Klassische Mechanik

David Gross, Johan Åberg, Markus Heinrich

Übungsblatt 2 **Abgabe: 9. November um 12 Uhr**

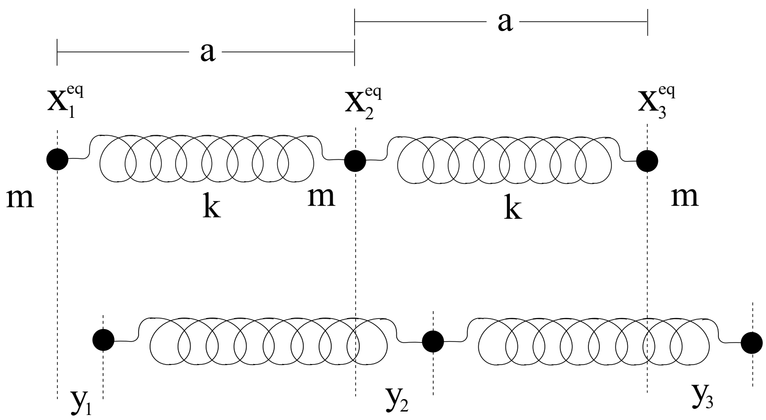
1 Der Laplace-Runge-Lenz-Vektor

Sie haben inzwischen die Erhaltungsgröße Energie, Impuls und Drehimpuls kennen gelernt. Manche Systeme können aber auch "exotischere" Erhaltungsgrößen besitzen. Als solches entpuppt sich auch das Kepler-Problem, also die Bewegung eines Teilchens in einem Potential der Form $V(\vec{r}) = -\alpha/r$ mit $r = \|\vec{r}\|$ und einer Konstanten α. Wie in jedem zentralsymmetrischen Potential ist die Gesamtenergie und der Drehimpuls im Bezug auf das Potentialzentrum erhalten. Darüber hinaus finden wir aber noch eine weitere, "zufällige" Erhaltungsgröße, nämlich den sogenannten Laplace-Runge-Lenz-Vektor, der wie folgt definiert ist:

$$\vec{A} = \vec{p} \times \vec{L} - m\alpha \frac{\vec{r}}{r}.$$

Zeigen Sie, dass $\vec{A}$ erhalten ist, d.h. $\frac{d\vec{A}}{dt} = 0$.
Hinweis: Benutzen Sie, dass $\vec{L}$ erhalten ist und verwenden Sie die Relation $\vec{a} \times (\vec{b} \times \vec{c}) = \vec{b}(\vec{a} \cdot \vec{c}) - \vec{c}(\vec{a} \cdot \vec{b})$. Zeigen Sie, dass $\vec{r} \cdot \frac{d\vec{r}}{dt} = r\frac{dr}{dt}$. **(4 Punkte)**

2 Normalmoden



Die Bewegung von Teilchen, die harmonisch wechselwirken, kann in besonders einfache Komponenten zerlegt werden, den sogenannten *Normalmoden*. Diese Moden entsprechen einer kollektiven periodischen Bewegung aller Teilchen mit einer gemeinsamen Frequenz.

Als Beispiel betrachten wir ein Modell eines linearen Moleküls, das aus drei Atomen der Masse m besteht, die entsprechend dem folgendenen Potential wechselwirken:

$$V(x_1, x_2, x_3) = \frac{k}{2}(x_2 - x_1 - a)^2 + \frac{k}{2}(x_3 - x_2 - a)^2,$$

wobei $k > 0$ und $a > 0$. Der Einfachheit halber nehmen wir an, dass sich die Teilchen nur entlang der Achse des Moleküls bewegen können.

Das Molekül befindet sich in mechanischem Gleichgewicht, wenn die Positionen der Atome $x_1 = x_1^{\mathrm{eq}}$, $x_2 = x_2^{\mathrm{eq}}$ und $x_3 = x_3^{\mathrm{eq}}$ die Relationen $x_2^{\mathrm{eq}} - x_1^{\mathrm{eq}} = a$ und $x_3^{\mathrm{eq}} - x_2^{\mathrm{eq}} = a$ erfüllen. Es ist vorteilhaft neue Koordinaten $y_1 = x_1 - x_1^{\mathrm{eq}}$, $y_2 = x_2 - x_2^{\mathrm{eq}}$ und $y_3 = x_3 - x_3^{\mathrm{eq}}$ einzuführen, die die *Auslenkung* aus der Gleichgewichtsposition messen. Das Potential in den neuen Koordinaten lautet:

$$V(y_1, y_2, y_3) = \frac{k}{2}(y_2 - y_1)^2 + \frac{k}{2}(y_3 - y_2)^2 = \frac{1}{2}\vec{y}^t \boldsymbol{V}\vec{y}, \quad \vec{y} = \begin{bmatrix} y_1 \\ y_2 \\ y_3 \end{bmatrix}, \tag{1}$$

wobei $\boldsymbol{V}$ eine 3×3 Matrix ist und t die Transposition bezeichnet, d.h. $\vec{y}^t = [y_1, y_2, y_3]$. Weiterhin gilt $\ddot{y}_1 = \ddot{x}_1$, $\ddot{y}_2 = \ddot{x}_2$ und $\ddot{y}_2 = \ddot{x}_3$.

a) Bevor wie das Molekül behandeln, wollen wir uns anschauen, wie man im Allgemeinen Normalmoden berechnet. Wir betrachten die Funktion

$$U(y_1, y_2, \dots, y_N) = \frac{1}{2}\vec{y}^t \boldsymbol{U}\vec{y}, \quad \vec{y} = \begin{bmatrix} y_1 \\ y_2 \\ \vdots \\ y_N \end{bmatrix}, \tag{2}$$

wobei $\boldsymbol{U}$ eine beliebige $N \times N$ Matrix ist. *Zeigen Sie, dass man immer eine symmetrische Matrix $\boldsymbol{U}'$ finden kann, so dass $U(y_1, y_2, \dots, y_N) = \frac{1}{2}\vec{y}^t \boldsymbol{U}'\vec{y}$.*

Hinweis: Eine Matrix $\boldsymbol{U}'$ ist symmetrisch, falls $\boldsymbol{U}'_{kl} = \boldsymbol{U}'_{lk}$. **(1 Punkte)**

b) Nehmen Sie an, dass die Funktion U in Gl. (2) das Potential einer Menge von Teilchen der Masse m darstellt. *Zeigen Sie, dass die Bewegungsgleichung wie folgt geschrieben werden kann:*

$$m\frac{d^2}{dt^2}\vec{y} = -\boldsymbol{U}\vec{y}. \tag{3}$$

(1 Punkte)

c) Um Normalmoden zu finden, machen wir denn Ansatz $\vec{y}(t) = e^{i\omega t}\vec{q}$, wobei $\vec{q}$ ein zeitunabhängiger Vektor und ω eine reelle Zahl ist. *Zeigen Sie, dass dieser Ansatz zu einem Eigenwertproblem führt. Was sind die erlaubten Frequenzen ω für einen gegebenen Eigenwert? Geben Sie die entsprechenden Lösungen zu Gl. (3) an. Wie kann man diese kombinieren um sicherzustellen, dass die resultierende Funktion reellwertig ist (und daher eine tatsächliche physikalische Bewegung beschreibt)?*

Hinweis: Sie können verwenden, dass wenn $\boldsymbol{U}$ von einem harmonischen Potential stammt, die Eigenwerte von $\boldsymbol{U}$ immer reell und nichtnegativ sind (da $\boldsymbol{U}$ positiv semidefinit ist).

(3 Punkte)

d) Im Fall, dass $\vec{q}$ ein Eigenvektor zum Eigenwert 0 ist, gibt es noch eine weitere Lösung, die nicht von der Form des Ansatzes aus c) ist. Stattdessen verwenden wir einen Ansatz der Form $\vec{y} = f(t)\vec{q}$ für Gl. (3). *Zeigen Sie, dass dies zu einer Differentialgleichung für f führt. Was ist die allgemeine Lösung? Geben Sie die entsprechenden Lösungen für Gl. (3) an.* **(2 Punkte)**

e) Nach diesen allgemeinen Überlegungen kommen wir nun zu dem linearen Molekül mit Potential V zurück. *Bestimmen Sie die Matrix $\boldsymbol{V}$ in Gl. (1).* **(2 Punkte)**

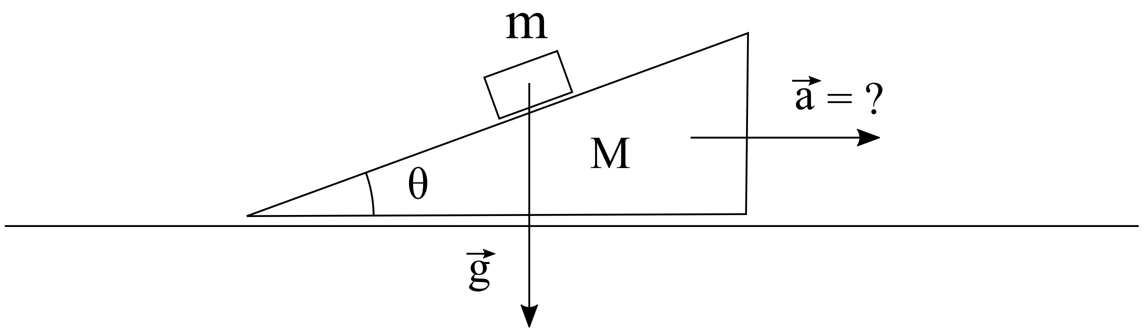
f) *Berechen Sie Eigenwerte und -vektoren der Matrix $\boldsymbol{V}$ aus e).* **(3 Punkte)**

g) *Skizzieren Sie die Bewegung der Normalmoden des linearen Moleküls. Welcher Art von Bewegung entspricht der Eigenwert 0? Mit welchem Erhaltungssatz steht dieser in Verbindung?* **(2 Punkte)**

h) *Drücken Sie die allgemeine Lösung der Bewegungsgleichung des linearen Moleküls durch seine Normalmoden aus. Stellen Sie sicher, dass die angegebenen Funktionen reellwertig sind.* **(2 Punkte)**

3 A pointless challenge

Diese etwas anspruchsvolle Aufgabe gibt keinerlei Punkte. Wenn Sie jedoch eine vernünftige Lösung abgeben, erhalten Sie einen goldenen Stern auf Ihrem Übungsblatt![1]

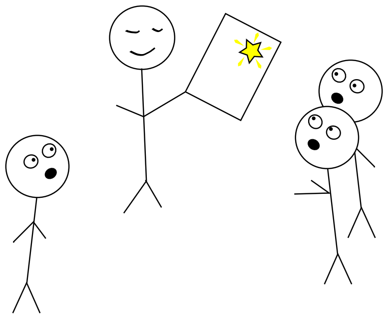


Ein Keil der Masse M könne reibungslos auf dem Boden gleiten. Auf dem Keil befinde sich ein Block der Masse m, der ebenfalls reibungslos gleiten könne. Stellen Sie sich vor, Sie hielten beide in Ruhe und ließen diese dann plötzlich los. Auf den Block wirken die Gravitations- und die Normalkraft des Keiles (der Boden übt ebenfalls eine Normalkraft auf den Keil aus, um ihn auf der Oberfläche zu halten).

Benutzen Sie die Kräfte und das zweite Newtonsche Gesetz um die Beschleunigung des Keiles a zu bestimmen.

(0 Punkte, aber einen goldenen Stern!)

Hinweis: Bestimmen Sie die Kräfte, die auf den Keil wirken, und benutzen Sie das zweite Newtonsche Gesetz. Beachten Sie, dass der Keil eine Normalkraft auf den Block ausübt. Was sagt das dritte Newtonsche Gesetz über die Kraft, die der Block auf den Keil ausübt? Bestimmen Sie danach die Kräft, die auf den Block wirken, und benutzen Sie wiederum das zweite Newtonsche Gesetz um eine Beziehung zwischen den Kräften zu bekommen. Welche Art von Beschleunigung des Blockes ist damit vereinbar, dass der Block entlang der Oberfläche des Keiles gleitet? Sie erhalten schließlich ein Gleichungssystem, das es zu lösen gilt.



[1] Wen interessieren denn doofe Punkte, wenn man einen goldenen Stern bekommen kann?!? Stellen Sie sich nur mal vor, wie Sie damit in den Kneipen in der Zülpicher Straße angeben können!