Quantenmechanik

David Gross, Mateus Araújo

Übungsblatt 9 **Abgabe: 04.06 um 12 Uhr**

1 Spin-1 Operatoren (4 P)

In der VL haben wir eine Matrizen-Darstellung für die Spin-1/2 Operatoren hergeleitet. Hier werden wir den anderen interessanten Fall bearbeiten: Spin-1. Gegeben ist

$$S^2|s,m\rangle = s(s+1)|s,m\rangle$$
$$S_z|s,m\rangle = m|s,m\rangle$$
$$S_+|s,m\rangle = \sqrt{(s(s+1)-m(m+1))}|s,m+1\rangle$$

a) **(0,5 P)** Zeigen Sie dass in der Basis $\{|1,1\rangle, |1,0\rangle, |1,-1\rangle\}$ der Operator S_z dargestellt ist als

$$S_z = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \end{pmatrix}$$

b) **(0,8 P)** Betrachten Sie die Matrizenelemente $\langle 1,m|S_+|1,m'\rangle$. Für welche Werte von m, m' können die Elemente anders als Null sein? Zeigen Sie damit dass in dieser Basis der Aufsteigeoperator dargestellt ist als

$$S_+ = \begin{pmatrix} 0 & \sqrt{2} & 0 \\ 0 & 0 & \sqrt{2} \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

c) **(0,7 P)** Mithilfe von **1b**, und der Tatsache dass $S_+^\dagger = S_-$, zeigen Sie dass die Operatoren S_x und S_y dargestellt sind als

$$S_x = \frac{1}{\sqrt{2}}\begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix} \quad \text{und} \quad S_y = \frac{1}{\sqrt{2}}\begin{pmatrix} 0 & -i & 0 \\ i & 0 & -i \\ 0 & i & 0 \end{pmatrix}$$

d) **(2 P)** Zeigen Sie dass die Operatoren S_x^2, S_y^2, und S_z^2 kommutieren. Finden Sie die Basis in der alle drei Operatoren diagonal sind, und schreiben Sie die Operatoren S_x, S_y, und S_z in dieser Basis.

2 Turn around and change the world (6 P)

Wir wollen ein überraschendes quantenmechanisches Phänomen nachvollziehen: dreht man ein Spin-1/2 Teilchen um 360 Grad, geht es *nicht* in den ursprünglichen Zustand zurück.

Erinnern Sie sich an Übungen **2a** und **2b** von Zettel 2 (dies ist eine gute Gelegenheit zur Wiederholung!). Damals haben wir gezeigt, dass

$$U(\theta) = \exp(i\theta\sigma_x/2) = \cos(\theta/2)\mathbb{1} + i\sin(\theta/2)\sigma_x,$$

eine Drehung um die x-Achse um den Winkel θ (und nicht etwa um $\theta/2$) beschreibt. Man sieht unmittelbar, dass $U(2\pi) = -\mathbb{1}$ gilt. Es folgt, dass der Effekt von $U(2\pi)$ unbeobachtbar ist, wenn man den Operator auf die *gesamte* Wellenfunktion anwendet (Zettel 2, **1b**). Unten führen wir einen weiteren Freiheitsgrad ein, der dafür sorgt, dass die Phase nur auf Teile der Wellenfunktion wirkt und so sichtbar wird.

a) **(1,5 P)** Als Modellsystem betrachten wir ein Spin-1/2 Teilchen mit einem zusätzlichen Freiheitsgrad: es kann sich an einem von zwei Orten befinden. Diese bezeichnen wir mit "1" und "2". Der Hilbertraum $\mathcal{H}$ des Teilchens wird nun von vier Vektoren aufgespannt:

$$|\uparrow, 1\rangle, |\uparrow, 2\rangle, |\downarrow, 1\rangle, |\downarrow, 2\rangle.$$

Also: "Spin nach oben, an Ort 1", "Spin nach oben, an Ort 2", und so weiter.

Wir führen nun eine unitäre Operation H ein, die das Teilchen in eine Überlagerung von Ortszuständen bringt. Sie wirkt auf den Ortsfreiheitsgrad durch

$$H|1\rangle = \frac{1}{\sqrt{2}}(|1\rangle + |2\rangle), \qquad H|2\rangle = \frac{1}{\sqrt{2}}(|1\rangle - |2\rangle).$$

und lässt den Spin unverändert. (Man bezeichnet ein solches H als *Beamsplitter*). Um die Wirkung von H auf die vollständige Basis auszudrücken, schreibt man die Spin- und Ortsfreiheitsgrade in Produktform $|\uparrow, 1\rangle = |\uparrow\rangle|1\rangle$, wendet H auf den Ort an und multipliziert aus:

$$H|\uparrow, 1\rangle = |\uparrow\rangle(H|1\rangle) = |\uparrow\rangle\Big(\frac{1}{\sqrt{2}}(|1\rangle + |2\rangle)\Big) = \frac{1}{\sqrt{2}}\Big(|\uparrow, 1\rangle + |\uparrow, 2\rangle\Big).$$

Was ist die Matrixdarstellung von H bezüglich der angegebenen Basis von $\mathcal{H}$?

b) **(1,5 P)** Sei $R(\theta)$ die Operation, die den Spin um den Winkel θ dreht, wenn sich das Teilchen am Ort "1" befindet. Ist das Teilchen hingegen am Ort "2", wird es nicht verändert. Also z.B.

$$R(\theta)(|\uparrow\rangle|1\rangle) = (U(\theta)|\uparrow\rangle)|1\rangle, \qquad R(\theta)(|\uparrow\rangle|2\rangle) = |\uparrow\rangle|2\rangle.$$

Geben Sie die Matrixdarstellung von $R(\theta)$ an.

c) **(3 P)** Betrachten Sie nun folgendes Experiment. Das Teilchen ist anfangs am Ort "1" und sein Spin zeigt nach oben. Wir wenden erst die Operation H an, um das Teilchen auf die beiden Orte zu verteilen. Dann wird $R(\theta)$ realisiert, also eine Drehung $U(\theta)$ am Ort "1". Anschliessend wird ein weiteres Mal H angewandt.

Berechnen Sie den Zustand des Systems nach dem ersten, zweiten und dritten Schritt des Experiments. Zeigen Sie, dass die Wahrscheinlichkeit am Ende das Teilchen wieder mit Spin nach oben am Ort "1" zu finden durch

$$\frac{1}{4}\big(\cos\theta/2 + 1\big)^2$$

gegeben ist. Um wieviel Grad muss man drehen, damit der ursprüngliche Zustand wieder hergestellt wird?

Diese Rechnung gibt modellhaft ein Experiment wieder, dass in den 70er Jahren an Neutronen durchgeführt wurde. Der Titel der Publikation lautet Verification of coherent spinor rotation of Fermions (hier verlinkt). Aus dem Uni-Netz können Sie auf die Arbeit zugreifen.