualisieren kann, und damit viele fundamentale Phänomene illustrieren kann.

a) **(1 P)** Der Quantenzustand von Spin-$\frac{1}{2}$ Teilchen ist ein Vektor $|\psi\rangle \in \mathbb{C}^2$, der die Normierungsbedingung $\||\psi\rangle\|_2 = 1$ erfüllt. Zeigen Sie, dass jeder solche Vektor als

$$|\psi\rangle = \begin{pmatrix} e^{i\alpha}\cos(\theta/2) \\ e^{i\beta}\sin(\theta/2) \end{pmatrix}$$

geschrieben werden kann, für $\theta \in [0, \pi]$ und $\alpha, \beta \in [0, 2\pi)$.

b) **(1 P)** Zeigen Sie, dass die Quantenzustände $|\psi\rangle$ und $e^{i\gamma}|\psi\rangle$ für jede mögliche Messung die gleichen Wahrscheinlichkeiten ergeben werden. Das heißt, dass $|\psi\rangle$ und $e^{i\gamma}|\psi\rangle$ physikalisch äquivalent sind.

c) **(2 P)** Diese Äquivalenz ermöglicht uns γ so zu wählen, dass die Darstellung von $|\psi\rangle$ vereinfacht wird. Sei $\gamma = -\alpha$, und $\varphi = \beta - \alpha$. Damit

$$|\psi\rangle = \begin{pmatrix} \cos(\theta/2) \\ e^{i\varphi}\sin(\theta/2) \end{pmatrix},$$

und zwei verschiedene θ, φ stellen zwei verschiedene Quantenzustände dar, die physikalisch *nicht* äquivalent sind.

Berechnen Sie mit dieser Darstellung die Erwartungswerte $\langle\psi|\sigma_x|\psi\rangle$, $\langle\psi|\sigma_y|\psi\rangle$, und $\langle\psi|\sigma_z|\psi\rangle$, wobei σ_x, σ_y, und σ_z die Pauli-Matrizen

$$\sigma_x = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}, \quad \sigma_y = \begin{pmatrix} 0 & -i \\ i & 0 \end{pmatrix} \quad \text{und} \quad \sigma_z = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}$$

sind, und zeigen Sie, dass die Vektoren

$$\vec{v} = \begin{pmatrix} \langle\psi|\sigma_x|\psi\rangle \\ \langle\psi|\sigma_y|\psi\rangle \\ \langle\psi|\sigma_z|\psi\rangle \end{pmatrix}$$

eine Sphäre mit Mittelpunkt $\vec{0}$ und Radius 1 bilden. Diese ist die Bloch-Sphäre.

Erinnerung: Eine Sphäre mit Mittelpunkt $\vec{v_0}$ und Radius r ist die Menge aller Punkte $\vec{v}$ für die $\|\vec{v} - \vec{v_0}\|_2 = r$ erfüllt ist.

d) **(1 P)** Wo in der Bloch-Sphäre sind die Eigenzustände von σ_x, σ_y, und σ_z dargestellt? **Erinnerung:** Alle drei Matrizen haben Eigenwerte ± 1, und die Eigenzustände sind $(|0\rangle \pm |1\rangle)/\sqrt{2}$, $(|0\rangle \pm i|1\rangle)/\sqrt{2}$, und $|0\rangle$ und $|1\rangle$.

2 Bewegung rund um die Bloch-Sphäre (5 P)

In dieser Übung werden wir die Dynamik von Spin-$\frac{1}{2}$ Quantenzuständen berechnen und visualisieren. Diese Dynamik beschreibt zum Beispiel, wie ein Spin-$\frac{1}{2}$ Teilchen sich in einem magnetischen Feld verhält. Die hier entwickelte Darstellung wird z.B. in der Theorie von Quantencomputern oder der NMR-Spektroskopie verwendet.

a) **(1 P)** Zeigen Sie, dass

$$\exp(it\sigma_x) = \cos(t)\mathbb{1} + i\sin(t)\sigma_x \quad \text{und} \quad \exp(it\sigma_z) = \cos(t)\mathbb{1} + i\sin(t)\sigma_z,$$

wobei $t \in \mathbb{R}$.

Hinweis: Das Exponential von einer Matrix A ist definiert als

$$\exp(A) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{A^n}{n!}$$

b) **(2 P)** Sei $|\psi\rangle = \cos(\theta/2)|0\rangle + e^{i\varphi}\sin(\theta/2)|1\rangle$ ein beliebiger Spin-$\frac{1}{2}$ Quantenzustand, wobei $|0\rangle$ und $|1\rangle$ die Eigenzustände von σ_z sind. Berechnen Sie die Bloch-Sphäre-Darstellung von

$$\exp(it\sigma_z)|\psi\rangle$$

laut Aufgabe **1c**. Plotten Sie (mit z.B. Julia oder Wolfram Alpha) die Ergebnis als Funktion von t für ein bestimmtes $|\psi\rangle \neq |0\rangle, |1\rangle$, und beschreiben Sie diese in Ihren eigen Worten (Sie müssen die Grafik nicht ausdrucken!).

c) **(2 P)** Sei $|\psi\rangle = \cos(\theta/2)|+\rangle + e^{i\varphi}\sin(\theta/2)|-\rangle$ ein beliebiger Spin-$\frac{1}{2}$ Quantenzustand, wobei $|\pm\rangle$ die Eigenzustände von σ_x sind. Berechnen Sie die Bloch-Sphäre-Darstellung von

$$\exp(it\sigma_x)|\psi\rangle$$

laut Aufgabe **1c**. Plotten Sie (mit z.B. Julia oder Wolfram Alpha) die Ergebnis als Funktion von t für ein bestimmtes $|\psi\rangle \neq |\pm\rangle$, und beschreiben Sie diese in Ihren eigen Worten (Sie müssen die Grafik nicht ausdrucken!).

3 (Bonusaufgabe) Gedrehtes Bloch-Sphäre (2 P)

Sei $|\psi\rangle = \cos(\theta/2)|+u\rangle + e^{i\varphi}\sin(\theta/2)|-u\rangle$ ein beliebiger Spin-$\frac{1}{2}$ Quantenzustand, wobei $|\pm u\rangle$ die Eigenzustände von $a\sigma_x + b\sigma_y + c\sigma_z$ sind, $a, b, c \in \mathbb{R}$ und $a^2 + b^2 + c^2 = 1$. Berechnen Sie die *gedrehte* Bloch-Sphäre-Darstellung von

$$\exp\left[it\left(a\sigma_x + b\sigma_y + c\sigma_z\right)\right]|\psi\rangle,$$

wo man statt der Formel aus Aufgabe **1c** folgende Darstellung verwendet

$$\vec{v} = \begin{pmatrix} \langle\psi|\sigma_x'|\psi\rangle \\ \left\langle\psi\middle|\sigma_y'\middle|\psi\right\rangle \\ \langle\psi|\sigma_z'|\psi\rangle \end{pmatrix},$$

wobei σ_x', σ_y', und σ_z' die Pauli-Matrizen in der $|\pm u\rangle$-Basis sind, gegeben durch

$$\sigma_x' = |+u\rangle\langle -u| + |-u\rangle\langle +u|, \quad \sigma_y' = -i|+u\rangle\langle -u| + i|-u\rangle\langle +u|, \quad \sigma_z' = |+u\rangle\langle +u| - |-u\rangle\langle -u|$$

Plotten Sie das Ergebnis als Funktion von t für ein bestimmtes $|\psi\rangle \neq |\pm u\rangle$, und beschreiben Sie diese in Ihren eigen Worten (Sie müssen die Grafik nicht ausdrucken!).

Hinweis: Don't panic! Berechnen Sie zuerst $\left(a\sigma_x + b\sigma_y + c\sigma_z\right)^2$ und vereinfachen Sie es so weit wie möglich.