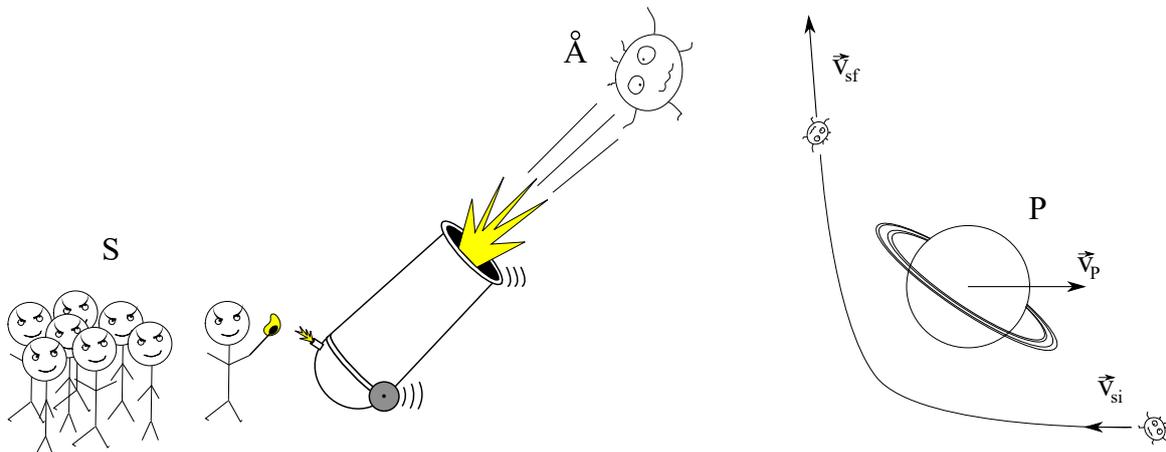


# KLASSISCHE MECHANIK

David Gross, Johan Åberg, Markus Heinrich

Übungsblatt 3 Abgabe: 2. November um 12 Uhr

## 1 Ein Ding ziemlich weit ins Weltall schießen



Eine Gruppe Studenten  $S$  will ein Individuum  $\mathring{A}$ , das Übungen in klassischer Mechanik erstellt, ziemlich weit ins Weltall schießen. Dazu benutzen sie eine Kanone<sup>1</sup>. Sie haben genug Schießpulver um die notwendige Fluchtgeschwindigkeit der Erde zu erreichen. Allerdings wollen sie auch sicher gehen, dass  $\mathring{A}$  tief im interstellaren Raum verschwindet, gleichzeitig aber so wenig Schießpulver wie möglich verbrauchen, damit genug Geld für die Party danach übrig bleibt. Einige Studenten haben einen Wikipedia-Artikel über ein schlaues Manöver gelesen, das “Slingshot” (oder “Gravity Assist” bzw. “Swing-by”) genannt wird. Die Idee dabei ist, dass man die Geschwindigkeit (relativ zur Sonne) eines Raumschiffes (oder eines Objekts  $\mathring{A}$ ) erhöhen kann, indem man es in geeigneter Weise einen Planeten passieren lässt. Das Problem ist, dass die Studentengruppe  $S$  sich nicht so ganz sicher ist, wie das alles funktioniert, also müssen Sie ihnen helfen, die grundlegenden Prinzipien zu verstehen.

Wie schon erwähnt, basiert der gravitative Slingshot darauf, dass man ein Objekt  $\mathring{A}$  in die Nähe eines Planeten  $P$  lenkt. Als ersten Schritt betrachten wir das System im Schwerpunktsystem von  $\mathring{A}$  und  $P$ <sup>2</sup>. Wir nehmen an, dass die Masse  $M$  von  $P$  viel größer ist als die Masse  $m$  von  $\mathring{A}$ . Daher können wir in sehr guter Näherung annehmen, dass der Schwerpunkt mit dem Zentrum von  $P$  zusammenfällt und dass die relative Masse  $\mu$  gleich der Masse  $m$  ist. Die Gesamtenergie von  $\mathring{A}$  ist positiv<sup>3</sup>, ansonsten würde  $\mathring{A}$  in einen gebundenen Orbit um  $P$  eintreten. Daher folgt  $\mathring{A}$  einem hyperbolischen Orbit um  $P$ <sup>4</sup> und somit ist die Exzentrizität  $\epsilon > 1$ . Weit entfernt von  $P$  hat das Objekt  $\mathring{A}$  in guter Näherung nur kinetische Energie und folgt einer Geraden. Die minimale Distanz zwischen  $P$  und dieser Gerade wird oft als Stoßparameter bezeichnet. Es sei  $\vec{v}_{pi}$  und  $\vec{v}_{pf}$  die Anfangs- bzw. Endgeschwindigkeit von  $\mathring{A}$  weit weg von  $P$  im Bezug auf das Schwerpunktsystem.

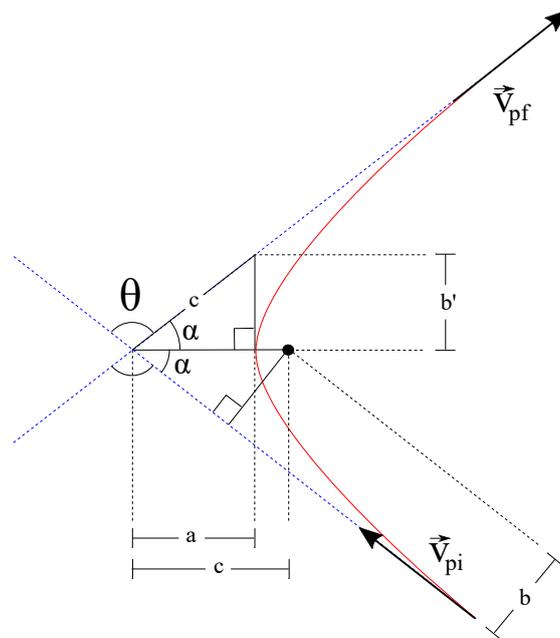
- a) Zeigen Sie, dass die Anfangsgeschwindigkeit  $v_{pi} = \|\vec{v}_{pi}\|$  gleich der Endgeschwindigkeit  $v_{pf} = \|\vec{v}_{pf}\|$  ist. **(1 Punkte)**

<sup>1</sup>Obwohl sie Diktatoren werden wollen (wie man an ihren Augenbrauen sehen kann), sind sie immer noch Diktator-Praktikanten und können sich so leider keine Rakete leisten.

<sup>2</sup>Wir ignorieren dabei den Einfluss der Sonne.

<sup>3</sup>Wir benutzen die übliche Konvention, dass die potentielle Energie im Unendlichen Null ist.

<sup>4</sup>Streng genommen wäre eine verschwindende Energie auch erlaubt, was einem parabolischen Orbit (also  $\epsilon = 1$ ) entsprechen würde. Wir ignorieren diesen Spezialfall hier.



**Abbildung 1:** Die horizontale Achse entspricht der Symmetrieachse der Hyperbel (in rot). Die gepunkteten blauen Linien stellen die Asymptoten der Hyperbel dar, denen das Objekt  $\dot{A}$  weit weg von P näherungsweise folgt. Durch die geometrischen Eigenschaften der Hyperbel sind zwei der eingezeichnete Abstände gleich mit Wert  $c$ . Dies kann benutzt werden um zu zeigen, dass  $b' = b$  gilt.

- b) Drücken Sie die Gesamtenergie  $E$  und den Drehimpuls  $L$  im Schwerpunktsystem durch die Masse  $m$ , die Anfangsgeschwindigkeit  $v_{pi}$  und den Stoßparameter  $b$  aus. **(2 Punkte)**
- c) Benutzen Sie einfache geometrische Argumente um zu zeigen, dass die Länge  $b'$ , wie in Abb. 1 gezeigt, gleich dem Stoßparameter  $b$  ist. **(2 Punkte)**
- d) Der Streuwinkel  $\theta$  ist als Winkel zwischen der Anfangs- und Endgeschwindigkeit definiert (d.h. es gilt  $\vec{v}_{pi} \cdot \vec{v}_{pf} = v_{pi}v_{pf} \cos \theta$ ). Leiten Sie den Streuwinkel  $\theta$  als Funktion von  $m$ ,  $v_0$  und  $b$  her.  
**Hinweis:** Die Exzentrizität  $\epsilon$  des Orbits ist als Verhältnis zweier charakteristischer Längen gegeben:  $\epsilon = \frac{c}{a}$  (siehe Abb. 1). Zeigen Sie damit, dass  $\epsilon = \sqrt{1 + \tan^2 \alpha}$ . Als Nächstes benutzen Sie die bekannte Relation zwischen  $\epsilon$  und  $L$ ,  $E$  und  $m$ , sowie Aufgabe b) um einen Ausdruck für den Streuwinkel  $\theta$  zu finden. **(3 Punkte)**
- e) Unser Ziel ist die Berechnung der Differenz zwischen den kinetischen Energien  $E_{kin,i}$  und  $E_{kin,f}$  des Objekts  $\dot{A}$  am Anfang und am Ende im Bezugssystem der Sonne. Sei  $\vec{v}_P$  die Geschwindigkeit des Planeten in diesem. Zeigen Sie, dass

$$E_{kin,f} - E_{kin,i} = m(\vec{v}_{pf} - \vec{v}_{pi}) \cdot \vec{v}_P.$$

**Hinweis:** Seien  $\vec{v}_{si}$  und  $\vec{v}_{sf}$  die Anfangs- und Endgeschwindigkeit von  $\dot{A}$  im Bezugssystem der Sonne. Was ist die Beziehung zwischen  $\vec{v}_{si}$  und  $\vec{v}_{sf}$  sowie  $\vec{v}_{pi}$  und  $\vec{v}_{pf}$ ? Was ist jene zwischen  $E_{kin,i}$  und  $E_{kin,f}$  sowie  $\vec{v}_{si}$  und  $\vec{v}_{sf}$ ? Benutzen Sie die Ergebnisse von a). **(2 Punkte)**

- f) Um die Funktionsweise des gravitativen Slingshots zu demonstrieren, betrachten wir den Spezialfall, dass die Anfangsgeschwindigkeit  $\vec{v}_{si}$  von  $\dot{A}$  im Bezugssystem der Sonne antiparallel zu  $\vec{v}_P$  ist. Es gilt also  $\vec{v}_{si} = -s\vec{v}_P$  für  $s > 0$ . Zeigen Sie, dass

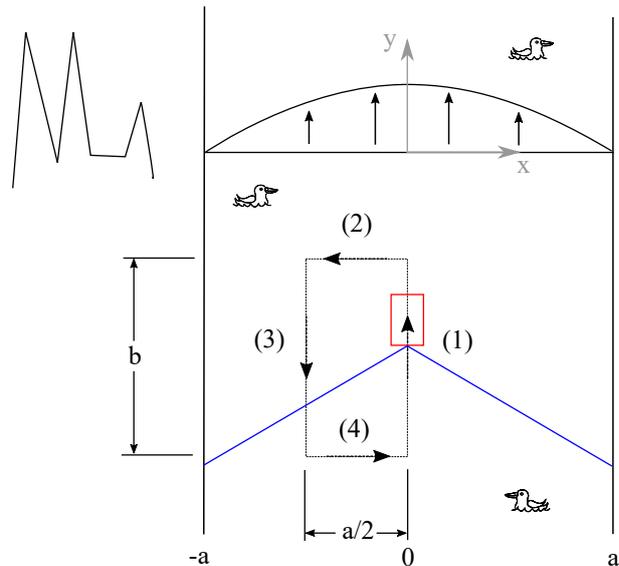
$$E_{kin,f} - E_{kin,i} = m(1 + s)\|\vec{v}_P\|^2(1 - \cos \theta),$$

wobei  $\theta$  der Streuwinkel aus d) ist. Was impliziert das für die Beziehung zwischen  $E_{kin,f}$  und  $E_{kin,i}$ ? Wo kommt die Energie her? **(3 Punkte)**

## 2 Kahn auf einem Fluss

Stellen Sie sich vor, dass Sie einen Kahn auf einem Fluss steuern, der mit zwei langen Seilen an den beiden Ufern festgemacht ist. Indem Sie an den Seilen ziehen, können Sie den Kahn auf dem Fluss bewegen. Der Strom des Flusses übt eine Kraft  $\vec{F} = q\vec{v}$  auf den Kahn aus, wobei  $\vec{v}$  die Fließgeschwindigkeit des Flusses und  $q > 0$  eine Konstante ist.

Wenn der Kahn sehr langsam gezogen wird, dann können wir annehmen, dass die Kraft direkt auf die Maschinen übertragen wird, die die Seile ziehen. Wir nehmen an, dass das Geschwindigkeitsprofil des Stromes durch  $\vec{v} = v_0(1 - \frac{x^2}{a^2})\hat{y}$  für  $-a \leq x \leq a$  und  $v_0 > 0$  gegeben ist. Hierbei befinden sich bei  $x = -a$  und  $x = a$  die beiden Ufer des Flusses und  $\hat{y}$  ist der Einheitsvektor in  $y$ -Richtung. Das Koordinatensystem ist also so ausgerichtet, dass die  $y$ -Achse flussabwärts zeigt und die  $x$ -Achse senkrecht zum Fluss steht, mit  $x = 0$  in der Mitte des Flusses.



**Abbildung 2:** Ein Kahn (rot) ist mit zwei langen, an den Ufern fixierten, Seilen (blau) verbunden und wird entlang der eingezeichneten Kurve bewegt.

Nehmen wir weiterhin an, dass wir den Kahn entlang einer geschlossenen Kurve  $C$  wie in Abb. 2 bewegen wollen. Der Weg besteht aus vier Geradensegmenten, die durch folgende Punkte beschrieben werden:  $(x, y) = (0, 0) \rightarrow (0, b) \rightarrow (-a/2, b) \rightarrow (-a/2, 0) \rightarrow (0, 0)$  mit  $a, b > 0$ .

- a) Berechnen Sie die Rotation  $\vec{\nabla} \times \vec{F}$  in kartesischen Koordinaten. Ist das Kraftfeld konservativ oder nicht? Betrachten Sie das Kraftfeld als unabhängig von  $z$ . **(2 Punkte)**
- b) Berechnen Sie die Energie, die Sie aufbringen müssen oder die frei wird, wenn Sie den Kahn entlang des Weges  $C$  bewegen, indem Sie das entsprechende Linienintegral der Kraft, die auf den Kahn ausgeübt wird, auswerten. Woher kommt diese Energie? **(3 Punkte)**
- c) Bestätigen Sie das Ergebnis von (b), indem Sie den Satz von Stokes benutzen.

**Hint:** Der Satz von Stokes besagt, dass  $\oint_C \vec{F} \cdot d\vec{r} = \int_S (\vec{\nabla} \times \vec{F}) \cdot d\vec{A}$ , wobei auf der rechten Seite das Oberflächenintegral über eine Fläche  $S$  steht, die die Kurve  $C$  einschließt<sup>5</sup>. Beachten Sie, dass die Orientierung der Kurve  $C$  und der Fläche  $S$  der rechten-Hand-Regel folgen müssen.

**(3 Punkte)**

<sup>5</sup>D.h.  $C = \partial S$ .