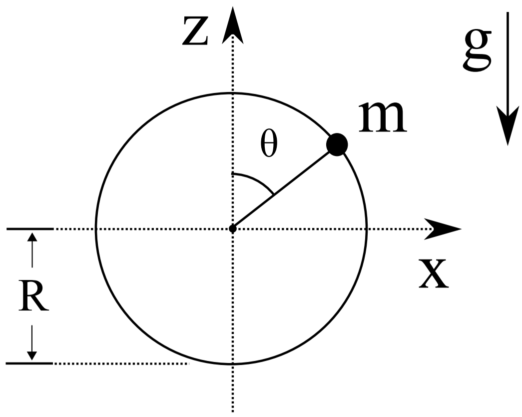
Klassische Mechanik

David Gross, Johan Åberg, Markus Heinrich

**Übungsblatt 8** **Abgabe: 7. Dezember um 12 Uhr**

## 1 Zwangskräfte: Der idealisierte Fall




In Aufgabe 2 werden wir Zwangskräfte analysieren, dafür betrachten wir als Vorbereitung hier den idealisierten Fall. Wir betrachten eine Perle der Masse $m$, die reibungslos auf einem vertikal orientierten Ring gleiten könne. Die Masse $m$ unterliege einer konstanten Gravitationsbeschleunigung $g$.

**a)** *Leiten Sie die Lagrangefunktion als Funktion des Winkels $\theta$ her und bestimmen Sie die zughörigen Euler-Lagrange-Gleichungen.*

**(2 Punkte)**

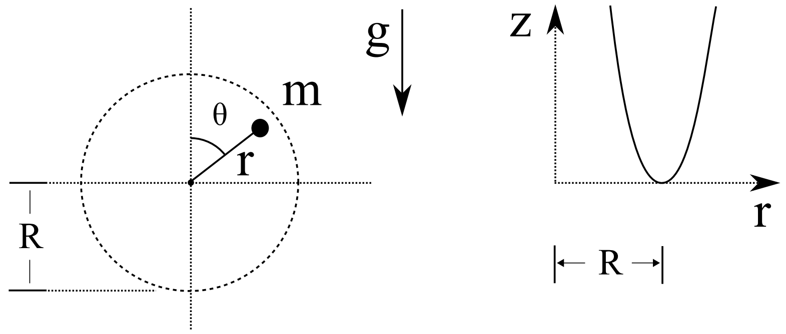
**b)** Nehmen Sie nun an, dass die Perle zu einem gegebenen Zeitpunkt einen Winkel $\theta$ einschließt und die Winkelgeschwindigkeit $\dot{\theta}$ hat. Um die Perle bei einem konstanten Radius $R$ zu halten, muss der Ring eine Normalkraft $\vec{F}_N = F_N \hat{r}$ aufwenden, wobei $\hat{r}$ der Einheitsvektor in Radialrichtung ist. *Zeigen Sie, dass*

$$F_N = mg\cos\theta - mR\dot{\theta}^2. \tag{1}$$

**Hinweis:** Hier benötigen wir wieder etwas Newtonsche Mechanik. Auf die Perle wirkt die Gravitations- und Normalkraft. Um auf dem Ring zu bleiben, muss auf die Perle eine entsprechende Zentripetalkraft wirken. Diese bestimmt die radiale Komponente der Gesamtkraft, die auf die Perle wirkt.

**(2 Punkte)**

## 2 Bestimmung von Zwangskräften




In der letzten Aufgabe haben wir es als gegeben hingenommen, dass Zwangskräfte existieren, die die Perle exakt bei dem richtigen Radius $R$ auf dem Ring halten. Man kann sich schnell klar machen, dass das nur eine Idealisierung ist. Stattdessen übt der Ring eher eine Rückstellkraft auf die Perle aus, sobald diese nur etwas vom korrekten Radius abweicht. Im Folgenden wollen wir daher die perfekte Zwangsbedingung durch ein Potential ersetzen. Wir werden sehen, dass wir den idealen Fall für sehr steile Potentiale erhalten.

Wie in Aufgabe 1 betrachten wir eine Perle auf einem Ring, aber zusätzlich erlauben wir der Perle ihre radiale Koordinate $r$ zu ändern. Daher haben wir nun zwei Koordinaten $\theta$ und $r$. Darüber hinaus führen wir noch ein radiales Potential (zusätzlich zum Gravitationspotential) $V(r) = \frac{1}{2\epsilon}(r - R)^2$ mit $\epsilon > 0$ ein. Dies ist ein quadratisches Potential mit Minimum bei $r = R$, welches umso steiler wird, je kleiner $\epsilon$ ist.

Die Lösungen $\theta$ und $r$ der Euler-Lagrange-Gleichungen hängen nicht nur von der Zeit ab, sondern auch von dem Parameter $\epsilon$. Anschaulich scheint es vielleicht plausibel, dass für sehr kleine $\epsilon$ (und daher sehr steile Potentiale) näherungsweise $r(\epsilon, t) \approx R$ gilt und wir den idealen Fall aus Aufgabe 1 wiederfinden. Um dies im Detail zu sehen, benutzen wir einen üblichen Trick, nämlich eine Störungsrechnung.

**a)** *Leiten Sie die Lagrangefunktion des Systems her und zeigen Sie, dass die Euler-Lagrange-Gleichungen folgende Form haben:*

$$\begin{aligned} &mr^2\ddot{\theta} + 2mr\dot{r}\dot{\theta} - mgr\sin\theta = 0, \\ &m\ddot{r} - mr\dot{\theta}^2 + mg\cos\theta + \frac{1}{\epsilon}(r - R) = 0. \end{aligned} \tag{2}$$

**(3 Punkte)**

**b)** Als nächstes entwickeln wir $r$ und $\theta$ in einer Potenzreihe um $\epsilon = 0$,

$$\begin{aligned} \theta(\epsilon, t) =& \theta_0(t) + \epsilon\theta_1(t) + \epsilon^2\theta_2(t) + \cdots, \\ r(\epsilon, t) =& r_0(t) + \epsilon r_1(t) + \epsilon^2 r_2(t) + \cdots. \end{aligned}$$

*Setzen Sie diese Entwicklung in die Gleichungen (2) ein und fassen Sie für jede Gleichung Terme gleicher Ordnung in $\epsilon$ zusammen. Wir brauchen nur Terme der Ordnung $\frac{1}{\epsilon}$ und 1, Sie können also höhere Ordnungen ignorieren.*

**Hinweis:** Sie bekommen eine Gleichung für Ordnung $\frac{1}{\epsilon}$ und zwei für Ordnung 1.

**(3 Punkte)**

**c)** *Vereinfachen Sie die Gleichungen aus b) und vergleichen Sie das Ergebnis mit den Euler-Lagrange-Gleichungen aus Aufgabe 1 a).* Das radiale Potential führt zu einer Kraft $F(t) = -V'\big(r(t)\big)$. *Bestimmen Sie die Kraft für $r(t) \approx r_0(t) + \epsilon r_1(t)$ und vergleichen Sie mit Gl. (1).* **(2 Punkte)**

**Bemerkung:** Hier haben wir nur die niedrigsten Ordnung der Störung betrachtet. Um abzuschätzen, wie stark die Bewegung der Perle vom idealen Fall mit perfekten Zwangsbedingungen abweicht, muss man höhere Ordnungen in der Entwicklung (wie $\theta_1$ und $r_2$) mitnehmen. Leider sind die resultierenden Gleichungen nicht sehr angenehm.

## 3 Noether-Theorem, Symmetrien und Koordinatenwechsel

Nehmen Sie an, dass ein System durch folgende Lagrangefunktion beschrieben wird

$$L(\lambda, \mu, \dot{\lambda}, \dot{\mu}) = \frac{m}{2}(\lambda^2 + \mu^2)(\dot{\lambda}^2 + \dot{\mu}^2) - \alpha\lambda^2\mu^2, \tag{3}$$

wobei $\lambda$ und $\mu$ verallgemeinerte Koordinaten und $\alpha$ eine Konstante ist.

**a)** Betrachten Sie die Koordinatentransformation von $(\lambda, \mu)$ nach $(\lambda', \mu')$, wobei

$$\begin{aligned} \lambda' &= \lambda + sC_\lambda, \quad C_\lambda = \frac{1}{2}\frac{\lambda}{\lambda^2 + \mu^2}, \\ \mu' &= \mu + sC_\mu, \quad C_\mu = \frac{1}{2}\frac{-\mu}{\lambda^2 + \mu^2}, \end{aligned} \tag{4}$$

*Zeigen Sie, dass dies (in erster Ordnung in s) eine Symmetrietransformation von L aus Gl. (3) induziert.*

**Hinweis:** Wir müssen zeigen, dass in der Entwicklung von $L(\lambda', \mu', \dot{\lambda}', \dot{\mu}')$ um $s = 0$ der Term erster Ordnung verschwindet. In anderen Worten, $L(\lambda', \mu', \dot{\lambda}', \dot{\mu}') = L(\lambda, \mu, \dot{\lambda}, \dot{\mu}) + O(s^2)$. Dies ist äquivalent dazu, dass $\frac{d}{ds}L(\lambda', \mu', \dot{\lambda}', \dot{\mu}')\big|_{s=0} = 0$.

Wenn Sie Schwierigkeiten mit den Entwicklungen haben und dieses Problem nicht lösen können, so können Sie immer noch Problem b) und c) machen! **(3 Punkte)**

**b)** *Bestimmen Sie die Erhaltungsgröße, die zu der Transformation (4) gehört.* **(2 Punkte)**

**c)** Betrachten Sie nun das neue Koordinatensystem

$$\begin{aligned} x &= \lambda^2 - \mu^2, \\ y &= 2\lambda\mu. \end{aligned}$$

*Drücken Sie die Lagrangefunktion (3) durch die neuen Koordinaten x und y aus. Diese hat eine zyklische Koordinate. Wie verhält sich die zyklische Koordinate zu der Erhaltungsgröße aus b)?* **(3 Punkte)**