Klassische Mechanik

David Gross, Johan Åberg, Markus Heinrich

Übungsblatt 12 **Abgabe: 18. Januar um 12 Uhr**

1 Lösen der Bewegungsgleichungen mittels kanonischer Transformation

In dieser Übung wollen wir eine kanonische Transformation benutzen um die Bewegungsgleichungen zu lösen.

a) Betrachten Sie die Transformation von (q, p) zu (Q, P) gegeben durch

$$Q = \alpha p q^{\gamma}, \quad P = \beta q^{\delta}, \tag{1}$$

dabei sind α, β, γ und δ Konstanten. *Was sind die Bedingungen an α, β, γ und δ damit (1) eine kanonische Transformationen ist?*

Hinweis: Rufen Sie sich die Charakterisierung von kanonischen Transformationen durch Poisson-Klammern und deren Definition in Erinnerung.

(3 Punkte)

b) *Finden Sie eine kanonische Transformation von (q, p) zu (Q, P), die folgende Hamiltonfunktion,*

$$H(q, p) = \frac{1}{2}p^2q^4 + \frac{1}{2q^2} \tag{2}$$

in die des harmonischen Oszillators,

$$H(Q, P) = \frac{1}{2}P^2 + \frac{1}{2}Q^2,$$

transformiert.

Hinweis: Es gab einen Grund, warum wir Aufgabe a) gemacht haben. **(2 Punkte)**

c) Benutzen Sie das Ergebnis aus b) um die Hamiltonschen Bewegungsgleichungen für (2) zu lösen. **(2 Punkte)**

2 Der Satz von Liouville

Betrachten Sie ein freies Teilchen der Masse m, das sich entlang einer Geraden bewegt, d.h. das durch folgende Hamilton-Funktion beschrieben wird:

$$H(x, p) = \frac{1}{2m}p^2.$$

Betrachten Sie für $a, b > 0$ das Rechteck R im Phasenraum, gegeben durch $-a \leq x \leq a$, $-b \leq p \leq b$.

a) Betrachten wir R als Menge möglicher Anfangsbedingungen für das Teilchen zur Zeit $t = 0$. Die Zeitentwicklung unter H führt diese für jede Zeit $t \geq 0$ in eine neue Menge $R(t)$ über.

Bestimmen Sie $R(t)$ und skizzieren Sie deren Form. **(3 Punkte)**

b) *Berechnen Sie den Flächeninhalt von $R(t)$ und vergleichen Sie mit dem von R.* **(1 Punkte)**

3 Erzeugende Funktionen für kanonische Transformationen

Betrachten Sie eine Funktion $F_1(q, Q)$ der alten und neuen Koordinaten q bzw. Q. Diese definiert eine kanonische Transformation zwischen (q, p) und (Q, P) durch die beiden Gleichungen

$$p = \frac{\partial F_1}{\partial q}, \quad P = -\frac{\partial F_1}{\partial Q}. \tag{3}$$

Die Funktion F_1 wird in diesem Zusammenhang auch erzeugende Funktion dieser Transformation genannt.

a) Betrachten Sie die Funktion

$$F_1(q, Q) = \frac{m\omega}{2} q^2 \frac{1}{\tan Q},$$

wobei m und ω Konstanten sind. *Benutzen Sie die Gleichungen (3) um q und p als Funktionen von Q und P auszudrücken.* **(2 Punkte)**

Hinweis: Durch die Gleichungen (3) erhalten Sie p und P als Funktionen von q und Q. Stellen Sie diese so um, dass Sie q und p als Funktionen von Q und P erhalten. Vernachlässigen Sie dabei Betrachtungen über die Wohldefiniertheit der Wurzeln und deren Vorzeichen.

b) Betrachten Sie die Hamiltonfunktion des harmonischen Oszillators:

$$H(q, p) = \frac{1}{2m} p^2 + \frac{m\omega^2}{2} q^2.$$

Drücken Sie H durch die neuen Variablen Q und P aus. Wie lautet die Lösung der entsprechenden Bewegungsgleichung? **(2 Punkte)**

Bemerkung: Durch Transformation dieser Lösung zurück in die ursprünglichen Koordinaten (q, p) kann man ebenfalls die Lösungen der Bewegungsgleichungen des harmonischen Oszillators erhalten.

4 Erzeugende Funktionen für kanonische Transformationen, die Zweite

In der letzten Übung haben wir eine erzeugende Funktion der Form $F_1(q, Q)$ betrachtet. Darüber hinaus ist es auch möglich erzeugende Funktionen $F_2(q, P)$, $F_3(p, Q)$ und $F_4(p, P)$ zu benutzen. Als Beispiel wollen wir hier den Fall $F_3(p, Q)$ betrachten. Solche Funktionen definieren kanonische Transformationen von (q, p) zu (Q, P) durch

$$q = -\frac{\partial F_3}{\partial p}, \quad P = -\frac{\partial F_3}{\partial Q}. \tag{4}$$

Beachten Sie das unterschiedliche Vorzeichen im Vergleich zu (3)!

a) Betrachten Sie die Funktion

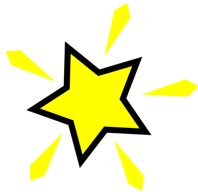
$$F_3(p, Q) = -(e^Q - 1)^2 \tan p.$$

Benutzen Sie (4) um Q und P als Funktionen von q und p zu bestimmen.

Hinweis: Wie in der letzten Aufgabe müssen Sie sich nicht um die Wohldefiniertheit von Wurzeln (oder Logarithmen) kümmern. **(2 Punkte)**

b) *Benutzen Sie Poisson-Klammern um zu zeigen, dass $Q(q, p)$ und $P(q, p)$ aus a) eine kanonische Transformation von (q, p) zu (Q, P) definieren.* **(3 Punkte)**

5 Herleitung der Bedingungen an erzeugende Funktionen



Diese Übung gibt keine Punkte, aber goldene Sterne! Wenn es Ihnen unklar ist, woher die Bedingungen (3) und (4) herkommen, so ist die Aufgabe das Richtige für Sie!

Eine Methode Bedingungen wie (3) und (4) herzuleiten basiert auf auf der Hamiltonschen Version des Variationsprinzips. Das Wirkungsfunktional $\mathcal{S}[\vec{q}] = \int_{t_i}^{t_f} L(\vec{q}, \dot{\vec{q}}, t)dt$ kann man mittels der Beziehung zwischen der Lagrange- und Hamiltonfunktion wie folgt schreiben:

$$\mathcal{S}[\vec{q}, \vec{p}] = \int_{t_i}^{t_f} \sum_j \dot{q}_j p_j - H(\vec{q}, \vec{p}, t)dt. \tag{5}$$

Durch Variation dieses Integrals erhält man die Hamiltonschen Gleichungen.

Nehmen wir nun an, dass wir neue Koordinaten $\vec{Q}, \vec{P}$ eingeführt haben und so eine neue Hamiltonfunktion $\tilde{H}(\vec{Q}, \vec{P}, t)$ sowie ein neues Wirkungsfunktional erhalten:

$$\tilde{\mathcal{S}}[\vec{Q}, \vec{P}] = \int_{t_i}^{t_f} \sum_j \dot{Q}_j P_j - \tilde{H}(\vec{Q}, \vec{P}, t)dt. \tag{6}$$

Stimmen die beiden Integranden in (5) und (6) bis auf eine totale Zeitableitung $\frac{dF}{dt}$ einer Funktion F überein[1], dann führen die beiden Funktionale (5) und (6) auf äquivalente Bewegungsgleichungen. Anders ausgedrückt: Gilt

$$\sum_j \dot{q}_j p_j - H(\vec{q}, \vec{p}, t) = \sum_j \dot{Q}_j P_j - \tilde{H}(\vec{Q}, \vec{P}, t) + \frac{dF}{dt}, \tag{7}$$

so beschreibt $(\vec{q}, \vec{p}, H)$ die gleiche Physik wie $(\vec{Q}, \vec{P}, \tilde{H})$[2].

a) Nehmen wir an, dass F folgende Form hat:

$$F = F_1(\vec{q}, \vec{Q}, t),$$

für eine beliebige Funktion F_1. *Zeigen Sie, dass*

$$p_j = \frac{\partial F_1}{\partial q_j}, \qquad P_j = -\frac{\partial F_1}{\partial Q_j}, \qquad \tilde{H}(\vec{Q}, \vec{P}, t) = H(\vec{q}, \vec{p}, t) + \frac{\partial F_1}{\partial t}. \tag{8}$$

hinreichende Bedingungen für (7) sind. **(0 Punkte, aber einen goldenen Stern!)**

Bemerkung: Die Bedingungen (3) sind ein Spezialfall von (8).

b) Nehmen wir stattdessen an, dass

$$F = \sum_j q_j p_j + F_3(\vec{p}, \vec{Q}, t),$$

für eine beliebige Funktion F_3 gilt. *Zeigen Sie, dass*

$$q_j = -\frac{\partial F_3}{\partial p_j}, \qquad P_j = -\frac{\partial F_3}{\partial Q_j}, \qquad \tilde{H}(\vec{Q}, \vec{P}, t) = H(\vec{q}, \vec{p}, t) + \frac{\partial F_3}{\partial t}. \tag{9}$$

[1] F kann eine Funktion von $\vec{q}$, $\vec{p}$, $\vec{Q}$, $\vec{P}$ und t, aber nicht von $\dot{\vec{q}}$, $\dot{\vec{p}}$, $\dot{\vec{Q}}$, $\dot{\vec{P}}$ sein.

[2] Hier meinen wir implizit, dass alle Q und P in dieser Gleichung Funktionen von q und p sind. Äquivalent könnte man auch alle q und p als Funktionen von Q und P sehen.

hinreichende Bedingungen für (7) sind.

(0 Punkte, aber einen goldenen Stern!)

Bemerkung: Die Gleichungen (9) enthalten (4) als Spezialfall.

Wenn Sie noch nicht genug haben, können Sie auch noch die Bedingungen an F_2 und F_4 herleiten, indem Sie folgende Annahmen machen:

$$F = -\sum_j Q_j P_j + F_2(\vec{q}, \vec{P}, t), \qquad F = \sum_j q_j p_j - \sum_j Q_j P_j + F_4(\vec{p}, \vec{P}, t).$$