

Theoretische Physik in zwei Semestern I

Teil B: Elektrodynamik

Joachim Krug

Institut für Theoretische Physik, Universität zu Köln

E-mail: krug@thp.uni-koeln.de

Die Theorie des elektrischen und magnetischen Feldes ist die einfachste und vollkommenste Theorie eines Kontinuums. So darf man diese Theorie neben der allgemeinen Mechanik als das zweite abgeschlossene, sehr eindrucksvolle und durch die Einfachheit und Folgerichtigkeit seiner Beziehungen überzeugende Begriffs- und Beziehungssystem der Physik ansehen.

Friedrich Hund, Einführung in die theoretische Physik (1951)

1	Mathematische Grundlagen	3
1.1	Vektorfelder	3
1.2	Ableitungen von Vektorfeldern	3
1.2.1	Gradient.	4
1.2.2	Divergenz.	5
1.2.3	Rotation.	5
1.2.4	Höhere Ableitungen.	6
1.3	Integralsätze	7
1.4	Die δ -Funktion	8
1.4.1	Eindimensional.	9
1.4.2	Dreidimensional.	10
2	Elektrostatik	11
2.1	Das Coulomb-Gesetz	11
2.2	Das elektrische Feld	12
2.3	Das elektrostatische Potential	13
2.4	Die Feldgleichungen der Elektrostatik	13
2.5	Elektrostatische Energie	15
2.6	Multipol-Entwicklung	17
2.6.1	Herleitung.	17
2.6.2	Abhängigkeit von der Wahl des Koordinatensystems.	19
2.6.3	Punktdipol.	19

	2
2.7 Metallische Randbedingungen	20
3 Magnetostatik	23
3.1 Stationäre Ströme	24
3.2 Magnetfeld	25
3.3 Ladungserhaltung	26
3.4 Feldgleichungen und Vektorpotential	26
3.5 Ampère'sches Gesetz	28
3.6 Magnetischer Dipol	29
3.6.1 Dipolfeld.	30
3.6.2 Magnetischer Dipol im äusseren Feld.	31
3.6.3 Das gyromagnetische Verhältnis.	32
4 Die Maxwell'schen Gleichungen	33
4.1 Das Induktionsgesetz	33
4.2 Der Maxwell'sche Verschiebungsstrom	35
4.3 Energie des elektromagnetischen Feldes	36
4.4 Impuls des elektromagnetischen Feldes	38
4.5 Maxwell-Gleichungen für die Potentiale	39
4.6 Ebene elektromagnetische Wellen	41
4.7 Retardierte Potentiale und Dipolstrahlung	43
5 Spezielle Relativitätstheorie	45
5.1 Das Einstein'sche Relativitätsprinzip	45
5.2 Relativistische Kinematik	47
5.2.1 Relativität der Gleichzeitigkeit.	47
5.2.2 Zeitdilatation.	48
5.2.3 Längenkontraktion.	49
5.3 Die Lorentz-Transformation	49
5.4 Die Geometrie der Raum-Zeit	51
5.4.1 Minkowski-Abstand.	51
5.4.2 Lichtkegel.	52
5.4.3 Eigenzeit.	54
5.5 Relativistische Dynamik	57
5.5.1 Vierervektoren.	57
5.5.2 Relativistischer Impuls und relativistische Energie.	57
5.5.3 Kräfte.	59
5.6 Relativistische Struktur der Elektrodynamik	60

1. Mathematische Grundlagen

Zur Vorbereitung fassen wir in diesem ersten Kapitel die wichtigsten mathematischen Konzepte zusammen, mit denen wir in der Elektrodynamik immer wieder umgehen werden.

1.1. Vektorfelder

Wir erinnern zunächst an die verschiedenen Arten von Funktionen, die uns bisher begegnet sind:

- Funktionen einer Variablen $f(x)$.
- Skalare Funktionen mehrerer Variablen $F(x_1, x_2, \dots, x_n)$, z.B. die Lagrange- oder Hamilton-Funktionen der Mechanik.
- *Vektorwertige* Funktionen einer Variablen, z.B. die Bahnkurve $\vec{r}(t) = (x(t), y(t), z(t))$ eines Teilchens, seine Geschwindigkeit $\dot{\vec{r}}$ oder Beschleunigung $\ddot{\vec{r}}$.
- *Vektorfelder*, also vektorwertige Funktionen des Ortes[‡] \vec{r} :

$$\vec{V} : \vec{r} \in \mathbb{R}^3 \rightarrow \vec{V}(\vec{r}) \in \mathbb{R}^3$$

mit Komponenten $\vec{V} = (V_x, V_y, V_z)$.

Vektorfelder sind die zentralen mathematischen Objekte in der Elektrodynamik. Anschaulich stelle man sich vor, dass an jedem Punkt des Raumes ein Vektorpfeil “angeheftet” wird. Bei differenzierbaren Vektorfeldern kann man sich die Pfeile durch *Feldlinien* verbunden denken (Abb. 1).

1.2. Ableitungen von Vektorfeldern

Wir fragen jetzt, wie sich die räumliche Veränderung eines Vektorfeldes quantifizieren lässt. Die drei partiellen Ableitungen der drei Komponenten V_x, V_y, V_z des Vektorfeldes bilden zunächst eine 3×3 -Matrix, die alle Informationen über die Veränderung von \vec{V} enthält. In der Anwendung kommen diese partiellen Ableitungen aber meist in bestimmten Kombinationen vor, die wir im folgenden darstellen. Ein nützliches Instrument ist dabei der *Nabla-Operator*[§]

$$\nabla = \left(\frac{\partial}{\partial x}, \frac{\partial}{\partial y}, \frac{\partial}{\partial z} \right),$$

der als Vektor der partiellen Ableitungen auf skalare Funktionen und Vektorfelder angewandt wird. Dabei entstehen die folgenden Differentialoperationen:

[‡] Die Felder sind in der Elektrodynamik i.a. auch Funktionen der Zeit, diese Abhängigkeit wird aber in diesem Kapitel unterdrückt.

[§] Zum Ursprung dieses Namens s. <http://de.wikipedia.org/wiki/Nabla>.

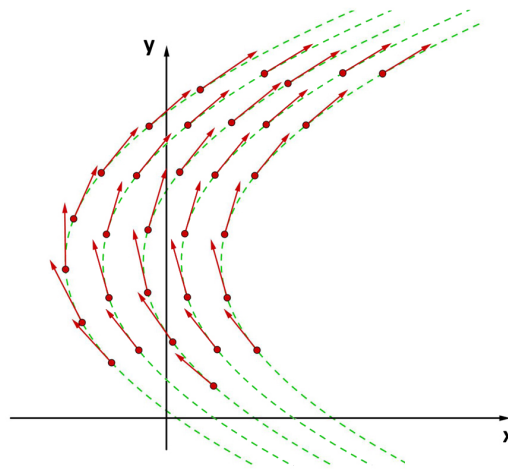


Abbildung 1. Vektorfeld und Feldlinien.

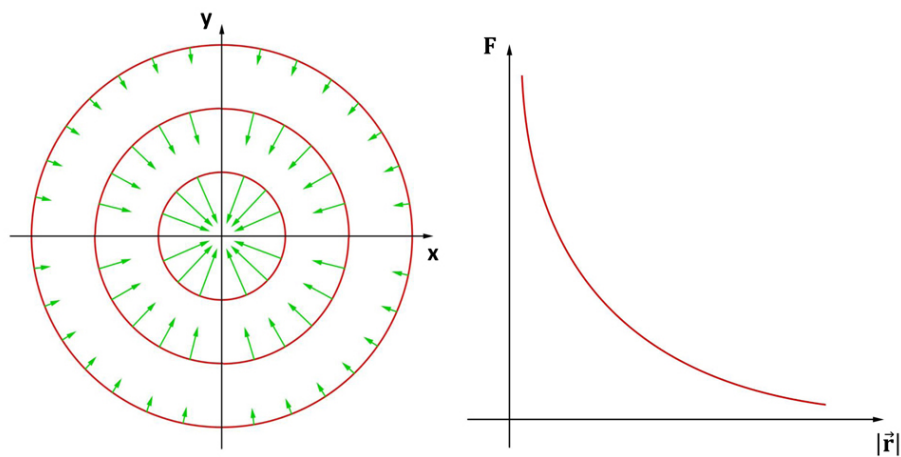


Abbildung 2. Gradientenfeld (links) einer radialsymmetrischen Funktion F (rechts). Der Gradient steht senkrecht auf den Flächen konstanten F 's, die in diesem Fall Kugelschalen sind. Die Funktion F ist monoton fallend, entsprechend zeigt der Gradient in Richtung des Ursprungs.

1.2.1. *Gradient.* Die Anwendung von ∇ auf eine skalare Funktion $F(\vec{r})$ des Ortes ergibt das Vektorfeld

$$\nabla F(\vec{r}) = \left(\frac{\partial F}{\partial x}, \frac{\partial F}{\partial y}, \frac{\partial F}{\partial z} \right) \equiv \text{grad}F.$$

Das Vektorfeld ∇F steht senkrecht auf den Flächen, auf denen F konstant ist, und zeigt in die Richtung, in der F am stärksten zunimmt (Abb. 2 und 3). Als Beispiel betrachten wir

$$F(\vec{r}) = |\vec{r}|^2 = x^2 + y^2 + z^2 \Rightarrow \nabla F = 2\vec{r}.$$

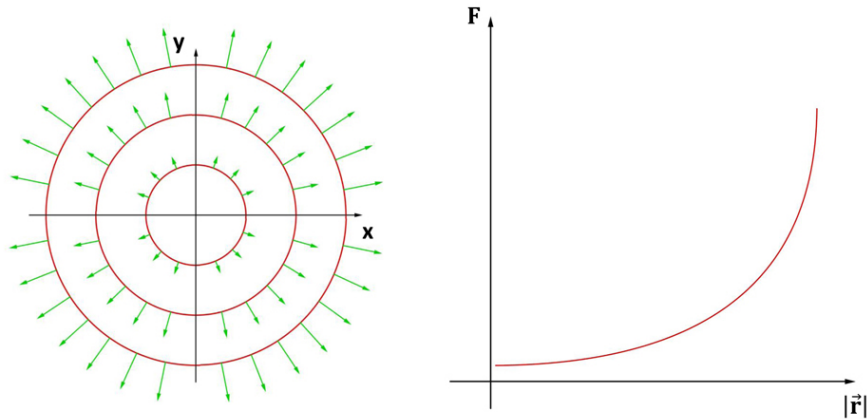


Abbildung 3. Wie Abb. 2 mit einer monoton steigenden radialsymmetrischen Funktion F . Der Gradient zeigt vom Ursprung nach außen.

Die Flächen konstanten F 's sind Kugelschalen, und ∇F zeigt radial nach aussen (Abb. 3).

1.2.2. *Divergenz.* “Skalare Multiplikation” von ∇ mit einem Vektorfeld ergibt die skalare Funktion

$$\nabla \cdot \vec{V}(\vec{r}) = \frac{\partial V_x}{\partial x} + \frac{\partial V_y}{\partial y} + \frac{\partial V_z}{\partial z} \equiv \text{div} \vec{V}.$$

Die Divergenz $\nabla \cdot \vec{V}$ heisst auch *Quellstärke* des Vektorfeldes und beschreibt das Auseinanderlaufen (für $\nabla \cdot \vec{V} > 0$) bzw. Zusammenlaufen (für $\nabla \cdot \vec{V} < 0$) der Feldlinien. Als Beispiel betrachten wir

$$\vec{V}(\vec{r}) = a\vec{r} \Rightarrow \nabla \cdot \vec{V} = 3a,$$

d.h. die Divergenz ist positiv für $a > 0$, negativ für $a < 0$.

1.2.3. *Rotation.* Nun bilden wir das Vektorprodukt von ∇ mit einem Vektorfeld \vec{V} . Dadurch entsteht das Vektorfeld

$$\nabla \times \vec{V}(\vec{r}) = \left(\frac{\partial V_z}{\partial y} - \frac{\partial V_y}{\partial z}, \frac{\partial V_x}{\partial z} - \frac{\partial V_z}{\partial x}, \frac{\partial V_y}{\partial x} - \frac{\partial V_x}{\partial y} \right) \equiv \text{rot} \vec{V},$$

die Rotation oder *Wirbelstärke* von \vec{V} . Ein einfaches Beispiel für ein Vektorfeld mit (konstanter) Rotation ist

$$\vec{V} = (-y, x, 0) \Rightarrow \nabla \times \vec{V} = (0, 0, 2) = 2\vec{e}_z. \quad (1.1)$$

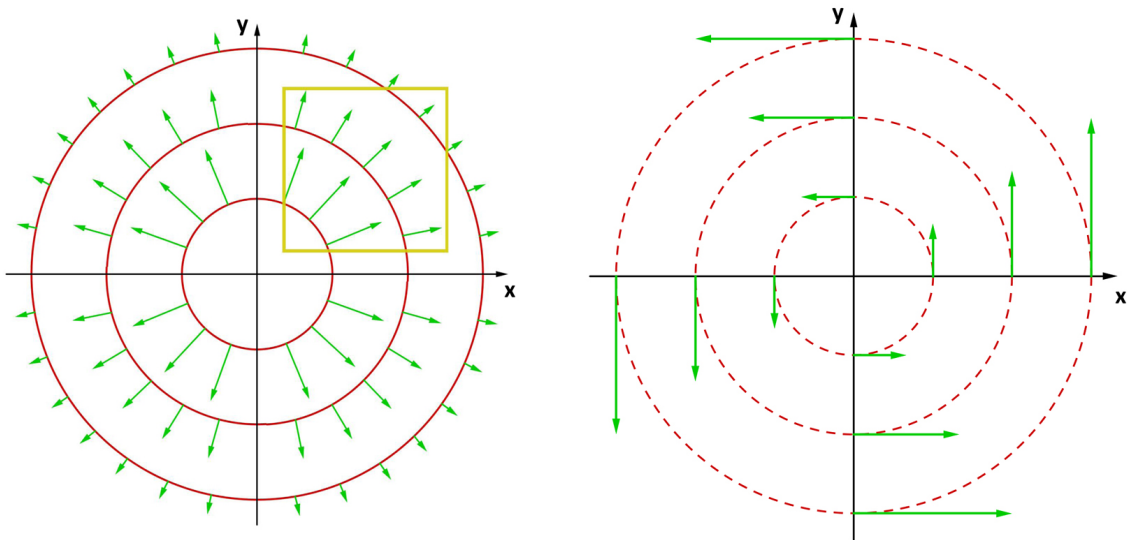


Abbildung 4. Links: Illustration eines radialsymmetrischen Vektorfelds, dessen Betrag mit zunehmendem Radius abnimmt. Je nach funktionaler Form des Abfalls ist die Divergenz positiv oder negativ. Im Spezialfall des Coulomb-Feldes $\vec{V} \sim \frac{\vec{r}}{|\vec{r}|^3}$ ist die Divergenz außerhalb des Ursprungs identisch Null [Gleichung (1.14)]. Nach dem Satz von Gauß bedeutet das, daß für jedes Teilvolumen (z.B. den gelb eingezeichneten Kasten) der einlaufende Fluß des Vektorfeldes gleich dem auslaufenden Fluß ist. Rechts: Illustration des Vektorfeldes (1.1).

1.2.4. *Höhere Ableitungen.* Der ∇ -Operator kann auch mehrfach angewandt werden. Dabei ist stets darauf zu achten, ob die auftretenden Größen Skalare oder Vektoren (oder weder noch) sind. Wir diskutieren die wichtigsten Beispiele:

- Für eine skalare Funktion F können wir die Divergenz des Gradienten bilden,

$$\nabla \cdot \nabla F = \nabla \cdot \left(\frac{\partial F}{\partial x}, \frac{\partial F}{\partial y}, \frac{\partial F}{\partial z} \right) = \frac{\partial^2 F}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 F}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 F}{\partial z^2} \equiv \nabla^2 F. \quad (1.2)$$

∇^2 ist der *Laplace-Operator*, der in der Literatur auch oft mit Δ bezeichnet wird.

- Andererseits gilt (wie Sie in den Übungen nachrechnen) für jede Funktion F die Beziehung||

$$\nabla \times \nabla F \equiv 0 \quad (1.3)$$

und für jedes Vektorfeld \vec{V}

$$\nabla \cdot (\nabla \times \vec{V}) \equiv 0. \quad (1.4)$$

Unter schwachen Zusatzvoraussetzungen lassen sich die Beziehungen (1.3) und (1.4) im folgenden Sinne umkehren:

$$\nabla \times \vec{V} = 0 \Rightarrow \exists \text{ skalare Funktion } F \text{ sodass } \vec{V} = \nabla F \quad (1.5)$$

$$\nabla \cdot \vec{V} = 0 \Rightarrow \exists \text{ Vektorfeld } \vec{W} \text{ sodass } \vec{V} = \nabla \times \vec{W} \quad (1.6)$$

|| Hier heisst “ $\equiv 0$ ” dass die Funktion identisch, also überall, verschwindet.

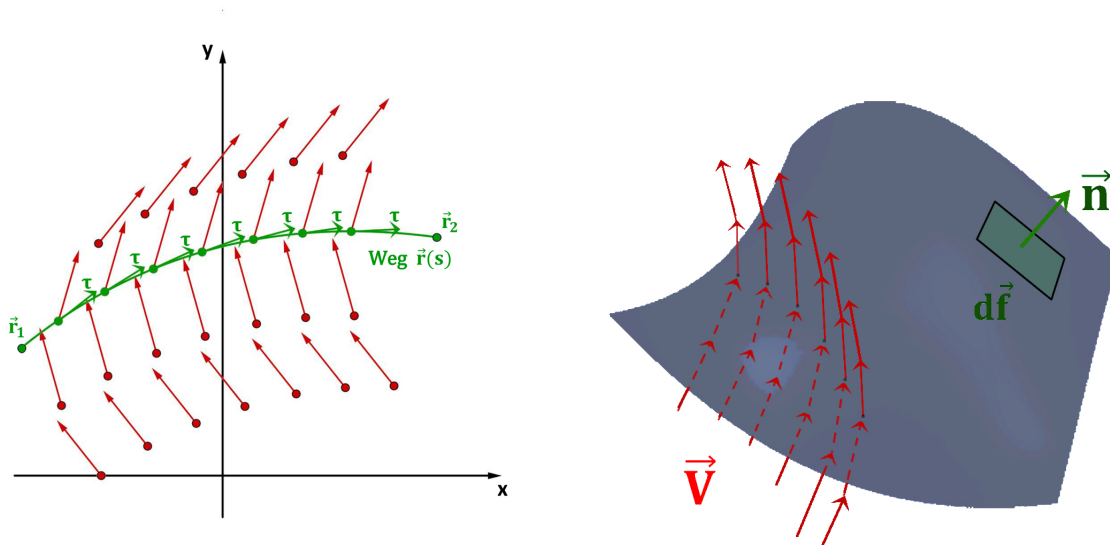


Abbildung 5. Links: Illustration des Wegintegrals über ein Vektorfeld (rot). An jedem Punkt des Weges $\vec{r}(s)$ wird das Vektorfeld skalar multipliziert mit dem Tangentialvektor $\vec{\tau}$. Rechts: Illustration des Flusses eines Vektorfeldes durch eine Fläche. An jedem Punkt der Fläche wird das Vektorfeld skalar multipliziert mit dem Normalenvektor \vec{n} .

1.3. Integralsätze

Die Integralsätze der Vektoranalysis verallgemeinern gewissermassen den Fundamentalsatz der Differential- und Integralrechnung

$$\int_a^b dx \frac{df}{dx} = f(b) - f(a) \quad (1.7)$$

von Funktionen $f(x)$ auf Vektorfelder. Es treten in diesem Zusammenhang drei Arten von Integralen auf:

- (i) *Wegintegral eines Vektorfeldes* (Abb. 5 links). Wir betrachten einen durch die Bogenlänge s parametrisierten Weg

$$\mathcal{C} = \{\vec{r}(s) : s_1 \leq s \leq s_2\}$$

zwischen den Punkten $\vec{r}(s_1)$ und $\vec{r}(s_2)$. Das Wegintegral eines Vektorfeldes \vec{V} entlang dieses Weges ist definiert durch

$$\int_{\mathcal{C}} d\vec{\ell} \cdot \vec{V} \equiv \int_{s_1}^{s_2} ds \frac{d\vec{r}}{ds} \cdot \vec{V}(\vec{r}(s)) = \int_{s_1}^{s_2} ds \vec{\tau}(s) \cdot \vec{V}(\vec{r}(s)). \quad (1.8)$$

Es gilt somit $d\vec{\ell} = \vec{\tau}ds$, wobei der Tangentialvektor $\vec{\tau}$ aus Kapitel A.2. bekannt ist. Für geschlossene Wege mit $\vec{r}(s_1) = \vec{r}(s_2)$ schreiben wir auch $\oint_{\mathcal{C}} d\vec{\ell} \cdot \vec{V}$.

- (ii) *Fluss eines Vektorfeldes durch eine Fläche* (Abb. 5 rechts). Wir betrachten eine zweidimensionale Fläche \mathcal{F} , die von den Feldlinien des Vektorfeldes \vec{V} durchstossen wird. Die Fläche wird zerlegt in infinitesimale Flächenelemente $d\vec{f} = \vec{n}df$, die

ihren vektoriellen Charakter von dem an jedem Punkt der Fläche definierten Normalenvektor \vec{n} beziehen. Dann ist der Fluss von \vec{V} durch \mathcal{F} definiert durch

$$\int_{\mathcal{F}} d\vec{f} \cdot \vec{V} \equiv \int_{\mathcal{F}} df \vec{n} \cdot \vec{V}. \quad (1.9)$$

Für geschlossene Flächen (z.B. die Oberfläche einer Kugel) schreiben wir wieder $\oint_{\mathcal{F}} d\vec{f} \cdot \vec{V}$.

- (iii) Das *Volumenintegral einer skalaren Funktion* F über ein Volumen \mathcal{V} schreiben wir schliesslich in der Form

$$\int_{\mathcal{V}} d^3r F(\vec{r}),$$

mit dem Volumenelement d^3r .

Damit lassen sich die drei Integralsätze formulieren:

- *Gradientenfelder.* Für Gradientenfelder sind Wegintegrale wegunabhängig, d.h. es gilt für jeden Weg \mathcal{C} zwischen zwei Punkten $\vec{r}(s_1)$ und $\vec{r}(s_2)$

$$\int_{\mathcal{C}} d\vec{\ell} \cdot \nabla F = F(\vec{r}(s_2)) - F(\vec{r}(s_1)). \quad (1.10)$$

Die Ähnlichkeit zum Fundamentalsatz (1.7) sollte offensichtlich sein. In beiden Fällen wird ein *eindimensionales* Integral auf die Differenz einer Funktion an zwei Punkten, also letztlich auf *nulldimensionale* Objekte reduziert. Für geschlossene Wege gilt entsprechend

$$\oint_{\mathcal{C}} d\vec{\ell} \cdot \nabla F = 0. \quad (1.11)$$

- *Satz von Stokes.* Wir betrachten eine endliche Fläche \mathcal{F} . Deren Rand ist ein geschlossener Weg, den wir mit $\partial\mathcal{F}$ bezeichnen. Dann gilt für jedes Vektorfeld \vec{V}

$$\int_{\mathcal{F}} d\vec{f} \cdot (\nabla \times \vec{V}) = \oint_{\partial\mathcal{F}} d\vec{\ell} \cdot \vec{V}. \quad (1.12)$$

Hier wird ein *zweidimensionales* Integral über eine Ableitung von \vec{V} auf ein *eindimensionales* Integral über \vec{V} selbst reduziert.

- *Satz von Gauss.* Wir betrachten ein beschränktes Volumen \mathcal{V} . Dessen Rand ist eine geschlossene Fläche, die wir mit $\partial\mathcal{V}$ bezeichnen. Dann gilt für jedes Vektorfeld

$$\int_{\mathcal{V}} d^3r \nabla \cdot \vec{V} = \oint_{\partial\mathcal{V}} d\vec{f} \cdot \vec{V}, \quad (1.13)$$

d.h. ein *dreidimensionales* Integral über eine Ableitung von \vec{V} wird auf ein *zweidimensionales* Integral über \vec{V} selbst reduziert.

1.4. Die δ -Funktion

Zur Motivation dieses Abschnitts betrachten wir das Vektorfeld

$$\vec{V}(\vec{r}) = \frac{\vec{r}}{|\vec{r}|^3},$$

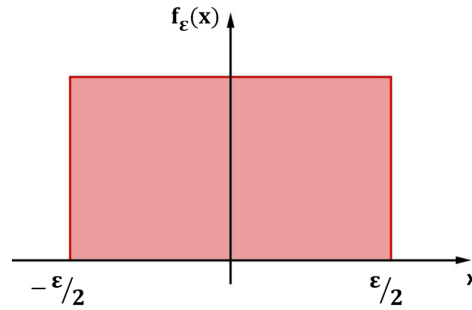


Abbildung 6. Eindimensionale Kastenfunktion $f_\epsilon(x)$.

das in der Elektrostatik eine zentrale Rolle spielt. Man zeigt leicht, dass überall ¶

$$\nabla \cdot \frac{\vec{r}}{|\vec{r}|^3} = 0, \quad (1.14)$$

und würde deshalb erwarten, dass die linke Seite des Gauss'schen Satzes (1.13) verschwindet. Andererseits zeigt man ebenso leicht, dass das Flächenintegral über die Oberfläche $\partial\mathcal{K}_R$ der Vollkugel \mathcal{K}_R mit Radius R gegeben ist durch

$$\oint_{\partial\mathcal{K}_R} d\vec{f} \cdot \frac{\vec{r}}{|\vec{r}|^3} = 4\pi, \quad (1.15)$$

und zwar unabhängig von R . Um diesen scheinbaren Widerspruch zu (1.13) aufzulösen, führen wir die Dirac'sche δ -Funktion ein.

1.4.1. Eindimensional. Wir betrachten für $\epsilon > 0$ die kastenförmige Funktion (Abb. 6)

$$f_\epsilon(x) = \begin{cases} 1/\epsilon & : -\epsilon/2 \leq x \leq \epsilon/2 \\ 0 & : \text{sonst.} \end{cases} \quad (1.16)$$

Offensichtlich gilt

$$\int_{-\infty}^{\infty} dx f_\epsilon(x) = 1. \quad (1.17)$$

Ausserdem ist für eine beliebige Funktion $g(x)$

$$\int_{-\infty}^{\infty} dx f_\epsilon(x)g(x) = \frac{1}{\epsilon} \int_{-\epsilon/2}^{\epsilon/2} dx g(x) \quad (1.18)$$

der Mittelwert von $g(x)$ über das Intervall $[-\epsilon/2, \epsilon/2]$, bzw. allgemeiner

$$\int_{-\infty}^{\infty} dx f_\epsilon(x - x_0)g(x) = \frac{1}{\epsilon} \int_{x_0 - \epsilon/2}^{x_0 + \epsilon/2} dx g(x) \quad (1.19)$$

der Mittelwert über $[x_0 - \epsilon/2, x_0 + \epsilon/2]$. Damit folgt

$$\lim_{\epsilon \rightarrow 0} \int_{-\infty}^{\infty} dx f_\epsilon(x - x_0)g(x) = g(x_0) \quad (1.20)$$

¶ Genauer: Überall ausserhalb des Ursprungs...

für jede Funktion $g(x)$ und jedes x_0 . Wir definieren jetzt

$$\delta(x - x_0) \equiv \lim_{\epsilon \rightarrow 0} f_\epsilon(x - x_0). \quad (1.21)$$

Dies ist offensichtlich keine Funktion im üblichen Sinne mehr, denn es gilt

$$\delta(x - x_0) = \begin{cases} 0 & : x \neq x_0 \\ \infty & : x = x_0. \end{cases} \quad (1.22)$$

Man spricht deshalb von einer *verallgemeinerten Funktion* oder *Distribution*. Eine Distribution wird definiert durch ihre Wirkung auf eine *Testfunktion* $g(x)$ unter einem Integral, also gemäss (1.20) durch

$$\int_{-\infty}^{\infty} dx \delta(x - x_0) g(x) = g(x_0) \quad (1.23)$$

für jedes $g(x)$ und jedes x_0 .

Die Konstruktion von $\delta(x)$ als Grenzfall der Folge (1.16) von kastenförmigen Funktionen ist besonders einfach, aber keineswegs eindeutig. Tatsächlich kann $\delta(x)$ als Grenzfall $\epsilon \rightarrow 0$ einer beliebigen Folge von Funktionen $f_\epsilon(x)$ aufgefasst werden, für die gilt, dass

$$\int_{-\infty}^{\infty} dx f_\epsilon(x) = 1 \quad \forall \epsilon \quad \text{und} \quad \lim_{\epsilon \rightarrow 0} f_\epsilon(x) = 0 \quad \forall x \neq 0. \quad (1.24)$$

1.4.2. Dreidimensional. Die dreidimensionale δ -Funktion können wir jetzt durch

$$\delta(\vec{r}) = \delta(x)\delta(y)\delta(z)$$

definieren. Daraus folgt zunächst

$$\int_{\mathbb{R}^3} d^3r \delta(\vec{r}) = \int_{-\infty}^{\infty} dx \delta(x) \int_{-\infty}^{\infty} dy \delta(y) \int_{-\infty}^{\infty} dz \delta(z) = 1,$$

und die definierende Eigenschaft (1.23) der eindimensionalen δ -Funktion wird ersetzt durch

$$\int_{\mathbb{R}^3} d^3r \delta(\vec{r} - \vec{r}_0) g(\vec{r}) = g(\vec{r}_0). \quad (1.25)$$

Als Anwendung lösen wir nun den scheinbaren Widerspruch zwischen den Beziehungen (1.14) und (1.15) auf: Zusammen bedeuten sie, dass

$$\nabla \cdot \frac{\vec{r}}{|\vec{r}|^3} = 4\pi\delta(\vec{r}). \quad (1.26)$$

Bemerkenswert ist, dass die δ -Funktion hier durch Ableitung eines relativ gutartigen, wohldefinierten Vektorfeldes entsteht und nicht durch einen Grenzübergang; dies hat im eindimensionalen Fall keine Entsprechung.

2. Elektrostatik

2.1. Das Coulomb-Gesetz

Das Coulomb-Gesetz beschreibt die Kraft \vec{F}_{12} zwischen zwei Punktladungen q_1, q_2 an Orten \vec{r}_1, \vec{r}_2 :

$$\vec{F}_{12} = -\vec{F}_{21} = k \frac{q_1 q_2}{|\vec{r}_1 - \vec{r}_2|^2} \frac{\vec{r}_1 - \vec{r}_2}{|\vec{r}_1 - \vec{r}_2|}. \quad (2.1)$$

Es handelt sich um eine Zentralkraft mit der gleichen, invers quadratischen Abstandsabhängigkeit wie beim Gravitationsgesetz. Im Gegensatz zur schweren Masse kann die Ladung allerdings verschiedene Vorzeichen haben, sodass die Coulomb-Kraft sowohl attraktiv (für $q_1 q_2 < 0$) als auch repulsiv (für $q_1 q_2 > 0$) sein kann.

Die Konstante k in (2.1) hängt von der Wahl der Ladungseinheit ab. Es gibt zwei wichtige Einheitensysteme, die jeweils in der Experimentalphysik bzw. in der theoretischen Physik gebräuchlich sind.

- (i) Im *SI* bzw. *MKSA*-System ist die Ladungseinheit das Coulomb (C), das von der Stromeinheit Ampère (A) abgeleitet wird,

$$1\text{C} = 1\text{As}.$$

Das Ampère wiederum wird durch die Kraftwirkung zwischen zwei stromdurchflossenen parallelen Drähten definiert. Im SI-System ist die Konstante k in (2.1)

$$k = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} = 10^{-7} c^2 \text{NA}^{-2} \approx 9 \times 10^9 \text{Nm}^2\text{C}^{-2}, \quad (2.2)$$

wobei c die Lichtgeschwindigkeit im Vakuum bezeichnet.

- (ii) Im *Gauss*-System (auch *cgs*-System) erhält die Ladung keine eigene Einheit; vielmehr wird die Ladungseinheit *definiert*, indem man die Konstante in (2.1) $k = 1$ setzt. Die so festgelegte Ladungseinheit heisst *electrostatic unit* (esu), und es gilt

$$1 \text{ esu} = 1 (\text{cm})^{3/2} \text{g}^{1/2} \text{s}^{-1}.$$

Die Umrechnung zwischen beiden Systemen erfolgt über die Beziehung

$$1 \text{ esu} = 10 c^{-1} \text{cm A} \approx 3.3 \times 10^{-10} \text{C},$$

und die Elementarladung nimmt jeweils die Werte

$$e \approx 1.602 \times 10^{-19} \text{C} \approx 4.803 \times 10^{-10} \text{esu}$$

an. Der wesentliche Vorteil des Gauss'schen Systems liegt darin, dass es dem elektrischen Feld \vec{E} und dem Magnetfeld \vec{B} die gleichen Einheiten zuweist. Damit wird der Äquivalenz von elektrischen und magnetischen Feldern, die in der relativistischen Formulierung durch einen Wechsel des Bezugssystems (Lorentz-Transformation) ineinander überführt werden können, Rechnung getragen.

Wir benutzen hier das Gauss-System, geben aber die wichtigsten Relationen in Form von Fussnoten auch im SI-System an.

Wegen der identischen funktionalen Form von Gravitations- und Coulombgesetz liegt es nahe, die Stärken der beiden Kräfte zu vergleichen; dies läuft im wesentlichen auf einen Vergleich typischer Massen und Ladungen hinaus, die ja die beiden Kräfte erzeugen. Für die Wechselwirkung eines Protons mit einem Elektronen findet man z.B.

$$\frac{|\vec{F}_{\text{Coulomb}}|}{|\vec{F}_{\text{Gravitation}}|} \approx 2 \times 10^{39}.$$

In *diesem* Sinne ist die elektrostatische Wechselwirkung viel stärker als die gravitative; Gravitationseffekte können deshalb in der Atom- und Festkörperphysik getrost vernachlässigt werden. Auf grossen Skalen (insbesondere in der Astronomie und der Kosmologie) dominiert aber die Gravitation das Geschehen, weil makroskopische Körper weitgehend ladungsneutral sind.

2.2. Das elektrische Feld

Wir betrachten nun N Punktladungen q_1, \dots, q_N an (festen) Orten $\vec{r}_1, \dots, \vec{r}_N$, und fragen nach der Kraft $\vec{F}(\vec{r})$ auf eine weitere Ladung q am Ort \vec{r} . Nach dem Superpositionsprinzip für Kräfte gilt

$$\vec{F}(\vec{r}) = \sum_{i=1}^N \frac{qq_i}{|\vec{r} - \vec{r}_i|^3} (\vec{r} - \vec{r}_i) \equiv q\vec{E}, \quad (2.3)$$

was als *Definition* des von den Ladungen q_1, \dots, q_N erzeugten elektrischen Feldes

$$\vec{E}(\vec{r}) \equiv \sum_{i=1}^N \frac{q_i}{|\vec{r} - \vec{r}_i|^3} (\vec{r} - \vec{r}_i) \quad (2.4)$$

zu verstehen ist: $q\vec{E}$ ist die Kraft auf eine *Probeladung* q am Ort \vec{r} , wobei wir annehmen, dass diese Ladung sehr klein ist ($q \rightarrow 0$), sodass sie ihrerseits die das Feld erzeugenden Ladungen nicht beeinflusst. Die Einführung des elektrischen Feldes markiert einen wichtigen konzeptionellen Schritt. Während die Newton'sche Mechanik die Kräfte zwischen Körpern als *Fernwirkungen* auffasst, deren physikalischer Ursprung nicht thematisiert wird, erhält das die elektromagnetischen Wechselwirkungen vermittelnde Feld in der Elektrodynamik eine eigene Identität als physikalisches Objekt. Kräfte werden damit zu *Nahwirkungen* des Feldes am Ort des betrachteten Körpers.

Statt Systemen von Punktladungen werden wir meist kontinuierliche Ladungsverteilungen $\rho(\vec{r})$ betrachten. In einer solchen Ladungsverteilung trägt das infinitesimale Volumenelement d^3r am Ort \vec{r} die (infinitesimale) Ladung $\rho(\vec{r})d^3r$. In Analogie zu (2.3)

ist das am Ort \vec{r} erzeugte elektrische Feld deshalb†

$$\vec{E}(\vec{r}) = \int d^3r' \frac{\rho(\vec{r}')}{|\vec{r} - \vec{r}'|^3} (\vec{r} - \vec{r}'). \quad (2.5)$$

Das Feld (2.4) eines Systems von Punktladungen ergibt sich daraus als Spezialfall, indem wir für die Ladungsdichte den Ausdruck

$$\rho(\vec{r}) = \sum_{i=1}^N q_i \delta(\vec{r} - \vec{r}_i) \quad (2.6)$$

einsetzen.

2.3. Das elektrostatische Potential

Die Coulomb-Kraft (2.1) ist eine Zentralkraft und damit konservativ, d.h. es gilt

$$\vec{F}_{12} = -\nabla_1 V_{12} \quad \text{mit} \quad V_{12}(\vec{r}_1, \vec{r}_2) = \frac{q_1 q_2}{|\vec{r}_1 - \vec{r}_2|}.$$

Diese mathematische Beziehung nutzen wir zur Umformung von (2.5):

$$\vec{E}(\vec{r}) = - \int d^3r' \nabla_{\vec{r}} \left(\frac{\rho(\vec{r}')}{|\vec{r} - \vec{r}'|} \right) = -\nabla_{\vec{r}} \int d^3r' \frac{\rho(\vec{r}')}{|\vec{r} - \vec{r}'|} \equiv -\nabla \Phi(\vec{r}) \quad (2.7)$$

wobei zu betonen ist (wie in der Notation verdeutlicht), dass der ∇ -Operator auf \vec{r} (nicht auf \vec{r}' !) wirkt und deshalb vor das Integral gezogen werden kann. Damit haben wir das *elektrostatische Potential*‡

$$\Phi(\vec{r}) = \int d^3r' \frac{\rho(\vec{r}')}{|\vec{r} - \vec{r}'|} \quad (2.8)$$

eingeführt. Die potentielle Energie einer Probeladung q am Ort \vec{r} ist

$$V(\vec{r}) = q\Phi(\vec{r}), \quad (2.9)$$

was die Beziehung von Φ zu dem in der Mechanik benutzten Potentialbegriff klärt.

2.4. Die Feldgleichungen der Elektrostatik

Die integralen Beziehungen (2.5) und (2.8) erlauben uns (zumindest im Prinzip), das von einer vorgegebenen Ladungsverteilung $\rho(\vec{r})$ erzeugte elektrische Feld zu berechnen. Oft ist es aber nützlich, das Feld stattdessen durch (partielle) *Differentialgleichungen* zu charakterisieren. Der *Helmholtz'sche Fundamentalsatz der Vektoranalysis*

† Im SI-System:

$$\vec{E}(\vec{r}) = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \int d^3r' \frac{\rho(\vec{r}')}{|\vec{r} - \vec{r}'|^3} (\vec{r} - \vec{r}')$$

‡ Im SI-System:

$$\Phi(\vec{r}) = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \int d^3r' \frac{\rho(\vec{r}')}{|\vec{r} - \vec{r}'|}.$$

“Jedes Vektorfeld $\vec{V}(\vec{r})$ ist durch die Angabe seiner *Wirbel* $\nabla \times \vec{V}$ und seiner *Quellen* $\nabla \cdot \vec{V}$ eindeutig festgelegt.”

sagt uns, dass wir zur vollständigen Charakterisierung von \vec{E} Ausdrücke für $\nabla \times \vec{E}$ und $\nabla \cdot \vec{E}$ angeben müssen. Da das elektrische Feld (in der Elektrostatik) konservativ ist, gilt zunächst

$$\nabla \times \vec{E} = 0. \quad (2.10)$$

Zur Berechnung von $\nabla \cdot \vec{E}$ benutzen wir die Identität (1.26). Damit folgt

$$\nabla \cdot \vec{E} = \int d^3r' \rho(\vec{r}') \nabla \cdot \frac{(\vec{r} - \vec{r}')}{|\vec{r} - \vec{r}'|^3} = 4\pi \int d^3r' \rho(\vec{r}') \delta(\vec{r} - \vec{r}') = 4\pi \rho(\vec{r}),$$

also zusammengefasst die Feldgleichung

$$\nabla \cdot \vec{E} = 4\pi \rho. \quad (2.11)$$

Mit $\vec{E} = -\nabla\Phi$ folgt daraus die *Poisson-Gleichung*§

$$\nabla^2\Phi = -4\pi\rho. \quad (2.12)$$

Als Anwendung von (2.11) berechnen wir das elektrische Feld einer homogen geladenen Kugel vom Radius R . Wir legen den Ursprung in den Mittelpunkt der Kugel, sodass die Ladungsdichte nur von der Radialkoordinate $r = |\vec{r}|$ abhängt,

$$\rho(\vec{r}) = \begin{cases} \rho_0 & : |\vec{r}| < R \\ 0 & : |\vec{r}| \geq R. \end{cases}$$

Gemäss (2.11) gilt für das Integral über ein beliebiges Volumen \mathcal{V}

$$\int_{\mathcal{V}} d^3r \rho(\vec{r}) = \frac{1}{4\pi} \int_{\mathcal{V}} d^3r \nabla \cdot \vec{E} = \frac{1}{4\pi} \oint_{\partial\mathcal{V}} d\vec{f} \cdot \vec{E}, \quad (2.13)$$

wobei im zweiten Schritt der Gauss'sche Satz (1.13) benutzt wurde. Nun wählen wir für \mathcal{V} die Kugel \mathcal{K}_r vom Radius r um den Ursprung. Dann gilt

$$\int_{\mathcal{K}_r} d^3r \rho(\vec{r}) = \begin{cases} (4\pi/3)r^3\rho_0 & : r < R \\ (4\pi/3)R^3\rho_0 = Q & : r > R, \end{cases} \quad (2.14)$$

wobei Q die Gesamtladung der Kugel bezeichnet.

Zur Auswertung des Flusses von \vec{E} durch die Kugeloberfläche $\partial\mathcal{K}_r$ benutzen wir ein *Symmetrieargument*:

- Die Ladungsdichte $\rho(\vec{r})$ ist radialsymmetrisch, d.h. sie hängt nur von $|\vec{r}|$ ab.
- Aus der Poisson-Gleichung (2.12) folgt dann, dass auch das Potential $\Phi(\vec{r})$ radialsymmetrisch ist.
- Das elektrische Feld ist $\vec{E} = -\nabla\Phi$ kann somit als Gradientenfeld einer radialsymmetrischen Funktion nur in radialer Richtung zeigen.

§ Im SI-System: $\nabla \cdot \vec{E} = -\nabla^2\Phi = (1/\epsilon_0)\rho$.

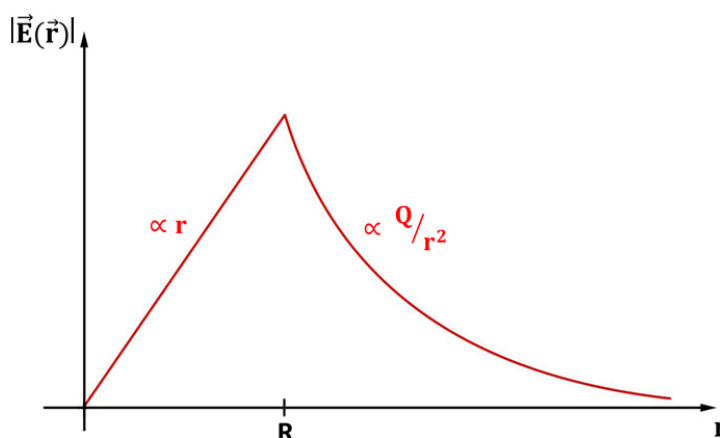


Abbildung 7. Elektrisches Feld einer homogen geladenen Kugel vom Radius R . Das Bild zeigt den Betrag der Feldstärke als Funktion des Abstands vom Mittelpunkt der Kugel.

Daraus folgt der Ansatz

$$\vec{E}(\vec{r}) = E(r)\vec{e}_r.$$

Die Auswertung des Oberflächenintegrals auf der rechten Seite von (2.13) wird nun sehr einfach, denn der Normalenvektor auf der Kugeloberfläche ist $\vec{n} = \vec{e}_r$:

$$\oint_{\partial\mathcal{K}_r} d\vec{f} \cdot \vec{E} = \oint_{\partial\mathcal{K}_r} df \vec{n} \cdot \vec{e}_r E(r) = E(r) \oint_{\partial\mathcal{K}_r} df = 4\pi r^2 E(r),$$

und Gleichsetzen mit (2.14) liefert schliesslich das Ergebnis (Abb. 7)

$$E(r) = \begin{cases} (4\pi/3)\rho_0 r = (Q/R^3)r & : r < R \\ Q/r^2 & : r > R. \end{cases} \quad (2.15)$$

Insbesondere ist das Feld ausserhalb der Kugel ($r > R$) das Feld einer Punktladung im Ursprung. Aus der Herleitung folgt sofort, dass dies für *jede* kugelsymmetrische Ladungsverteilung endlicher Ausdehnung so sein muss. Wir bemerken schliesslich noch, dass diese Ergebnisse völlig analog für das Gravitationsfeld einer Kugel mit homogener bzw. kugelsymmetrischer Massendichte gelten.

2.5. Elektrostatistische Energie

Aus der Mechanik kennen wir die potentielle Energie eines Systems von N wechselwirkenden Massenpunkten. Für den Fall von Punktladungen mit Coulomb-Wechselwirkungen lautet der Ausdruck

$$V = \sum_{i,j:i < j} \frac{q_i q_j}{|\vec{r}_i - \vec{r}_j|} = \frac{1}{2} \sum_{i,j:i \neq j} \frac{q_i q_j}{|\vec{r}_i - \vec{r}_j|}.$$

In der ersten Doppelsumme wird jedes Paar einfach gezählt, in der zweiten doppelt. Die zweite Formulierung erlaubt den Übergang zu einer kontinuierlichen Ladungsverteilung[†],

$$V = \frac{1}{2} \int d^3r \int d^3r' \frac{\rho(\vec{r})\rho(\vec{r}')}{|\vec{r} - \vec{r}'|}. \quad (2.16)$$

Wir schreiben diesen Ausdruck etwas um, und erhalten unter Verwendung von (2.8)

$$V = \frac{1}{2} \int d^3r \rho(\vec{r}) \int d^3r' \frac{\rho(\vec{r}')}{|\vec{r} - \vec{r}'|} = \frac{1}{2} \int d^3r \rho(\vec{r})\Phi(\vec{r}). \quad (2.17)$$

Mit Hilfe der Feldgleichung (2.11) können wir die Ladungsdichte in (2.17) durch $\nabla \cdot \vec{E} = -\nabla^2\Phi$ ersetzen,

$$V = \frac{1}{8\pi} \int d^3r (\nabla \cdot \vec{E})\Phi = -\frac{1}{8\pi} \int d^3r \vec{E} \cdot \nabla\Phi = \frac{1}{8\pi} \int d^3r (\nabla\Phi) \cdot (\nabla\Phi),$$

wobei im zweiten Schritt eine partielle Integration durchgeführt wurde[‡]. Damit haben wir gezeigt

$$V = \frac{1}{8\pi} \int d^3r |\vec{E}|^2. \quad (2.18)$$

Den Integranden dieses Volumenintegrals identifizieren wir als *Energiedichte*

$$u(\vec{r}) = \frac{1}{8\pi} |\vec{E}(\vec{r})|^2 \quad (2.19)$$

des elektrischen Feldes[§].

Die drei Ausdrücke (2.16,2.17,2.18) für die potentielle Energie spiegeln verschiedene physikalische Standpunkte wider. In (2.16) wird die Energie, wie in der Mechanik üblich, den Wechselwirkungen zwischen den Teilchen zugeordnet; Gleichung (2.17) drückt sie als potentielle Energie der Ladungsverteilung $\rho(\vec{r})$ in dem Potential $\Phi(\vec{r})$ aus^{||} und (2.18) schliesslich ordnet die Energie ganz dem [von der Ladungsverteilung erzeugten] elektrischen Feld zu.

Die Volumenintegrale erstrecken sich i.a. über unterschiedliche Bereiche; ist z.B. die Ladungsverteilung, wie im oben behandelten Beispiel der homogen geladenen Kugel, räumlich beschränkt, so verschwindet der Integrand in (2.17) ausserhalb der Ladungsverteilung, während der Integrand in (2.18) überall im Raum von Null verschieden ist. Trotzdem sind die drei Ausdrücke (wie gezeigt) mathematisch völlig äquivalent. Wir bevorzugen hier den Ausdruck (2.19) für die Energiedichte, da er dem Charakter des elektrischen Feldes als eigenständigem physikalischem Objekt am besten Rechnung trägt.

[†] Die Einschränkung des Integrationsbereichs auf $\vec{r} \neq \vec{r}'$ ist im Kontinuum nicht mehr nötig.

[‡] Es empfiehlt sich, diesen Schritt komponentenweise nachzuvollziehen. Hier und im folgenden fallen Randterme weg, weil wir annehmen, daß Felder und Potential im Unendlichen verschwinden.

[§] Im SI-System: $u = \frac{\epsilon_0}{2} |\vec{E}|^2$

^{||} Der Faktor $\frac{1}{2}$ in (2.17) zeugt davon, dass es sich um das von der Ladungsverteilung selbst erzeugte Potential handelt. Er tritt nicht auf, wenn die Energie einer Ladungsverteilung in einem *äusseren* Potential berechnet wird.

Als Anwendung berechnen wir die elektrostatische Energie einer homogen geladenen Kugel mit Gesamtladung Q und Radius R . Aus Dimensionsgründen ist klar, dass die Energie proportional zu Q^2/R sein muss, die explizite Rechnung (die in den Übungen durchgeführt wird) ergibt

$$V_{\text{elektrostat}} = \frac{3}{5} \frac{Q^2}{R}. \quad (2.20)$$

Bei festgehaltener Ladung Q divergiert die elektrostatische Energie für $R \rightarrow 0$, d.h. eine Punktladung hätte eine unendliche Energie¶. Zur Veranschaulichung der Grössenordnung dieser Energie fragen wir nach dem *klassischen Elektronenradius* R_e des Elektrons, bei dem die elektrostatische Energie gerade gleich der Ruhenergie $m_e c^2$ ist, die die spezielle Relativitätstheorie einem Objekt der Masse m_e zuordnet. Man findet

$$R_e = \frac{3}{5} \frac{e^2}{m_e c^2} \approx 1.7 \times 10^{-15} \text{ m.}$$

Tatsächlich ist das Elektron (nach allem, was wir heute wissen) punktförmig, es wird aber schon bei dem erheblich grösseren *Compton-Radius*

$$R_c = \frac{\hbar}{m_e c} \approx 4 \times 10^{-13} \text{ m}$$

aufgrund von quantenmechanischen Effekten “unscharf”.

2.6. Multipol-Entwicklung

In diesem Abschnitt soll das elektrostatische Potential

$$\Phi(\vec{r}) = \int d^3r' \frac{\rho(\vec{r}')}{|\vec{r} - \vec{r}'|} \quad (2.21)$$

für eine allgemeine Ladungsverteilung $\rho(\vec{r})$ im *Fernfeld* näherungsweise berechnet werden. Dem Begriff des Fernfeldes liegt folgende Vorstellung zugrunde: Die Ladungsverteilung soll eine *endliche Ausdehnung* R_0 haben, das heisst, dass für alle Punkte \vec{r}' innerhalb der Ladungsverteilung [für die also $\rho(\vec{r}') \neq 0$] gilt $|\vec{r}'| < R_0$; der Koordinatenursprung sei dabei zweckmässigerweise ins Innere der Ladungsverteilung gelegt. Das Fernfeld sind dann diejenigen Punkte \vec{r} , für die $|\vec{r}| \gg R_0$ und damit auch

$$|\vec{r}| \gg |\vec{r}'| \quad (2.22)$$

für alle Punkte \vec{r}' , die zum Integral (2.21) beitragen.

2.6.1. Herleitung. Zur Auswertung von (2.21) unter der Bedingung (2.22) müssen wir die inverse Abstandsfunktion im Integranden von (2.21) geeignet entwickeln. Es gilt

$$\frac{1}{|\vec{r} - \vec{r}'|} = \frac{1}{\sqrt{r^2 - 2\vec{r} \cdot \vec{r}' + (r')^2}} = \frac{1}{r \sqrt{1 - 2(\vec{r} \cdot \vec{r}')/r^2 + (r'/r)^2}} \quad (2.23)$$

¶ Dies ist die Quelle vieler konzeptioneller und mathematischer Schwierigkeiten in klassischen und quantenmechanischen Feldtheorien, die eine wichtige Motivation für die moderne Entwicklung von Stringtheorien darstellt.

mit $r = |\vec{r}|$ und $r' = |\vec{r}'|$. Nach (2.22) ist $|\vec{r} \cdot \vec{r}'| \ll r^2$ und $(r'/r)^2 \ll 1$, sodass beide Terme in der Wurzel klein sind gegenüber der 1. Wir fassen diese beiden Terme zusammen zu $x = -2(\vec{r} \cdot \vec{r}')/r^2 + (r'/r)^2$ und benutzen die ersten Terme der Taylor-Reihe

$$\frac{1}{\sqrt{1+x}} = 1 - \frac{x}{2} + \frac{3}{8}x^2 + \mathcal{O}(x^3),$$

um (2.23) in die Form

$$\frac{1}{|\vec{r} - \vec{r}'|} = \frac{1}{r} \left[1 - \frac{1}{2} \left(\frac{r'^2}{r^2} - \frac{2\vec{r} \cdot \vec{r}'}{r^2} \right) + \frac{3}{8} \left(\frac{r'^2}{r^2} - \frac{2\vec{r} \cdot \vec{r}'}{r^2} \right)^2 + \mathcal{O}(x^3) \right] \quad (2.24)$$

zu bringen. Wir sortieren nun die Terme in den eckigen Klammern nach Potenzen von r'/r und behalten nur die Beiträge bis zur Ordnung $(r'/r)^2$,

$$\frac{1}{|\vec{r} - \vec{r}'|} \approx \frac{1}{r} \left[1 + \frac{\vec{r} \cdot \vec{r}'}{r^2} + \frac{3(\vec{r} \cdot \vec{r}')^2 - (r'r)^2}{2r^4} \right]. \quad (2.25)$$

Dieser Ausdruck wird in (2.21) eingesetzt und das Integral Term für Term ausgewertet,

$$\begin{aligned} \Phi(\vec{r}) &\approx \frac{1}{r} \left[\int d^3r' \rho(\vec{r}') + \frac{\vec{r}}{r^2} \cdot \int d^3r' \rho(\vec{r}') \vec{r}' + \frac{1}{2r^4} \int d^3r' \rho(\vec{r}') [3(\vec{r} \cdot \vec{r}')^2 - (r'r)^2] \right] \\ &= \frac{q}{r} + \frac{\vec{d} \cdot \vec{r}}{r^3} + \frac{1}{2r^5} \sum_{i,j=1}^3 Q_{ij} x_i x_j, \end{aligned} \quad (2.26)$$

mit $\vec{r} = (x_1, x_2, x_3)$ und der *Gesamtladung*

$$q = \int d^3r \rho(\vec{r}) \quad (2.27)$$

der Ladungsverteilung, dem *Dipolmoment*

$$\vec{d} = \int d^3r \rho(\vec{r}) \vec{r}, \quad (2.28)$$

und dem *Quadrupoltensor*

$$Q_{ij} = \int d^3r \rho(\vec{r}) [3x_i x_j - |\vec{r}|^2 \delta_{ij}]. \quad (2.29)$$

Der Quadrupolbeitrag zum Potential (2.26) hat die Gestalt einer durch die Matrix \hat{Q} definierten *quadratischen Form*.

Der Vorteil der Darstellung (2.26) ist offensichtlich: Wir haben die kontinuierliche Ladungsverteilung $\rho(\vec{r})$ ersetzt durch wenige *Multipolmomente* q , \vec{d} und \hat{Q} . Mit zunehmender Ordnung der Momente fallen die entsprechenden Beiträge zu Φ immer schneller mit dem Abstand ab, der *Monopolbeitrag* q/r wie $1/r$, der *Dipolbeitrag* $(\vec{d} \cdot \vec{r})/r^3$ wie $1/r^2$ und der *Quadrupolbeitrag* wie $1/r^3$. Die Näherung (2.26) ist bis auf Korrekturen der Ordnung $(R_0/r)^4$ gültig, und lässt sich systematisch verbessern. Für eine kugelsymmetrische Ladungsverteilung ist der Monopolbeitrag q/r bereits exakt, d.h. alle höheren Multipolmomente verschwinden (s. Abschnitt 2.4).

2.6.2. *Abhängigkeit von der Wahl des Koordinatensystems.* Eine Verschiebung des Ursprungs des Koordinatensystems

$$\vec{r} \rightarrow \vec{r}' = \vec{r} - \vec{r}_0$$

lässt die Gesamtladung (2.27) offensichtlich unverändert. Das Dipolmoment (2.28) hingegen transformiert sich gemäss

$$\vec{d} \rightarrow \vec{d}' = \int d^3r' \vec{r}' \rho(\vec{r}') = \int d^3r \vec{r} \rho(\vec{r}) - \vec{r}_0 \int d^3r \rho(\vec{r}) = \vec{d} - q\vec{r}_0.$$

Daraus lässt sich zweierlei ablesen:

- (i) Falls $q \neq 0$, kann man das Dipolmoment zum Verschwinden bringen, indem man den Koordinatenursprung in den Ladungsschwerpunkt legt, also $\vec{r}_0 = \vec{d}/q$ wählt; der Ladungsschwerpunkt ist genauso definiert wie der Massenschwerpunkt in der Mechanik. Diese Beobachtung ist insbesondere relevant für das Gravitationsfeld einer Massenverteilung, die ja stets eine nicht-verschwindende Gesamtmasse haben muss. Eine solche Massenverteilung (z.B. die des Erdkörpers) hat kein Dipolmoment; die erste nichtverschwindende Abweichung vom Feld einer Punktmasse ist der Quadrupolterm.
- (ii) Falls $q = 0$, ist das Dipolmoment unabhängig von der Wahl des Ursprungs, es ist damit eine *invariantes* Merkmal der Ladungsverteilung; ein Beispiel ist das Dipolmoment eines elektrisch neutralen, polaren Moleküls wie H_2O . Allgemein ist jeweils das niedrigste nichtverschwindende Multipolmoment unabhängig von der Wahl des Ursprungs, für den Fall $q = \vec{d} = 0$ also das Quadrupolmoment \hat{Q} .

2.6.3. *Punktdipol.* Der erste Term q/r in der Multipolentwicklung (2.26) ist das Potential einer Punktladung: Im Fernfeld sieht jede Ladungsverteilung mit $q \neq 0$ zu führender Ordnung aus wie eine Punktladung. Wir fragen nun, welche Ladungsverteilungen die anderen Terme der Multipolentwicklung “in Reinform” erzeugen, und betrachten den einfachsten Fall des Dipolpotentials

$$\Phi_{\text{dip}}(\vec{r}) = \frac{\vec{d} \cdot \vec{r}}{|\vec{r}|^3}. \quad (2.30)$$

Die Äquipotentiallinien von Φ_{dip} sind in Abbildung 8 dargestellt. Die zugehörige Ladungsverteilung ρ_{dip} ergibt sich im Prinzip aus der Poisson-Gleichung (2.12),

$$\rho_{\text{dip}} = -\frac{1}{4\pi} \nabla^2 \Phi_{\text{dip}}.$$

Aus den Übungen ist bekannt, dass sich die Lösung durch die Ableitung einer δ -Funktion darstellen lässt,

$$\rho_{\text{dip}}(\vec{r}) = -\vec{d} \cdot \nabla \delta(\vec{r}). \quad (2.31)$$

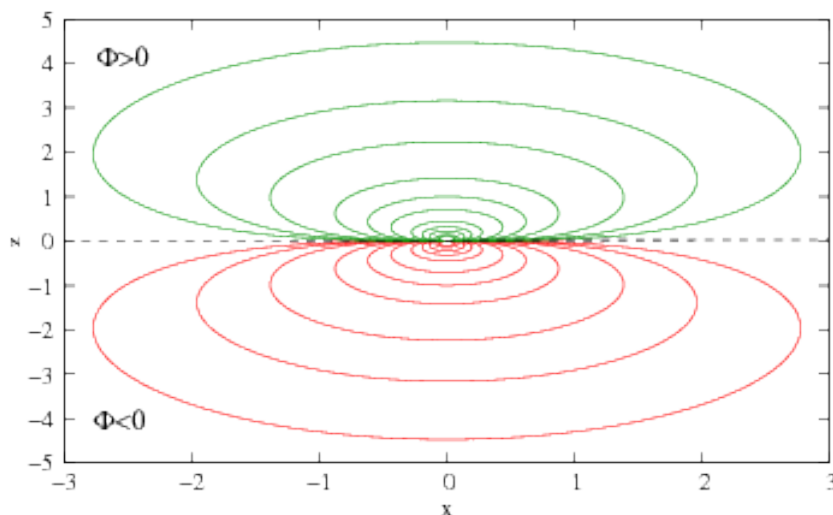


Abbildung 8. Äquipotentiallinien eines Punktdipols am Ursprung. Das Dipolmoment \vec{d} ist entlang der z -Achse ausgerichtet, sodass $\Phi_{\text{dip}} > 0$ im oberen Halbraum $z > 0$ und $\Phi_{\text{dip}} < 0$ im unteren Halbraum $z < 0$.

Als Anwendung von (2.31) berechnen wir die Energie eines Punktdipols in einem äusseren elektrischen Feld. Wir betrachten zunächst ein System von Punktladungen q_i in einem äusseren elektrostatischen Potential Φ_{ext} . Die durch das äussere Potential verursachte potentielle Energie (ohne die “Selbstenergie” der Wechselwirkungen der Ladungen untereinander!) ist [vgl.(2.9)]

$$V_{\text{ext}} = \sum_{i=1}^N q_i \Phi_{\text{ext}}(\vec{r}_i),$$

und entsprechend für eine kontinuierliche Ladungsverteilung⁺

$$V_{\text{ext}} = \int d^3r \rho(\vec{r}) \Phi_{\text{ext}}(\vec{r}). \quad (2.32)$$

Einsetzen von (2.31) in (2.32) ergibt, mit einer partiellen Integration,

$$V_{\text{ext}} = - \int d^3r \Phi_{\text{ext}}(\vec{d} \cdot \nabla) \delta(\vec{r}) = \int d^3r \delta(\vec{r}) (\vec{d} \cdot \nabla) \Phi_{\text{ext}} = -\vec{d} \cdot \vec{E}_{\text{ext}}, \quad (2.33)$$

wobei das externe elektrische Feld $\vec{E}_{\text{ext}} = -\nabla \Phi_{\text{ext}}$ am Ort $\vec{r} = 0$ des Punktdipols ausgewertet wird. Die Energie ist minimal, wenn der Dipol parallel zum Feld steht, er wird also im Feld ausgerichtet.

2.7. Metallische Randbedingungen

In einem metallischen Leiter gibt es frei bewegliche Ladungen, die sich unter dem Einfluss eines elektrischen Feldes verschieben können. In einer *statischen* (d.h.

⁺ Dieser Ausdruck hat eine trügerische Ähnlichkeit mit dem Ausdruck (2.17) für die Selbstenergie einer Ladungsverteilung, allerdings fehlt in (2.32) der Faktor 1/2.

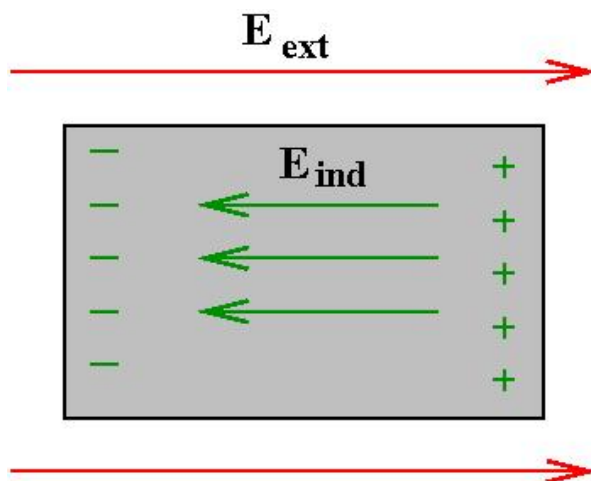


Abbildung 9. Neutraler metallischer Körper in einem äusseren elektrischen Feld.

zeitunabhängigen) Situation kann es im Inneren des Leiters keine elektrischen Felder geben: Gäbe es sie, würden sich die freien Ladungen so lange verschieben, bis das Feld überall verschwindet. Im Inneren eines Leiters gilt somit

$$\vec{E} = 0 \Leftrightarrow \Phi = \text{const.} \quad (2.34)$$

Wir können diese Tatsache auch energetisch begründen: Die beweglichen Ladungen im Leiter werden sich so anordnen, dass die elektrostatische Energie minimiert wird, und die Energiedichte $u = |\vec{E}|^2$ aus Abschnitt 2.5 ist offensichtlich genau dann minimal, wenn $\vec{E} = 0$. Zwei Beispiele illustrieren das Argument:

- (i) *Neutraler metallischer Körper in einem äusseren elektrischen Feld* (Abb. 9). Unter der Wirkung des äusseren Feldes sammeln sich freie Ladungen an den Oberflächen an; in der Abbildung werden positive Ladungen nach rechts, negative nach links getrieben. Dadurch baut sich im Leiter ein *induziertes* Feld \vec{E}_{ind} auf, und zwar so lange, bis das äussere Feld vollständig kompensiert ist, also $\vec{E}_{\text{ind}} = -\vec{E}_{\text{ext}}$ und damit $\vec{E} = \vec{E}_{\text{ext}} + \vec{E}_{\text{ind}} = 0$ für das Gesamtfeld im Inneren des Leiters.
- (ii) *Metallische Kugel mit Gesamtladung Q* . Die beweglichen Ladungen verteilen sich so, dass die elektrostatische Energie minimiert wird. Man überlegt sich leicht, dass die Energie minimal ist, wenn alle Ladungen an der Oberfläche sitzen; sie nimmt dann den Wert $Q^2/2R$ an.

Wenn im Aussenraum ein elektrisches Feld vorliegt und dieses im Inneren des Leiters verschwindet, stellt sich die Frage nach den *Randbedingungen* für \vec{E} an der Grenzfläche zwischen Metall und Aussenraum. Die Orientierung der Grenzfläche ist charakterisiert durch den Normalenvektor \vec{n} und den Tangentialvektor $\vec{\tau}$, und wir unterscheiden zwischen den Randbedingungen an die *Tangentialkomponente* $\vec{\tau} \cdot \vec{E}$ und die *Normalkomponente* $\vec{n} \cdot \vec{E}$ des elektrischen Feldes. Da gemäss (2.34) die Oberfläche eines Leiters eine Äquipotentialfläche ist, folgt aus den Eigenschaften des Gradienten

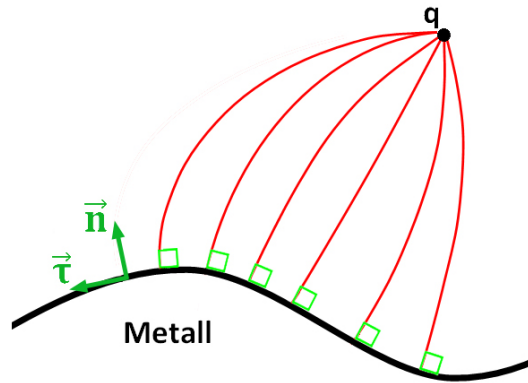


Abbildung 10. Feldlinien einer Punktladung in der Nähe einer Metalloberfläche.

(Abschnitt 1.2.1), dass das elektrische Feld senkrecht auf der Leiteroberfläche stehen muss, d.h. dass $\vec{\tau} \cdot \vec{E} = 0$ (Abb. 10).

Wir leiten dieses Ergebnis zunächst aus der Betrachtung des allgemeinen Falls einer Grenzfläche zwischen zwei Bereichen 1 und 2 her, in denen elektrische Felder \vec{E}_1 und \vec{E}_2 vorhanden sind (an einer metallischen Oberfläche wäre $\vec{E}_1 = 0$ und $\vec{E}_2 \neq 0$), und bestimmen dann die Randbedingung für die Normalkomponente.

- (i) *Tangentiale Randbedingung.* Wir betrachten einen geschlossenen Weg, der die Grenzfläche umschließt (Abb. 11 links). Die Teilstücke tangential zur Grenzfläche haben die Länge l , die Stücke normal zur Grenzfläche die Länge d , mit $d \ll l$. Die von dem Weg $\partial\mathcal{A}$ eingeschlossene Fläche bezeichnen wir mit \mathcal{A} . Wegen (2.10) gilt, unter Verwendung des Stokes'schen Satzes (1.12),

$$0 = \int_{\mathcal{A}} d\vec{f} \cdot (\nabla \times \vec{E}) = \oint_{\partial\mathcal{A}} d\vec{\ell} \cdot \vec{E}.$$

Im Grenzfall $d \rightarrow 0$ tragen nur die tangentialen Teilstücke zum Wegintegral bei, sodass

$$\oint_{\partial\mathcal{A}} d\vec{\ell} \cdot \vec{E} = l\vec{\tau} \cdot \vec{E}_1 - l\vec{\tau} \cdot \vec{E}_2 = l\vec{\tau} \cdot (\vec{E}_1 - \vec{E}_2) = 0.$$

Wir schliessen daraus, dass die *Tangentialkomponente des elektrischen Feldes an der Grenzfläche stetig ist*. Insbesondere gilt an der Oberfläche eines Leiters, wie erwartet,

$$\vec{E} \cdot \vec{\tau} = 0, \tag{2.35}$$

d.h. die Feldlinien stehen senkrecht auf der Leiteroberfläche.

- (ii) *Normale Randbedingung.* Hier wenden wir den Gauss'schen Satz (1.13) an auf ein kleines (hutschachtelförmiges) Volumen \mathcal{V} , das die Grenzfläche umschließt (Abb. 11 rechts). Gemäss (2.11) ist die Ladung q in \mathcal{V}

$$q = \frac{1}{4\pi} \int_{\mathcal{V}} d^3r \nabla \cdot \vec{E} = \frac{1}{4\pi} \oint_{\partial\mathcal{V}} d\vec{f} \cdot \vec{E}.$$

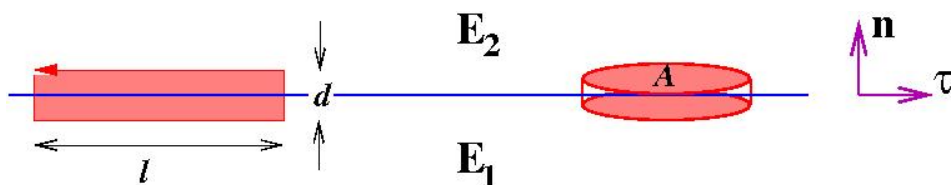


Abbildung 11. Zur Herleitung der elektrostatischen Randbedingungen. Die linke Skizze illustriert die tangentielle Randbedingung, die rechte die normale.

Lässt man wieder die Dicke d der Hutschachtel klein werden, so tragen nur Deckel und Boden der Schachtel zu dem Oberflächenintegral bei, deren Fläche wir mit A bezeichnen:

$$\int_{\partial V} d\vec{f} \cdot \vec{E} = A\vec{n} \cdot (\vec{E}_2 - \vec{E}_1) = 4\pi q.$$

Die Normalkomponente des elektrischen Feldes *springt* also um den Betrag $4\pi\sigma$, wobei $\sigma = q/A$ die *Oberflächenladungsdichte* bezeichnet. An der Oberfläche des Leiters gilt entsprechend $\vec{E} \cdot \vec{n} = 4\pi\sigma$, d.h. das elektrische Feld *induziert* die Oberflächenladungsdichte

$$\sigma = \frac{1}{4\pi} \vec{E} \cdot \vec{n}. \quad (2.36)$$

3. Magnetostatik

Magnetische Phänomene sind schon sehr lange bekannt. Die magnetische Wirkung von elektrischen Strömen, die hier im Vordergrund stehen soll, ist dagegen eine vergleichsweise neue Entdeckung. Die wichtigsten Quellen für Magnetfelder sind

- (i) *Permanentmagnete* in Form von magnetischen Mineralien, wie sie z.B. in der Nähe der Stadt Magnesia in der heutigen Türkei gefunden wurden. Eine frühe wissenschaftliche Untersuchung von Permanentmagneten stammt von Petrus Peregrinus, der 1269 darauf hinwies, dass es keine isolierten magnetischen Pole (“Monopole”) gibt.
- (ii) Das *Erdmagnetfeld* ist spätestens seit der Erfindung von Kompassen bekannt. William Gilbert stellte im Jahre 1600 eine Analogie zwischen dem Erdmagnetfeld und dem Feld eines Permanentmagneten her, und beeinflusste damit Kepler’s Vorstellungen von den Wechselwirkungen zwischen den Planeten und der Sonne.
- (iii) Die magnetische Wirkung von *elektrischen Strömen* wurde 1820 von Hans Christian Ørsted entdeckt[†]. André Marie Ampère postulierte daraufhin, dass *alle* Magnetfelder durch Ströme erzeugt werden. In magnetischen Materialien müssten demnach *Molekularströme* vorhanden sein, die sich allerdings mit den Mitteln des frühen 19. Jahrhunderts nicht nachweisen liessen.

[†] Ørsted war dabei wesentlich beeinflusst von romantischen Naturphilosophen wie Schelling und Novalis.

Heute weiss man, dass atomarer Magnetismus auf quantenmechanischen Effekten beruht. Wir machen uns deshalb im folgenden den Ampèreschen Standpunkt zu eigen, und betrachten elektrische Ströme als einzige Quellen für Magnetfelder; Ströme wiederum bestehen aus bewegten Ladungen, also lautet unser Grundpostulat

Magnetfelder werde durch *bewegte Ladungen* erzeugt, und *wirken* auf bewegte Ladungen.

3.1. Stationäre Ströme

In der Magnetostatik werden, im Gegensatz zur Elektrostatik, *bewegte* Ladungen betrachtet, allerdings sind die zugehörigen Ströme zeitunabhängig (*stationär*). Wir müssen zunächst den Begriff der *Stromdichte* entwickeln, der an die Stelle der Ladungsdichte in der Elektrostatik tritt.

Die Stromstärke I wird definiert durch

$$I = \frac{dq}{dt} = \frac{\text{Ladung}}{\text{Zeit}}.$$

Die *Stromdichte* \vec{j} beschreibt den Ladungsfluss durch eine Fläche, sie hat also die Dimension

$$j = |\vec{j}| = \frac{\text{Strom}}{\text{Fläche}}.$$

Zur Definition von \vec{j} betrachten wir einen infinitesimal dünnen Draht, durch den ein Strom I fliesst. Der Draht sei parametrisiert als Kurve $\vec{r}(s)$ im Raum, wobei s die Bogenlänge bezeichnet[‡]. Der Draht wird zerlegt in infinitesimale Längenelemente

$$d\vec{\ell} = \vec{\tau} ds, \tag{3.1}$$

mit dem Tangentialvektor $\vec{\tau}$. Die Querschnittsfläche des Drahtes sei df . Dann ist die Stromdichte \vec{j} ein Vektor mit Richtung $\vec{\tau}$ und Betrag I/df , also

$$\vec{j} = \frac{I}{df} \vec{\tau} \Rightarrow \vec{j} df = I \vec{\tau}. \tag{3.2}$$

Multiplikation mit ds macht aus dem Flächenelement df das Volumenelement $d^3r = ds df$. Damit wird aus (3.1,3.2) die zentrale Relation

$$\vec{j} d^3r = I d\vec{\ell}, \tag{3.3}$$

die wir als Definition der Stromdichte betrachten.

Für ein System von Punktladungen mit Orten \vec{r}_i und Geschwindigkeiten \vec{v}_i ist die Stromdichte

$$\vec{j}(\vec{r}, t) = \sum_{i=1}^N q_i \vec{v}_i \delta(\vec{r} - \vec{r}_i(t)), \tag{3.4}$$

allerdings lässt sich auf diese Weise keine *stationäre* Stromdichte erzeugen.

[‡] S. Kapitel 2 des Mechanik-Teils der Vorlesung.

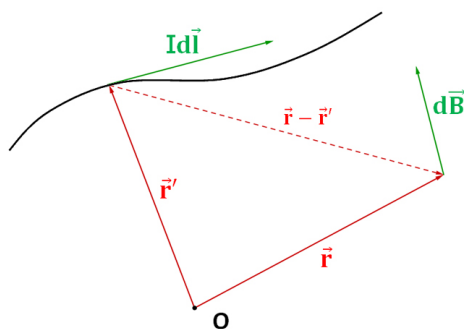


Abbildung 12. Illustration des differentiellen Biot-Savart-Gesetzes (3.6).

3.2. Magnetfeld

Wir entwickeln im folgenden die Magnetostatik in möglichst weitgehender Analogie zur Elektrostatik. Die Rolle des Ladungselements ρd^3r aus der Elektrostatik übernimmt dabei das *Stromelement* (3.3).

Wir definieren zunächst das Magnetfeld§ $\vec{B}(\vec{r})$ durch seine Kraftwirkung|| $d\vec{F}$ auf ein Stromelement am Ort \vec{r} ,

$$d\vec{F} = \frac{I}{c} d\vec{\ell} \times \vec{B}(\vec{r}). \quad (3.5)$$

Die Kraft ist proportional zu I und $|\vec{B}|$, und sie steht *senkrecht* auf $d\vec{\ell}$ (bzw. $\vec{\tau}$) und auf \vec{B} . Man überprüft leicht, dass die so gewählte Einheit von \vec{B} gleich der Einheit des elektrischen Feldes \vec{E} ist (vgl. Abschnitt 2.1).

Andererseits *erzeugt* ein Stromelement an einem Ort \vec{r}' ein Magnetfeld am Ort \vec{r} , das durch die Beziehung¶

$$d\vec{B} = \frac{I}{c} d\vec{\ell} \times \frac{\vec{r} - \vec{r}'}{|\vec{r} - \vec{r}'|^3} \quad (3.6)$$

gegeben ist. Mit dem Superpositionsprinzip folgt dann für das Magnetfeld der ganzen Stromverteilung [unter Benutzung von (3.3)]

$$\vec{B}(\vec{r}) = \frac{1}{c} \int d^3r' \frac{\vec{j}(\vec{r}') \times (\vec{r} - \vec{r}')}{|\vec{r} - \vec{r}'|^3}. \quad (3.7)$$

Die Gleichungen (3.6) und (3.7) sind die differentielle und integrale Formulierung des *Biot-Savart-Gesetzes*, das hier die Rolle des Coulomb-Gesetzes aus der Elektrostatik übernimmt.

Zusammen definieren (3.5) und (3.6) die magnetische Wechselwirkung zwischen zwei Stromelementen; offensichtlich handelt es sich *nicht* um eine Zentralkraft. Wir zeigen noch, wie aus (3.5) die Lorentz-Kraft auf eine bewegte Punktladung folgt⁺. Die

§ Genauer: Die magnetische Induktion.

|| Im SI-System gilt $d\vec{F} = I d\vec{\ell} \times \vec{B}$, und \vec{B} wird in Tesla gemessen ($1 \text{ T} = \text{V s} / \text{m}^2$).

¶ Im SI-System ist der Vorfaktor $1/c$ in (3.6) und (3.7) zu ersetzen durch $1/(4\pi\mu_0)$ mit $\mu_0 = 1/(\epsilon_0 c^2)$.

⁺ S. Kapitel 3 des Mechanik-Teils der Vorlesung.

Stromdichte einer Punktladung mit Ort $\vec{r}_0(t)$ und Geschwindigkeit $\vec{v} = d\vec{r}_0/dt$ ist [vgl. (3.4)]

$$\vec{j}(\vec{r}, t) = q\vec{v}\delta(\vec{r} - \vec{r}_0(t)).$$

Die zugehörige Kraft ist gemäss (3.5)

$$d\vec{F} = \frac{1}{c}(\vec{j} \times \vec{B})d^3r = \frac{q}{c}(\vec{v} \times \vec{B})\delta(\vec{r} - \vec{r}_0)d^3r, \quad (3.8)$$

also genau die Lorentz-Kraft. Da \vec{B} und \vec{E} die gleichen Einheiten haben, können wir die Stärke der Lorentzkraft mit der elektrostatischen Kraft $q\vec{E}$ vergleichen. Die beiden unterscheiden sich (bei geeigneter Wahl der Richtungen von \vec{v} und \vec{B}) um den Faktor $|\vec{v}|/c$, worin sich schon andeutet, dass sich das Magnetfeld als relativistische Korrektur zum elektrischen Feld auffassen lässt.

3.3. Ladungserhaltung

Eine wichtige Erfahrungstatsache ist die *Ladungserhaltung*: Elektrische Ladung kann weder erzeugt, noch vernichtet werden. Folglich muss die Änderung der elektrischen Ladung in einem beliebigen Volumen \mathcal{V} gleich dem Fluss von Ladungen durch die Oberfläche $\partial\mathcal{V}$ sein. Der Ladungsfluss durch ein Flächenelement $d\vec{f} = \vec{n}df$ ist aber gerade $\vec{j} \cdot d\vec{f}$, sodass

$$\frac{d}{dt} \int_{\mathcal{V}} d^3r \rho(\vec{r}, t) = - \oint_{\partial\mathcal{V}} d\vec{f} \cdot \vec{j}(\vec{r}, t) = - \int_{\mathcal{V}} d^3r \nabla \cdot \vec{j}. \quad (3.9)$$

Das Minuszeichen beruht auf der Tatsache, dass der Normalenvektor \vec{n} in den Aussenraum zeigt, und im zweiten Schritt wurde der Gauss'sche Satz (1.13) benutzt. Da diese Beziehung für jedes (zeitunabhängige) Volumen \mathcal{V} gelten soll, müssen die Integranden der beiden Volumenintegrale übereinstimmen, und wir erhalten die wichtige *Kontinuitätsgleichung*

$$\frac{\partial\rho}{\partial t} + \nabla \cdot \vec{j} = 0, \quad (3.10)$$

die die elektrische Ladungsdichte mit der Stromdichte verknüpft. In einer statischen (=zeitunabhängigen) Situation ist $\partial\rho/\partial t = 0$ und $\vec{j} = \vec{j}(\vec{r})$. Die stationären Ströme in der Magnetostatik müssen also divergenzfrei sein,

$$\nabla \cdot \vec{j}(\vec{r}) = 0. \quad (3.11)$$

3.4. Feldgleichungen und Vektorpotential

Zur vollständigen Charakterisierung der Magnetfeldes \vec{B} brauchen wir Feldgleichungen für $\nabla \cdot \vec{B}$ und $\nabla \times \vec{B}$. Wie in der Elektrostatik suchen wir zunächst ein "Potential" für das Magnetfeld. Wir gehen aus von dem Biot-Savart-Gesetz (3.7), und schreiben†

$$\vec{B}(\vec{r}) = \frac{1}{c} \int d^3r' \vec{j}(\vec{r}') \times \frac{\vec{r} - \vec{r}'}{|\vec{r} - \vec{r}'|^3} = -\frac{1}{c} \int d^3r' \vec{j}(\vec{r}') \times \nabla \frac{1}{|\vec{r} - \vec{r}'|} =$$

† In der Herleitung (3.12) wird zunächst die aus der Elektrostatik bekannte Beziehung

$$\nabla \frac{1}{|\vec{r} - \vec{r}'|} = -\frac{\vec{r} - \vec{r}'}{|\vec{r} - \vec{r}'|^3}$$

$$= \frac{1}{c} \nabla \times \int d^3 r' \frac{\vec{j}(\vec{r}')}{|\vec{r} - \vec{r}'|} \equiv \nabla \times \vec{A} \quad (3.12)$$

mit dem *Vektorpotential*

$$\vec{A}(\vec{r}) = \frac{1}{c} \int d^3 r' \frac{\vec{j}(\vec{r}')}{|\vec{r} - \vec{r}'|}. \quad (3.13)$$

Während das skalare elektrostatische Potential Φ durch die Beziehung $\vec{E} = -\nabla\Phi$ zum elektrischen Feld bis auf eine additive Konstante festgelegt ist, wird das Vektorpotential durch die Beziehung

$$\vec{B} = \nabla \times \vec{A} \quad (3.14)$$

nur bis auf eine *beliebige skalare Funktion* $\Lambda(\vec{r})$ festgelegt. In der Tat gilt wegen (1.3) für jede solche Funktion $\nabla \times (\nabla\Lambda) = 0$, sodass das Magnetfeld (3.14) unter einer beliebigen *Eichtransformation*

$$\vec{A} \rightarrow \vec{A}' = \vec{A} + \nabla\Lambda \quad (3.15)$$

invariant bleibt. Die spezielle Wahl (3.13) heisst *Coulomb-Eichung*. Wir zeigen, dass die Coulomb-Eichung $\nabla \cdot \vec{A} = 0$ impliziert. Ausgehend von (3.12) gilt‡

$$\begin{aligned} \nabla \cdot \vec{A} &= \frac{1}{c} \int d^3 r' \nabla \cdot \left(\frac{\vec{j}(\vec{r}')}{|\vec{r} - \vec{r}'|} \right) = \frac{1}{c} \int d^3 r' (\vec{j}(\vec{r}') \cdot \nabla) \frac{1}{|\vec{r} - \vec{r}'|} = \\ &= -\frac{1}{c} \int d^3 r' (\vec{j}(\vec{r}') \cdot \nabla') \frac{1}{|\vec{r} - \vec{r}'|} = \frac{1}{c} \int d^3 r' (\nabla \cdot \vec{j}(\vec{r}')) \frac{1}{|\vec{r} - \vec{r}'|} = 0. \end{aligned} \quad (3.16)$$

Aus (3.14) folgt§ (unabhängig von der Wahl der Eichung!) wegen der allgemeinen Beziehung (1.4) als erste Feldgleichung für \vec{B}

$$\nabla \cdot \vec{B} = 0. \quad (3.17)$$

Der Vergleich mit der entsprechenden elektrostatischen Feldgleichung (2.11) zeigt, dass der physikalische Gehalt von (3.17) die *Abwesenheit von magnetischen Ladungen bzw. magnetischen Monopolen* ist. Hergeleitet haben wir diese Beziehung für Magnetfelder, die durch (stationäre) Stromverteilungen erzeugt werden. Damit ist nicht ausgeschlossen, dass es Elementarteilchen mit magnetischer Ladung, sogenannten *magnetische Monopole*, geben könnte.

benutzt, und dann die Identität

$$\nabla \times (f\vec{V}) = f\nabla \times \vec{V} - \vec{V} \times \nabla f$$

für eine beliebige Funktion f und ein beliebiges Vektorfeld \vec{V} ; im Falle des Integrals in (3.12) ist $\vec{V} = \vec{j}$ unabhängig von \vec{r} , und die Funktion ist $f(\vec{r}) = 1/|\vec{r} - \vec{r}'|$.

‡ Hier wird zunächst die Identität $\nabla \cdot (f\vec{V}) = \vec{V} \cdot \nabla f + f\nabla \cdot \vec{V}$ benutzt (im vorliegenden Fall ist $\vec{V} = \vec{j}$ unabhängig von \vec{r}). Dann wird der Gradient der Funktion $1/|\vec{r} - \vec{r}'|$ bzgl. \vec{r} , bezeichnet durch ∇ , durch den Gradienten bzgl. \vec{r}' , bezeichnet durch ∇' , ersetzt; dabei ändert sich das Vorzeichen. Sodann wird eine partielle Integration ausgeführt, und schliesslich benutzt man die Divergenzfreiheit der stationären Stromverteilung (3.11).

§ Umgekehrt folgt aus (3.17) wegen (1.6) auch die Existenz eines Vektorpotentials.

Die Suche nach magnetischen Monopolen ist Gegenstand der aktuellen Forschung in der experimentellen Elementarteilchenphysik und auch in der Astrophysik. Ein bestechendes Argument, das für die Existenz von Monopolen spricht, wurde 1931 von Paul Dirac vorgelegt. Er zeigte, dass die Existenz von Monopolen die Quantelung der elektrischen Ladung erklären würde: Die elektrische Elementarladung e und die magnetische Elementarladung g müssten dann über die Beziehung

$$ge = \frac{n}{2}\hbar c$$

verknüpft sein, wobei n eine ganze Zahl ist. Da $n \geq 1$, folgt als untere Schranke an g

$$g \geq \frac{\hbar c}{2e} = \frac{e}{2\alpha} \approx \frac{137}{2}e,$$

wobei $\alpha = e^2/(\hbar c) \approx 1/137$ die *Feinstrukturkonstante* bezeichnet, ein dimensionsloses Maß für die Stärke der elektromagnetischen Wechselwirkung. Die magnetische Elementarladung (die im Gauss'schen System die gleiche Einheit hat wie die elektrische Ladung) müsste also deutlich grösser sein als die elektrische. Man erwartet deshalb, dass magnetische Monopole auch eine grosse Masse haben, was erklären könnte, warum sie bislang nicht beobachtet wurden. ||

Wir brauchen noch eine Feldgleichung für $\nabla \times \vec{B}$. Dazu benutzen wir die Identität

$$\nabla \times \vec{B} = \nabla \times (\nabla \times \vec{A}) = \nabla(\nabla \cdot \vec{A}) - \nabla^2 \vec{A} = -\nabla^2 \vec{A} \quad (3.18)$$

wegen (3.16). Damit folgt aus (3.18) unter Benutzung von (1.26)

$$\nabla \times \vec{B} = -\nabla^2 \vec{A} = -\frac{1}{c} \int d^3r' \vec{j}(\vec{r}') \nabla^2 \frac{1}{|\vec{r} - \vec{r}'|} = \frac{4\pi}{c} \int d^3r' \vec{j}(\vec{r}') \delta(\vec{r} - \vec{r}') = \frac{4\pi}{c} \vec{j}(\vec{r}),$$

und also als zweite magnetostatische Feldgleichung ¶

$$\nabla \times \vec{B} = \frac{4\pi}{c} \vec{j}, \quad (3.19)$$

die sich (in der Coulomb-Eichung!) auch als komponentenweise Poisson-Gleichung

$$\nabla^2 \vec{A} = -\frac{4\pi}{c} \vec{j} \quad (3.20)$$

für das Vektorpotential schreiben lässt.

3.5. Ampère'sches Gesetz

Eine Folgerung aus (3.19) ist das Ampère'sche Gesetz, das für die Berechnung von Magnetfeldern nützlich ist. Wir betrachten eine zweidimensionale Fläche \mathcal{F} mit (eindimensionalem) Rand $\partial\mathcal{F}$. Dann gilt nach dem Satz von Stokes (1.12)

$$\oint_{\partial\mathcal{F}} d\vec{l} \cdot \vec{B} = \int_{\mathcal{F}} d\vec{f} \cdot (\nabla \times \vec{B}) = \frac{4\pi}{c} \int_{\mathcal{F}} d\vec{f} \cdot \vec{j} = \frac{4\pi}{c} I_{\mathcal{F}}, \quad (3.21)$$

|| Die aktuelle untere experimentelle Schranke an die Masse eines magnetischen Monopols liegt bei etwa 900 Protonenmassen!

¶ Im SI-System: $\nabla \times \vec{B} = \mu_0 \vec{j}$.

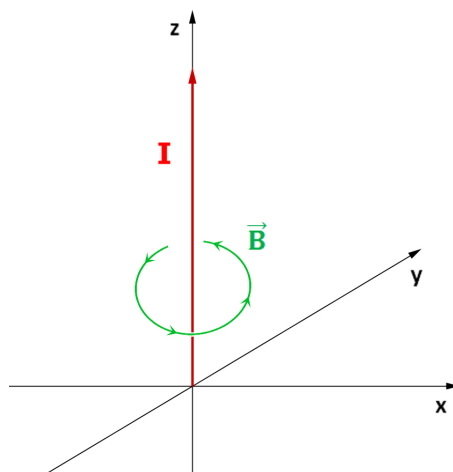


Abbildung 13. Magnetfeld eines unendlich langen, dünnen Drahtes.

wobei $I_{\mathcal{F}}$ den Gesamtstrom durch die Fläche \mathcal{F} bezeichnet. Das Ampère'sche Gesetz (3.21) setzt also das Kreisintegral des Magnetfeldes entlang einer geschlossenen Kurve in Beziehung zu dem elektrischen Fluss durch eine (beliebige) Fläche, deren Rand diese Kurve darstellt.

Als Anwendung berechnen wir das Magnetfeld eines unendlich langen, geraden, infinitesimal dünnen Drahtes (Abb. 13). Der Draht soll mit der z -Achse zusammenfallen und der Strom durch den Draht sei I . In Zylinderkoordinaten (ρ, φ, z) überlegt man sich leicht, dass das Magnetfeld nur eine Komponente in Richtung von \vec{e}_{φ} besitzt, deren Betrag nur vom Abstand ρ zum Draht abhängt,

$$\vec{B} = B(\rho)\vec{e}_{\varphi}. \quad (3.22)$$

Nach dem Ampère'schen Gesetz (3.21) gilt für einen Kreis \mathcal{K}_{ρ} vom Radius ρ , der in einer Ebene senkrecht zur z -Achse liegt und dessen Mittelpunkt sich auf dieser Achse befindet,

$$\oint_{\mathcal{K}_{\rho}} d\vec{l} \cdot \vec{B} = 2\pi\rho B(\rho) = \frac{4\pi}{c}I.$$

Auflösen nach $B(\rho)$ liefert

$$B(\rho) = \frac{2I}{c\rho}. \quad (3.23)$$

3.6. Magnetischer Dipol

Analog zur Elektrostatik (s. Abschnitt 2.6) fragen wir, wie das Magnetfeld einer räumlich beschränkten Stromverteilung im *Fernfeld* aussieht, also für Abstände $|\vec{r}| \gg R_0$, wenn R_0 die Ausdehnung der Stromverteilung bezeichnet; man denke sich etwa eine kreisförmige Leiterschleife vom Radius R_0 . Im elektrostatischen Fall ist der führende

Term (sofern die Ladungsverteilung nicht neutral ist) das Monopolpotential $q/|\vec{r}|$ einer Punktladung. Da es keine magnetischen Monopole gibt, erwarten wir hier zu führender Ordnung ein Dipolfeld.

3.6.1. Dipolfeld. Ausgangspunkt ist der Ausdruck (3.13) für das Vektorpotential einer beliebigen Stromverteilung in Coulomb-Eichung. Wie in Abschnitt 2.6 wird der Integrand unter der Annahme $|\vec{r}| \gg |\vec{r}'|$ entwickelt und die entstehende Taylor-Reihe Term für Term integriert. Zu führender Ordnung erhält man so das Ergebnis

$$\vec{A}(\vec{r}) = \vec{A}_{\text{dip}}(\vec{r}) + \mathcal{O}(1/r^3)$$

mit dem Dipol-Vektorpotential

$$\vec{A}_{\text{dip}}(\vec{r}) \equiv \frac{1}{r^3}(\vec{\mu} \times \vec{r}) \quad (3.24)$$

und dem *magnetischen Dipolmoment*

$$\vec{\mu} = \frac{1}{2c} \int d^3r (\vec{r} \times \vec{j}(\vec{r})) \quad (3.25)$$

der Stromverteilung. Das zugehörige Magnetfeld ist

$$\vec{B}_{\text{dip}} = \nabla \times \vec{A}_{\text{dip}} = -\nabla \left(\frac{\vec{\mu} \cdot \vec{r}}{r^3} \right) + 4\pi \vec{\mu} \delta(\vec{r}). \quad (3.26)$$

Der erste Term auf der rechten Seite hat die gleiche mathematische Struktur wie das *elektrostatische* Dipolfeld,

$$\vec{E}_{\text{dip}} = -\nabla \Phi_{\text{dip}} = -\nabla \left(\frac{\vec{d} \cdot \vec{r}}{r^3} \right), \quad (3.27)$$

s. Gleichung (2.30). Da der zweite, singuläre Term in (3.26) ausserhalb des Ursprungs unbeobachtbar ist, haben magnetische und elektrische Dipolfelder somit ausserhalb der sie erzeugenden Strom- bzw. Ladungsverteilungen *den gleichen Verlauf*.

Auch bei der Auswertung des elektrischen Dipolfeldes (3.27) müssen wir auf die Entstehung von singulären Beiträgen am Ort des Dipols (also am Ursprung) achten. Die sorgfältige Rechnung ergibt

$$\vec{E}_{\text{dip}}(\vec{r}) = \frac{1}{r^3} \left(\frac{3(\vec{d} \cdot \vec{r})\vec{r}}{r^2} - \vec{d} \right) - \frac{4\pi}{3} \vec{d} \delta(\vec{r}), \quad (3.28)$$

und gemäss (3.26) entsprechend

$$\vec{B}_{\text{dip}}(\vec{r}) = \frac{1}{r^3} \left(\frac{3(\vec{\mu} \cdot \vec{r})\vec{r}}{r^2} - \vec{\mu} \right) + \frac{8\pi}{3} \vec{\mu} \delta(\vec{r}). \quad (3.29)$$

Die singulären δ -Beiträge zu (3.28) und (3.29) entstehen, weil wir mit dem Abbruch der Multipolentwicklung nach dem Dipolterm implizit einen Übergang zum Punktdipol durchgeführt haben. Bei einer physikalisch realistischen Ladungs- oder Stromverteilung endlicher Ausdehnung würde die Dipolnäherung zusammenbrechen,

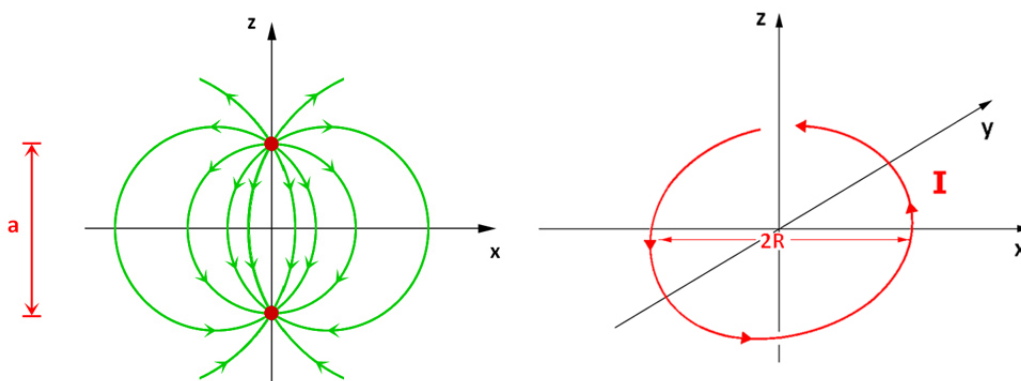


Abbildung 14. Links: Elektrischer Dipol aus zwei Punktladungen im Abstand a . Im Grenzübergang $a \rightarrow 0$ zum Punktdipol divergiert das elektrische Feld zwischen den beiden Ladungen. Rechts: Kreisförmige Leiterschleife vom Radius R in der (x, y) -Ebene. Im Grenzfall $R \rightarrow 0$ (bei gleichzeitiger Skalierung des Stroms I) entsteht daraus ein magnetischer Punktdipol.

wenn $|\vec{r}|$ vergleichbar wird mit dieser Ausdehnung, und es gäbe keine Singularität bei $\vec{r} = 0$.

Wir illustrieren dies am Beispiel eines elektrostatischen Dipols mit Ladungsverteilung

$$\rho(\vec{r}) = q[\delta(\vec{r} - (a/2)\vec{e}_z) - \delta(\vec{r} + (a/2)\vec{e}_z)],$$

s. Abb. 14 links. Am Ursprung, also genau zwischen den beiden Ladungen an den Orten $(a/2)\vec{e}_z$ und $-(a/2)\vec{e}_z$, herrscht ein starkes elektrisches Feld, dessen Betrag beim Übergang zum Punktdipol $a \rightarrow 0$ proportional zu $|\vec{d}|/a^3$ divergiert, und so die δ -Singularität in (3.28) verursacht. Im magnetischen Fall betrachtet man entsprechend eine Leiterschleife vom Radius R , durchflossen vom Strom I , die im Grenzfall $R \rightarrow 0$, $I \rightarrow \infty$ einen magnetischen Punktdipol erzeugt (Abb. 14 rechts).

3.6.2. Magnetischer Dipol im äusseren Feld. Wir betrachten jetzt, analog zu Abschnitt 2.6.3, eine räumlich begrenzte Stromverteilung $\vec{j}(\vec{r})$ in einem äusseren Magnetfeld $\vec{B}_{\text{ext}}(\vec{r})$. Gemäss (3.5) ist die Kraft auf die Stromverteilung

$$\vec{F} = \frac{1}{c} \int d^3r (\vec{j}(\vec{r}) \times \vec{B}_{\text{ext}}(\vec{r})). \quad (3.30)$$

Die Stromverteilung sei um einen Punkt \vec{r}_0 lokalisiert, und das äussere Magnetfeld soll auf der Skala R_0 der Stromverteilung langsam variieren. Dann können wir das Integral (3.30) näherungsweise auswerten, indem wir $\vec{B}_{\text{ext}}(\vec{r})$ um \vec{r}_0 in einer Taylor-Reihe entwickeln. Das Ergebnis einer solchen Rechnung lautet

$$\vec{F} = \nabla(\vec{B}_{\text{ext}} \cdot \vec{\mu}) = -\nabla V_{\text{dip}}, \quad (3.31)$$

wobei

$$V_{\text{dip}} = -\vec{B}_{\text{ext}} \cdot \vec{\mu} \quad (3.32)$$

die potentielle Energie des Dipols darstellt. In einem konstanten Magnetfeld ist $\vec{F} = 0$, aber auf den Dipol wirkt ein Drehmoment

$$\vec{m} = \vec{\mu} \times \vec{B}_{\text{ext}}, \quad (3.33)$$

das ihn in Richtung des Feldes ausrichtet. Auch in dieser Hinsicht verhält sich der magnetische Dipol wie ein elektrostatischer Dipol in einem äusseren elektrischen Feld; man vergleiche (3.32) und (2.33).

3.6.3. Das gyromagnetische Verhältnis. Elementarteilchen wie das Elektron besitzen ein intrinsisches magnetisches Dipolmoment, das letztlich die Quelle von atomarem Magnetismus darstellt. Da damit immer auch eine Art von Eigendrehimpuls, der quantenmechanische *Spin* verknüpft ist, liegt es nahe, sich die Elementarteilchen als kleine rotierende, geladene Kugeln vorzustellen. In diesem Abschnitt sollen die Grenzen dieser Vorstellung aufgezeigt werden⁺.

Wir gehen aus von einer homogen geladenen Kugel mit Radius R und Gesamtladung Q , die mit Winkelgeschwindigkeit $\vec{\omega}$ um eine ihrer Symmetrieachsen rotiert. Eine solche rotierende Kugel stellt eine stationäre Stromverteilung dar, deren magnetisches Dipolmoment sich durch Auswertung von (3.25) zu

$$\vec{\mu} = \frac{1}{5c} QR^2 \vec{\omega} \quad (3.34)$$

ergibt. Falls die Kugel homogen mit Masse belegt ist, und ihre Gesamtmasse M beträgt, so besitzt sie andererseits den Drehimpuls

$$\vec{L} = \frac{2}{5} MR^2 \vec{\omega}. \quad (3.35)$$

Die Beziehung zwischen (3.34) und (3.35) ist also von der Form

$$\vec{\mu} = \gamma \vec{L}, \quad (3.36)$$

mit dem *gyromagnetischen Verhältnis*

$$\gamma = \frac{Q}{2Mc}. \quad (3.37)$$

Die Beziehungen (3.36,3.37) gelten tatsächlich für beliebige Anordnungen, bei denen Massen- und Ladungsdichten zu einander proportional sind. Zum Beweis betrachten wir eine Ladungsverteilung $\rho(\vec{r})$ und die entsprechende Massenverteilung $\rho_m(\vec{r}) = C\rho(\vec{r})$. Der konstante Faktor C ergibt sich aus den Beziehungen für Gesamtmasse und -ladung

$$M = \int d^3r \rho_m(\vec{r}), \quad Q = \int d^3r \rho(\vec{r})$$

zu $C = M/Q$. Wenn sich nun das Volumenelement am Ort \vec{r} mit der Geschwindigkeit $\vec{v}(\vec{r})$ bewegt, ergeben sich die Ladungs- und Massenstromdichten

$$\vec{j}(\vec{r}) = \rho(\vec{r})\vec{v}(\vec{r}), \quad \vec{j}_m(\vec{r}) = \rho_m(\vec{r})\vec{v}(\vec{r}) = \frac{M}{Q}\vec{j}(\vec{r}).$$

⁺ Ein offensichtlicher Widerspruch zu dieser Vorstellung ist schon die Tatsache, dass auch neutrale Teilchen wie das Neutron ein magnetisches Moment besitzen.

Der Drehimpuls der Anordnung ist (in offensichtlicher Verallgemeinerung der Beziehungen für Massenpunkte aus Kapitel 3 des Mechanik-Teils der Vorlesung)

$$\vec{L} = \int d^3r (\vec{r} \times \vec{j}_m) = \frac{M}{Q} \int d^3r (\vec{r} \times \vec{j}) = \frac{2cM}{Q} \vec{\mu},$$

wie behauptet.

Der Betrag des Spins von Elementarteilchen ist quantisiert in Vielfachen von $\hbar/2$. Das Elektron hat Spin $\hbar/2$, und sein magnetisches Moment ist von der Form

$$|\vec{\mu}| = g \frac{e}{2m_e c} \frac{\hbar}{2} = \frac{g}{2} \frac{e\hbar}{2m_e c}. \quad (3.38)$$

Die Grösse $e\hbar/(2m_e c)$ heisst *Bohr'sches Magneton*. Die Schreibweise (3.38) ist so gewählt, dass der dimensionslose g -Faktor für eine klassische rotierende Ladungsverteilung gleich 1 wäre. Tatsächlich ist g etwas doppelt so gross,

$$g \approx 2.0023193043616.$$

Als Ergebnis von Hochpräzisionsexperimenten und umfangreichen Rechnungen im Rahmen der Quantenelektrodynamik ist der g -Faktor des Elektrons heute die am genauesten bekannte physikalische Grösse.

4. Die Maxwell'schen Gleichungen

Wir fassen die elektro- und magnetostatischen Feldgleichungen zusammen:

$$\nabla \cdot \vec{E} = 4\pi\rho, \quad \nabla \cdot \vec{B} = 0. \quad (4.1)$$

$$\nabla \times \vec{E} = 0, \quad \nabla \times \vec{B} = \frac{4\pi}{c} \vec{j}. \quad (4.2)$$

Zur Beschreibung von zeitabhängigen Phänomenen müssen die Feldgleichungen (4.2) durch zwei zusätzliche Terme ergänzt werden, die wir im folgenden motivieren wollen.

4.1. Das Induktionsgesetz

Michael Faraday berichtete 1831 über eine Reihe von Experimenten, in denen

- bei der Bewegung einer Leiterschleife in einem statischen Magnetfeld,
- bei der Bewegung eines Permanentmagneten durch eine statische Leiterschleife, und
- bei der Änderung der Magnetfeldstärke eines Elektromagneten, den eine Leiterschleife umschliesst,

in der Leiterschleife ein Strom induziert wurde. Diese Beobachtungen können zusammengefasst werden in der *Flussregel*

$$\frac{d}{dt} \int_{\mathcal{F}} d\vec{f} \cdot \vec{B} = -c \oint_{\partial\mathcal{F}} d\vec{l} \cdot \vec{E}, \quad (4.3)$$

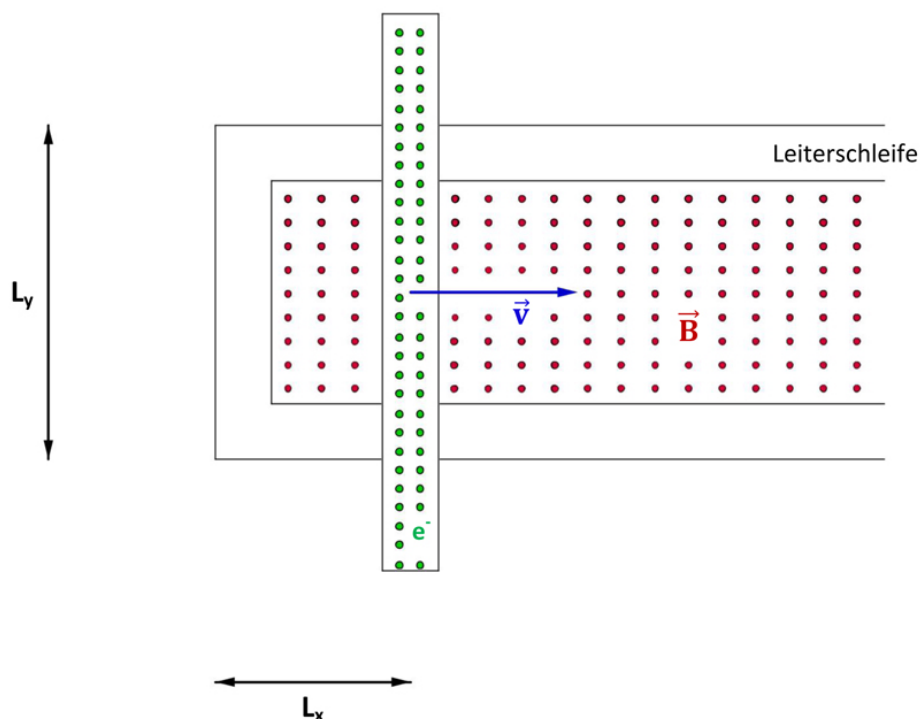


Abbildung 15. Leiterschleife mit einem beweglichen Teilstück. Das Magnetfeld tritt senkrecht aus der Bildebene heraus, angedeutet durch die roten Punkte. Auf die Elektronen im beweglichen Teilstück (grün) wirkt die Lorentzkraft $\frac{q}{c}(\vec{v} \times \vec{B})$

die die zeitliche Änderung des magnetischen Flusses durch eine Fläche \mathcal{F} in Beziehung setzt zu dem Kreisintegral des elektrischen Feldes über den Rand $\partial\mathcal{F}$ der Fläche; letzteres ist gerade die in der Leiterschleife induzierte Ringspannung. Die Änderung des Flusses kann dabei sowohl durch eine Änderung der Fläche, als auch durch eine Änderung der Magnetfeldstärke hervorgerufen werden. Ist die Fläche \mathcal{F} zeitunabhängig, so kann die Zeitableitung auf der linken Seite von (4.3) in das Integral gezogen werden, und die Anwendung des Stokes'schen Satzes (1.12) liefert

$$\int_{\mathcal{F}} d\vec{f} \cdot \frac{\partial \vec{B}}{\partial t} = -c \oint_{\partial\mathcal{F}} d\vec{l} \cdot \vec{E} = -c \int_{\mathcal{F}} d\vec{f} \cdot (\nabla \times \vec{E}).$$

Da dies für beliebige Flächen \mathcal{F} gelten soll, müssen die Integranden gleich sein, und wir folgern als Verallgemeinerung der Feldgleichung (2.10) die differentielle Form des Induktionsgesetzes

$$\nabla \times \vec{E} = -\frac{1}{c} \frac{\partial \vec{B}}{\partial t}. \quad (4.4)$$

Es ist instruktiv, die Flussregel (4.3) für eine spezielle Situation aus der Lorentzkraft (3.8) abzuleiten. Wir betrachten eine rechteckige Leiterschleife mit einem beweglichen Teilstück (Abb. 15). Das Magnetfeld ist entlang der z -Achse gerichtet, $\vec{B} = B\vec{e}_z$, und das Teilstück bewegt sich mit Geschwindigkeit $\vec{v} = v\vec{e}_x$. Auf eine

bewegliche Ladung q in dem Teilstück wirkt die Lorentzkraft

$$\vec{F} = \frac{q}{c}(\vec{v} \times \vec{B}) = -\frac{q}{c}vB\vec{e}_y.$$

Im Bezugssystem des beweglichen Teilstücks interpretiert man diese Kraft als Wirkung eines induzierten elektrischen Feldes

$$\vec{E} = \frac{\vec{F}}{q} = -\frac{vB}{c}\vec{e}_y.$$

Da dieses Feld nur in dem bewegten Teilstück vorhanden ist, ergibt die Auswertung des Linienintegrals über die Leiterschleife

$$\oint_{\partial\mathcal{F}} d\vec{l} \cdot \vec{E} = -L_y \frac{vB}{c}.$$

Andererseits ist der magnetische Fluss durch die Leiterschleife

$$\int_{\mathcal{F}} d\vec{f} \cdot \vec{B} = BL_x L_y,$$

die Zeitableitung des Flusses somit

$$\frac{d}{dt} \int_{\mathcal{F}} d\vec{f} \cdot \vec{B} = BL_y \frac{dL_x}{dt} = BL_y v = -c \oint_{\partial\mathcal{F}} d\vec{l} \cdot \vec{E}$$

in Übereinstimmung mit (4.3).

Wir bemerken noch, dass das durch den induzierten Strom erzeugte Magnetfeld in diesem Fall in die negative z -Richtung zeigt, also dem angelegten Magnetfeld \vec{B} entgegengerichtet ist. Bewegt man das Teilstück in die negative x -Richtung, wird das angelegte Magnetfeld stattdessen verstärkt. Dies ist ein Beispiel für die

Lenz'sche Regel: Der induzierte Strom erzeugt ein Magnetfeld, das der Änderung des magnetischen Flusses entgegenwirkt.

oder, in einer dramatischeren Formulierung[†]

Nature abhors a change in flux.

4.2. Der Maxwell'sche Verschiebungsstrom

Die magnetostatische Feldgleichung (3.19) impliziert, dass die Stromdichte \vec{j} divergenzfrei sein muss, vgl. (3.11). In einer zeitabhängigen Situation, bei der sich die Ladungsdichte ρ verändert, ist dies nicht verträglich mit der Kontinuitätsgleichung (3.10). Wir ergänzen deshalb die magnetostatische Beziehung (3.19) um einen zunächst noch unbekanntem Strombeitrag \vec{j}_M , und schreiben

$$\vec{j} = \frac{c}{4\pi}(\nabla \times \vec{B}) - \vec{j}_M. \quad (4.5)$$

[†] Nach D.J. Griffiths, *Introduction to Electrodynamics*; engl. *abhor* = verabscheuen.

Einsetzen in die Kontinuitätsgleichung (3.10) ergibt, unter Ausnutzung der elektrostatischen Feldgleichung (2.11),

$$\nabla \cdot \vec{j} = -\nabla \cdot j_M = -\frac{\partial \rho}{\partial t} = -\frac{1}{4\pi} \frac{\partial}{\partial t} (\nabla \cdot \vec{E}) = -\nabla \cdot \left(\frac{1}{4\pi} \frac{\partial \vec{E}}{\partial t} \right),$$

und wir identifizieren $\vec{j}_M = (1/4\pi) \partial \vec{E} / \partial t$. Damit wird aus (4.5)

$$\nabla \times \vec{B} = \frac{4\pi}{c} (\vec{j} + \vec{j}_M) = \frac{4\pi}{c} \vec{j} + \frac{1}{c} \frac{\partial \vec{E}}{\partial t}. \quad (4.6)$$

Der Maxwell'sche Verschiebungstrom \vec{j}_M wurde von Maxwell aufgrund von theoretischen Überlegungen[‡] postuliert. Wir werden später sehen, dass dieser Term für die Existenz von elektromagnetischen Wellen unabdingbar ist, die eine der zentralen Vorhersagen Maxwell's darstellt.

Mit (4.6) ist der Satz von vier Maxwell-Gleichungen komplett. Wir schreiben sie der Vollständigkeit halber noch einmal auf[§]:

$$\nabla \cdot \vec{B} = 0 \quad (4.7)$$

$$\nabla \times \vec{E} + \frac{1}{c} \frac{\partial \vec{B}}{\partial t} = 0 \quad (4.8)$$

$$\nabla \cdot \vec{E} = 4\pi \rho \quad (4.9)$$

$$\nabla \times \vec{B} - \frac{1}{c} \frac{\partial \vec{E}}{\partial t} = \frac{4\pi}{c} \vec{j}. \quad (4.10)$$

Die Gleichungen (4.7,4.8) sind die *homogenen* Maxwell-Gleichungen, sie enthalten keine Quellen (ρ, \vec{j}) , die Gleichungen (4.9,4.10) heissen entsprechend *inhomogen*. In den folgenden Abschnitten sollen einige allgemeine Eigenschaften der Maxwell-Gleichungen diskutiert werden.

4.3. Energie des elektromagnetischen Feldes

Aus der Elektrostatik kennen wir den Ausdruck (2.19) für die Energiedichte des elektrischen Feldes. Hier untersuchen wir, wie sich der Begriff der Energiedichte auf zeitabhängige Situationen verallgemeinern lässt. Wir gehen wieder aus von einem System von N geladenen Punktteilchen in äusseren elektrischen und magnetischen Felder, auf die sich die Begriffe der Mechanik anwenden lassen. Wir bezeichnen mit E_{mat} die Gesamtenergie des Teilchensystems. In einem infinitesimalen Zeitintervall dt ändert sich diese Energie durch die auf die Teilchen wirkenden elektrischen und magnetischen

[‡] Die allerdings nicht auf der Forderung von Ladungserhaltung beruhen!

[§] Im SI-System:

$$\nabla \cdot \vec{B} = 0, \quad \nabla \times \vec{E} + \frac{\partial \vec{B}}{\partial t} = 0, \quad \nabla \cdot \vec{E} = (1/\epsilon_0)\rho, \quad \nabla \times \vec{B} - \mu_0 \epsilon_0 \frac{\partial \vec{E}}{\partial t} = \mu_0 \vec{j}.$$

Kräfte \vec{F}_i ,

$$dE_{\text{mat}} = \sum_{i=1}^N \vec{F}_i \cdot d\vec{r}_i = \sum_{i=1}^N \vec{F}_i \cdot \vec{v}_i dt = \sum_{i=1}^N q_i [\vec{E}(\vec{r}_i, t) + \frac{1}{c}(\vec{v}_i \times \vec{B}(\vec{r}_i, t))] \cdot \vec{v}_i dt$$

Das Magnetfeld trägt zur Energieänderung nicht bei, da der magnetische Beitrag zur Lorentz-Kraft senkrecht auf der Geschwindigkeit steht. Den elektrischen Beitrag können wir unter Benutzung von (3.4) als Volumenintegral über die Stromdichte schreiben,

$$\frac{dE_{\text{mat}}}{dt} = \int d^3r \vec{j} \cdot \vec{E}. \quad (4.11)$$

Nun nutzen wir die Maxwell-Gleichungen, um den Integranden ganz durch die Felder \vec{E} , \vec{B} auszudrücken. Auflösen von (4.10) nach \vec{j} ergibt

$$\vec{j} \cdot \vec{E} = \frac{c}{4\pi} \vec{E} \cdot (\nabla \times \vec{B}) - \frac{1}{4\pi} \vec{E} \cdot \frac{\partial \vec{E}}{\partial t}. \quad (4.12)$$

Es gilt

$$\frac{\partial}{\partial t} |\vec{E}|^2 = 2\vec{E} \cdot \frac{\partial \vec{E}}{\partial t} \quad (4.13)$$

und

$$\frac{\partial}{\partial t} |\vec{B}|^2 = 2\vec{B} \cdot \frac{\partial \vec{B}}{\partial t} = -2c\vec{B} \cdot (\nabla \times \vec{E}), \quad (4.14)$$

wobei im zweiten Schritt das Induktionsgesetz (4.8) ausgenutzt wurde. Weiter gilt die Identität

$$\nabla \cdot (\vec{E} \times \vec{B}) = \vec{B} \cdot (\nabla \times \vec{E}) - \vec{E} \cdot (\nabla \times \vec{B}) \quad (4.15)$$

für Vektorfelder. Mit (4.13,4.14,4.15) wird aus (4.12)

$$\vec{j} \cdot \vec{E} = -\frac{c}{4\pi} \nabla \cdot (\vec{E} \times \vec{B}) - \frac{1}{8\pi} \frac{\partial}{\partial t} (|\vec{E}|^2 + |\vec{B}|^2). \quad (4.16)$$

Wir wenden die Beziehungen (4.11) und (4.16) auf zwei verschiedenen Situationen an. Zunächst betrachten wir eine Konfiguration von Teilchen und Feldern, die ganz in einem abgeschlossenen Raumbereich liegen, und wir integrieren beide Seiten von (4.16) über ein Volumen \mathcal{V} , das diesen Raumbereich umschließt. Dann gilt

$$\frac{dE_{\text{mat}}}{dt} = -\frac{\partial}{\partial t} \int_{\mathcal{V}} d^3r \frac{1}{8\pi} (|\vec{E}|^2 + |\vec{B}|^2) - \frac{c}{4\pi} \int_{\mathcal{V}} d^3r \nabla \cdot (\vec{E} \times \vec{B}). \quad (4.17)$$

Der zweite Term auf der rechten Seite wird durch Anwendung des Gauss'schen Satzes

$$\int_{\mathcal{V}} d^3r \nabla \cdot (\vec{E} \times \vec{B}) = \int_{\partial\mathcal{V}} d\vec{f} \cdot (\vec{E} \times \vec{B}) = 0,$$

da das Volumen so gewählt werden kann, dass die Felder auf dem Rand verschwinden. Damit lässt sich (4.17) als Energiebilanzgleichung schreiben,

$$\frac{d}{dt} (E_{\text{mat}} + E_{\text{em}}) = 0, \quad (4.18)$$

mit der *elektromagnetischen Feldenergie*

$$E_{\text{em}} = \frac{1}{8\pi} \int_{\mathcal{V}} d^3r (|\vec{E}|^2 + |\vec{B}|^2) = \int_{\mathcal{V}} d^3r u(\vec{r}, t) \quad (4.19)$$

und der *Energiedichte des elektromagnetischen Feldes*||

$$u = \frac{1}{8\pi} (|\vec{E}|^2 + |\vec{B}|^2). \quad (4.20)$$

Gleichung (4.18) drückt die Erhaltung der Gesamtenergie des Systems *Feld + materielle Teilchen* aus, und (4.20) verallgemeinert den elektrostatischen Ausdruck (2.19).

Betrachten wir nun stattdessen das elektromagnetische Feld in Abwesenheit von Materie, so muss die rechte Seite von (4.17) für jedes Volumen \mathcal{V} verschwinden, und wir folgern für die Integranden die Beziehung

$$\frac{\partial u}{\partial t} + \frac{c}{4\pi} \nabla \cdot (\vec{E} \times \vec{B}) = 0. \quad (4.21)$$

Dies hat genau die gleiche mathematische Form wie die Kontinuitätsgleichung (3.10) für die Ladungsdichte ρ , und wie diese ist (4.21) Ausdruck der *lokalen* Erhaltung der elektromagnetischen Feldenergie. Die zugehörige *Energiestromdichte*

$$\vec{S} = \frac{c}{4\pi} (\vec{E} \times \vec{B}) \quad (4.22)$$

wird auch *Poynting-Vektor* genannt. Die allgemeine Form der lokalen Energiebilanz in Gegenwart einer Stromverteilung \vec{j} lautet entsprechend

$$\frac{\partial u}{\partial t} + \frac{c}{4\pi} \nabla \cdot (\vec{E} \times \vec{B}) = -\vec{j} \cdot \vec{E}. \quad (4.23)$$

4.4. Impuls des elektromagnetischen Feldes

Wir beginnen mit einer kurzen Rückbesinnung auf das dritte Newton'sche Gesetz (Kap. 3 des Mechanik-Teils der Vorlesung). In seiner schwachen Form, die für den Beweis des Impulssatzes (aber nicht des Drehimpulssatzes!) ausreicht, lautet es bekanntlich

$$\vec{F}_{ij} = -\vec{F}_{ji}, \quad (4.24)$$

wobei \vec{F}_{ij} die vom Teilchen j auf das Teilchen i ausgeübte Kraft bezeichnet. Wir untersuchen hier die Gültigkeit von (4.24) für die Wechselwirkung zwischen bewegten Ladungen. Zwar steht uns das Rüstzeug für eine quantitative Analyse dieser Situation noch nicht zur Verfügung, aber die zentrale Schlussfolgerung lässt sich schon aufgrund von einfachen Symmetrieüberlegungen ziehen¶.

Die Anordnung des Gedankenexperiments ist in Abb.16 skizziert. Wir betrachten zwei Ladungen q_1, q_2 mit Geschwindigkeiten $\vec{v}_1 = -v_1 \vec{e}_x$ und $\vec{v}_2 = -v_2 \vec{e}_z$. Wir stellen uns die Ladungen als kleine Stromelemente vor, und schliessen aus der differentiellen

|| Im SI-System:

$$u = \frac{1}{2} \left(\epsilon_0 |\vec{E}|^2 + \frac{1}{\mu_0} |\vec{B}|^2 \right), \quad \vec{S} = \frac{1}{\mu_0} (\vec{E} \times \vec{B}).$$

¶ Wir folgen hier D.J. Griffiths, *Introduction to Electrodynamics*, Kap.8.

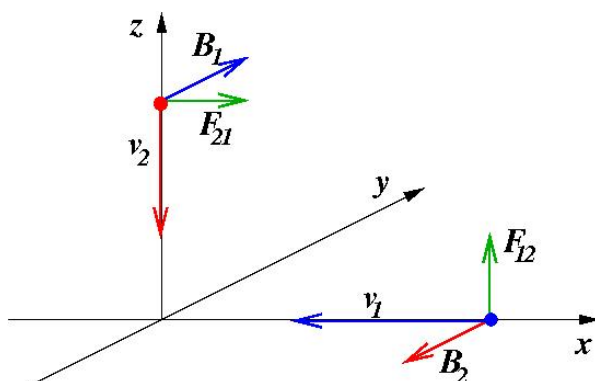


Abbildung 16. Illustration der Verletzung des dritten Newton'schen Gesetzes durch die magnetische Wechselwirkung.

Form (3.6) des Biot-Savart-Gesetzes auf die Richtung des von q_1 (bzw. q_2) am Ort von q_2 (bzw. q_1) erzeugten Magnetfeldes \vec{B}_1 (bzw. \vec{B}_2). Es gilt $\vec{B}_1 = B_1\vec{e}_y$ und $\vec{B}_2 = -B_2\vec{e}_y$. Der magnetische Anteil der entsprechenden Lorentz-Kraft ist deshalb⁺

$$\vec{F}_{21} = \frac{q_2}{c}(\vec{v}_2 \times \vec{B}_1) = F_{21}\vec{e}_x, \quad \vec{F}_{12} = \frac{q_1}{c}(\vec{v}_1 \times \vec{B}_2) = F_{12}\vec{e}_z. \quad (4.25)$$

Die beiden Kräfte sind offensichtlich *nicht* antiparallel, das dritte Newton'sche Gesetz (und damit der mechanische Impulssatz) ist verletzt. Das bedeutet, dass das mechanische System mit dem elektromagnetischen Feld nicht nur Energie, sondern auch Impuls austauscht. Weitergehende Überlegungen zeigen, dass die *Impulsdichte* des elektromagnetischen Feldes durch den Ausdruck

$$\vec{g}_{\text{em}} = \frac{1}{4\pi c}(\vec{E} \times \vec{B}) = \frac{1}{c^2}\vec{S} \quad (4.26)$$

gegeben ist, sie ist also proportional zur Energiestromdichte \vec{S} .

4.5. Maxwell-Gleichungen für die Potentiale

In der Elektro- und Magnetostatik hat es sich als vorteilhaft erwiesen, die Felder durch *Potentiale* (das skalare Potential Φ und das Vektorpotential \vec{A}) auszudrücken. In diesem Abschnitt soll der Potentialbegriff auf zeitabhängige Situationen verallgemeinert werden.

Die Möglichkeit, das Magnetfeld gemäss (3.14) als Rotation eines Vektorpotentials darzustellen, folgt aus der Divergenzfreiheit (3.17) des Magnetfeldes, die im zeitabhängigen Fall erhalten bleibt, s. (1.6); (3.14) lässt sich also direkt übernehmen. Dagegen wird die Rotationsfreiheit (2.10) des elektrostatischen Feldes durch das Induktionsgesetz (4.8) verletzt, sodass die Beziehung (2.7) zwischen dem elektrischen Feld und dem skalaren Potential abgeändert werden muss. Wir schreiben (4.8) mit Hilfe

⁺ Wir konzentrieren uns hier auf den *magnetischen* Anteil der Wechselwirkung zwischen den Teilchen und ignorieren die natürlich ebenfalls vorhandene *elektrische* Wechselwirkung, die als Zentralkraft für das Argument ohne Bedeutung ist.

von (3.14) um in der Form

$$\nabla \times \vec{E} + \frac{1}{c} \frac{\partial}{\partial t} (\nabla \times \vec{A}) = \nabla \times \left(\vec{E} + \frac{1}{c} \frac{\partial \vec{A}}{\partial t} \right) = 0.$$

Die Grösse in der grossen Klammer ist offensichtlich rotationsfrei, d.h. es gibt gemäss (1.5) ein Potential $\Phi(\vec{r}, t)$, sodass*

$$\vec{E} + \frac{1}{c} \frac{\partial \vec{A}}{\partial t} = -\nabla \Phi \Rightarrow \vec{E} = -\nabla \Phi - \frac{1}{c} \frac{\partial \vec{A}}{\partial t}. \quad (4.27)$$

Die letzte Gleichung ersetzt die elektrostatische Beziehung $\vec{E} = -\nabla \Phi$.

Wie in Abschnitt 3.4 diskutiert wurde, definiert die Beziehung (3.14) das Vektorpotential nur bis auf den Gradienten einer skalaren Funktion Λ , die nun von Ort und Zeit abhängen kann. Eine allgemeine Eichtransformation (3.15) soll Magnetfeld und elektrisches Feld invariant lassen. Für das Magnetfeld ist das offensichtlich, aber das elektrische Feld transformiert sich nun gemäss (4.27) zu

$$\vec{E} \rightarrow \vec{E}' = -\nabla \Phi' - \frac{1}{c} \frac{\partial \vec{A}'}{\partial t} = -\nabla \left(\Phi' + \frac{1}{c} \frac{\partial \Lambda}{\partial t} \right) - \frac{1}{c} \frac{\partial \vec{A}}{\partial t}.$$

Damit dies gleich $\vec{E}' = -\nabla \Phi' - (1/c) \partial \vec{A}' / \partial t$ ist, muss sich das skalare Potential gemäss

$$\Phi \rightarrow \Phi' = \Phi - \frac{1}{c} \frac{\partial \Lambda}{\partial t} \quad (4.28)$$

transformieren.

Mit (3.14) und (4.27) sind die homogenen Maxwell-Gleichungen (4.7) und (4.8) identisch erfüllt. Wir nutzen nun die inhomogenen Gleichungen (4.9) und (4.10), um Beziehungen zwischen den Potentialen und den Quellen (ρ, \vec{j}) herzuleiten. Wir beginnen mit (4.10):

$$\begin{aligned} \nabla \times \vec{B} - \frac{1}{c} \frac{\partial \vec{E}}{\partial t} &= \nabla \times (\nabla \times \vec{A}) + \frac{1}{c} \frac{\partial}{\partial t} \left(\nabla \Phi + \frac{1}{c} \frac{\partial \vec{A}}{\partial t} \right) = \\ &= \nabla (\nabla \cdot \vec{A}) - \nabla^2 \vec{A} + \nabla \frac{1}{c} \frac{\partial \Phi}{\partial t} + \frac{1}{c^2} \frac{\partial^2 \vec{A}}{\partial t^2} = \\ &= - \left(\nabla^2 - \frac{1}{c^2} \frac{\partial^2}{\partial t^2} \right) \vec{A} + \nabla \left(\nabla \cdot \vec{A} + \frac{1}{c} \frac{\partial \Phi}{\partial t} \right) = \frac{4\pi}{c} \vec{j}. \end{aligned} \quad (4.29)$$

Im zweiten Schritt wurde die Identität

$$\nabla \times (\nabla \times \vec{A}) = \nabla (\nabla \cdot \vec{A}) - \nabla^2 \vec{A}$$

benutzt, die für beliebige Vektorfelder gilt.

* Im SI-System:

$$\vec{E} = -\nabla \Phi - \frac{\partial \vec{A}}{\partial t}.$$

Zur Vereinfachung von (4.29) nutzen wir die Möglichkeit, eine spezielle Eichung des Vektorpotentials zu wählen. Wir wählen hier in Verallgemeinerung der statischen Coulomb-Eichung $\nabla \cdot \vec{A} = 0$ die *Lorentz-Eichung*‡

$$\nabla \cdot \vec{A} + \frac{1}{c} \frac{\partial \Phi}{\partial t} = 0. \quad (4.30)$$

Damit fällt der zweite Term auf der linken Seite von (4.29) weg, und die Maxwell-Gleichung für das Vektorpotential lautet††

$$\left(\nabla^2 - \frac{1}{c^2} \frac{\partial^2}{\partial t^2} \right) \vec{A} = -\frac{4\pi}{c} \vec{j}. \quad (4.31)$$

Aus der elektrostatischen Feldgleichung (4.7) folgt schliesslich unter Verwendung von (4.30)

$$\begin{aligned} \nabla \cdot \vec{E} &= -\nabla \cdot \left(\nabla \Phi + \frac{1}{c} \frac{\partial \vec{A}}{\partial t} \right) = -\nabla^2 \Phi - \frac{1}{c} \frac{\partial}{\partial t} (\nabla \cdot \vec{A}) = \\ &= -\left(\nabla^2 - \frac{1}{c^2} \frac{\partial^2}{\partial t^2} \right) \Phi = 4\pi \rho. \end{aligned} \quad (4.32)$$

Der Vergleich von (4.32) und (4.31) mit den entsprechenden statischen Beziehungen, den Poisson-Gleichungen (2.12) und (3.20), zeigt, dass in beiden Fällen der Laplace-Operator ∇^2 durch den *d'Alembert-Operator*

$$\square = \nabla^2 - \frac{1}{c^2} \frac{\partial^2}{\partial t^2} = \frac{\partial^2}{\partial x^2} + \frac{\partial^2}{\partial y^2} + \frac{\partial^2}{\partial z^2} - \frac{1}{c^2} \frac{\partial^2}{\partial t^2} \quad (4.33)$$

ersetzt wird. Hier deutet sich die für die relativistische Formulierung der Elektrodynamik charakteristische *Symmetrie* zwischen Zeit und Raum schon an.

4.6. Ebene elektromagnetische Wellen

Wir zeigen, wie aus (4.31) und (4.32) die Existenz und elementare Eigenschaften von elektromagnetischen Wellen gefolgert werden kann. Im Vakuum ist $\rho = 0$ und $\vec{j} = 0$, sodass die beiden Gleichungen sich auf

$$\left(\nabla^2 - \frac{1}{c^2} \frac{\partial^2}{\partial t^2} \right) \vec{A} = 0, \quad \left(\nabla^2 - \frac{1}{c^2} \frac{\partial^2}{\partial t^2} \right) \Phi = 0 \quad (4.34)$$

reduzieren. Wir machen den Ansatz einer *ebenen* Welle, die sich o.B.d.A. in x -Richtung ausbreiten soll (Abb. 17). Die Wellenfronten verlaufen parallel zur (y, z) -Ebene, sodaß \vec{A} und Φ unabhängig von y und z sind,

$$\vec{A} = \vec{A}(x, t), \quad \Phi = \Phi(x, t).$$

‡ Im SI-System:

$$\nabla \cdot \vec{A} + \frac{1}{c^2} \frac{\partial \Phi}{\partial t} = 0.$$

†† Im SI-System steht auf der rechten Seite von (4.31) $-\vec{j}/\epsilon_0 c^2$, auf der rechten Seite von (4.32) ρ/ϵ_0 , die Form des d'Alembert-Operators bleibt aber gleich.

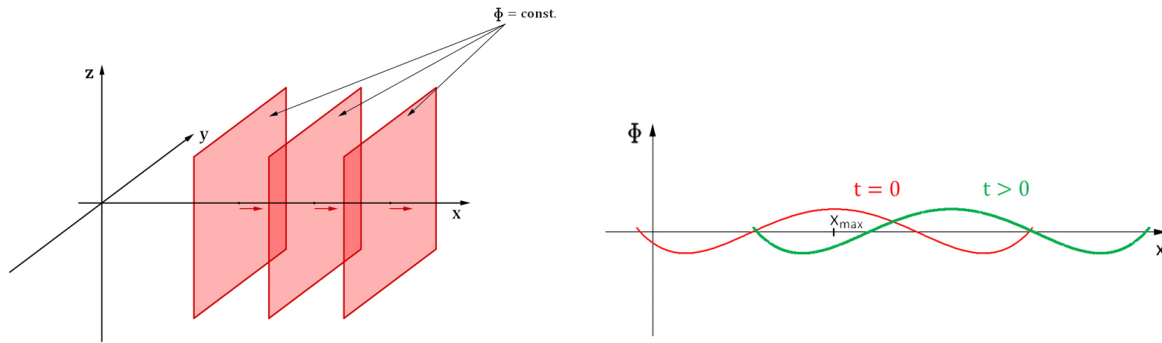


Abbildung 17. Illustration einer sich entlang der x -Achse ausbreitenden ebenen Welle am Beispiel des skalaren Potentials $\Phi(\vec{r}, t)$. Links: Die Wellenfronten $\Phi = \text{const.}$ sind Ebenen parallel zur (y, z) -Ebene. Rechts: Die rechtslaufende Lösung der eindimensionalen Wellengleichung (4.35). Eine beliebige anfänglich vorgegebene Funktion $\phi^{(r)}(x)$ verschiebt sich mit konstanter Geschwindigkeit c in die positive x -Richtung.

Wir erhalten insgesamt vier *eindimensionale* Wellengleichungen

$$\left(\frac{\partial^2}{\partial x^2} - \frac{1}{c^2} \frac{\partial^2}{\partial t^2} \right) \vec{A} = 0, \quad \left(\frac{\partial^2}{\partial x^2} - \frac{1}{c^2} \frac{\partial^2}{\partial t^2} \right) \Phi = 0 \quad (4.35)$$

für die drei Komponenten von \vec{A} und für Φ . Die allgemeinen Lösungen sind aus den Übungen bekannt: Sie lassen sich als Kombination von links- und rechtslaufenden Wellen schreiben,

$$A_{x,y,z}(x, t) = a_{x,y,z}^{(r)}(x - ct) + a_{x,y,z}^{(l)}(x + ct) \quad (4.36)$$

$$\Phi(x, t) = \phi^{(r)}(x - ct) + \phi^{(l)}(x + ct), \quad (4.37)$$

mit Funktionen $a_{x,y,z}^{(r,l)}$ und $\phi^{(r,l)}$, die nur noch von *einer* Variablen $x - ct$ bzw. $x + ct$ abhängen (Abb. 17 rechts). Im folgenden betrachten wir nur die rechtslaufenden Lösungen und unterdrücken den entsprechenden Index. Dann haben wir zunächst vier frei wählbare Funktionen $a_{x,y,z}(\xi)$ und $\phi(\xi)$ von $\xi = x - ct$, die allerdings noch über die Lorentz-Eichung (4.30) verknüpft sind. Aus (4.30) folgt

$$\frac{\partial A_x}{\partial x} + \frac{1}{c} \frac{\partial \Phi}{\partial t} = 0 \quad \Rightarrow \quad \frac{da_x}{d\xi} = \frac{d\phi}{d\xi},$$

d.h. die beiden Funktionen sind bis auf eine additive Konstante gleich. Wir setzen deshalb

$$\phi(\xi) = a_x(\xi), \quad (4.38)$$

sodass noch drei unabhängige Funktionen verbleiben.

Die elektrischen und magnetischen Felder ergeben sich nun aus (3.14) und (4.27). Die x -Komponente des elektrischen Feldes z.B. ist

$$E_x = -\frac{\partial \Phi}{\partial x} - \frac{1}{c} \frac{\partial A_x}{\partial t} = -\frac{\partial}{\partial x} \phi(x - ct) - \frac{1}{c} \frac{\partial}{\partial t} a_x(x - ct) = -\frac{d\phi}{d\xi} + \frac{da_x}{d\xi} = 0$$

wegen (4.38). Genauso findet man

$$E_y = \frac{da_y}{d\xi}, \quad E_z = \frac{da_z}{d\xi}$$

und

$$B_x = 0, \quad B_y = -\frac{da_z}{d\xi} = -E_z, \quad B_z = \frac{da_y}{d\xi} = E_y,$$

woraus sich die wichtigsten Eigenschaften elektromagnetischer Wellen ablesen lassen:

- Es handelt sich um *transversale* Wellen, d.h. die Vektoren \vec{E} und \vec{B} stehen *senkrecht* auf der Ausbreitungsrichtung (hier: der x -Achse).
- Ausserdem gilt $\vec{E} \cdot \vec{B} = 0$ und (in unserem Einheitensystem!)[†]
- $|\vec{E}| = |\vec{B}|$.

Diese Ergebnisse lassen sich leicht auf eine beliebige Ausbreitungsrichtung, charakterisiert durch einen Einheitsvektor \vec{e} , verallgemeinern. Der Ansatz einer ebenen Welle in \vec{e} -Richtung lautet dann

$$\vec{A}(\vec{r}, t) = \vec{a}(\vec{r} \cdot \vec{e} - ct) = \vec{a}(\xi), \quad \Phi(\vec{r}, t) = \phi(\xi) \quad \text{mit} \quad \xi = \vec{r} \cdot \vec{e} - ct, \quad (4.39)$$

und die Felder ergeben sich zu

$$\vec{B} = \vec{e} \times \vec{a}', \quad \vec{E} = \vec{B} \times \vec{e} \quad \text{mit} \quad \vec{a}' = \frac{d\vec{a}}{d\xi}. \quad (4.40)$$

Die Energiedichte des elektromagnetischen Feldes ist gemäss (4.20)

$$u = \frac{1}{8\pi} (|\vec{E}|^2 + |\vec{B}|^2) = \frac{1}{4\pi} |\vec{E}|^2 = \frac{1}{4\pi} |\vec{B}|^2. \quad (4.41)$$

Wegen $|\vec{E}| = |\vec{B}|$ tragen beide Felder gleichviel zur Energiedichte bei. Die Energiestromdichte ergibt sich schliesslich aus (4.22) zu

$$\vec{S} = \frac{c}{4\pi} (\vec{E} \times \vec{B}) = \frac{c}{4\pi} (\vec{B} \times \vec{e}) \times \vec{B} = \frac{c}{4\pi} |\vec{B}|^2 \vec{e} = cu\vec{e}. \quad (4.42)$$

Der letzte Ausdruck hat eine sehr einfache, anschauliche Bedeutung: Die Energiedichte u fliesst mit Geschwindigkeit c in Richtung des Ausbreitungsvektors \vec{e} .

4.7. Retardierte Potentiale und Dipolstrahlung

Wir fragen, analog zu Abschnitt 2.6, nach den elektromagnetischen Feldern einer räumlich begrenzten, zeitabhängigen Ladungs- und Stromverteilung im Fernfeld. Ausgangspunkt sind die inhomogenen Maxwell-Gleichungen (4.31, 4.32) für die Potentiale. Im statischen Fall sind die Lösungen bekanntlich gegeben durch (2.21) für das elektrostatische Potential und (3.13) für das Vektorpotential einer stationären Stromverteilung in Coulomb-Eichung. Spezielle Lösungen der inhomogenen,

[†] Im SI-System ist stattdessen $|\vec{E}| = c|\vec{B}|$.

zeitabhängigen Gleichungen (4.31, 4.32), die die statischen Lösungen in natürlicher Weise verallgemeinern, sind die *retardierten Potentiale*‡

$$\Phi(\vec{r}, t) = \int d^3r' \frac{\rho(\vec{r}', t - c^{-1}|\vec{r} - \vec{r}'|)}{|\vec{r} - \vec{r}'|}, \quad (4.43)$$

$$\vec{A}(\vec{r}, t) = \frac{1}{c} \int d^3r' \frac{\vec{j}(\vec{r}', t - c^{-1}|\vec{r} - \vec{r}'|)}{|\vec{r} - \vec{r}'|}. \quad (4.44)$$

Anschaulich bedeutet dies, dass die Felder am Ort \vec{r} zur Zeit t durch die Ladungs- und Stromverteilung zu einer früheren Zeit

$$t' = t - \frac{|\vec{r} - \vec{r}'|}{c}$$

bestimmt sind, wobei $c^{-1}|\vec{r} - \vec{r}'|$ gerade die Laufzeit einer elektromagnetischen Welle von \vec{r}' nach \vec{r} ist.

Wir werten nun (4.44) in einer Multipolentwicklung aus, d.h. wir nehmen an, dass $|\vec{r}'| \ll |\vec{r}|$. Zu führender Ordnung ist

$$\frac{1}{|\vec{r} - \vec{r}'|} \approx \frac{1}{|\vec{r}|} \equiv \frac{1}{r}, \quad t - \frac{|\vec{r} - \vec{r}'|}{c} \approx t - \frac{r}{c}$$

und damit

$$\vec{A}(\vec{r}, t) \approx \frac{1}{cr} \int d^3r' \vec{j}(\vec{r}', t - r/c). \quad (4.45)$$

Dieser Ausdruck hat die Form eines Monopol-Terms, der in der Magnetostatik verschwinden muss (vgl. Abschnitt 3.6). Hier können wir das Integral über die Stromdichte mit Hilfe der Kontinuitätsgleichung (3.10) durch die Zeitableitung des elektrischen Dipomoments (2.28) ausdrücken. Dazu schreiben wir

$$\frac{d}{dt} \vec{d} = \frac{d}{dt} \int d^3r' \vec{r}' \rho(\vec{r}', t) = \int d^3r' \vec{r}' \frac{\partial \rho}{\partial t} = - \int d^3r' \vec{r}' (\nabla' \cdot \vec{j}).$$

Im Integral führen wir komponentenweise eine partielle Intergration durch, und erhalten so z.B.

$$\int d^3r' x' (\nabla' \cdot \vec{j}) = \int d^3r' x' \left(\frac{\partial j_x}{\partial x'} + \frac{\partial j_y}{\partial y'} + \frac{\partial j_z}{\partial z'} \right) = - \int d^3r' j_x$$

und analog für die y' - und z' -Terme. Damit folgt aus (4.45)

$$\vec{A}(\vec{r}, t) \approx \frac{1}{cr} \frac{d}{dt} \vec{d}(t - r/c) = \frac{1}{cr} \dot{\vec{d}}(t - r/c). \quad (4.46)$$

Bis auf die r -Abhängigkeit des Vorfaktors $1/cr$, die zu Korrekturen höherer Ordnung führt, ist das Vektorpotential genau von der Form (4.39) einer ebenen Welle mit

‡ Die *avancierten* Potentiale, bei denen die Felder von der *zukünftigen* Konfiguration der Quellen zum Zeitpunkt $t + c^{-1}|\vec{r} - \vec{r}'|$ abhängen, sind ebenfalls Lösungen der inhomogenen Maxwell-Gleichungen. Sie werden üblicherweise durch die Forderung nach Kausalität (erst die Ursache, dann die Wirkung) ausgeschlossen.

Ausbreitung in radialer Richtung, $\vec{e} = \vec{e}_r = \vec{r}/r$. Wir können somit die Beziehungen (4.40) übernehmen und erhalten

$$\vec{B}(\vec{r}, t) = -\frac{1}{c^2 r}(\vec{e}_r \times \ddot{\vec{d}}(t - r/c)), \quad \vec{E}(\vec{r}, t) = \vec{B} \times \vec{e}_r. \quad (4.47)$$

Die Feldstärken nehmen in radialer Richtung ab wie $|\vec{E}|, |\vec{B}| \sim 1/r$, also viel langsamer als bei statischen Feldern. Daraus folgt ein Abfall der Energiestromdichte (4.42) wie $1/r^2$, weshalb ein endlicher Energiestrom von der Strahlungsquelle ins Unendliche fließt.

5. Spezielle Relativitätstheorie

In seiner berühmten Arbeit† *Zur Elektrodynamik bewegter Körper* geht Albert Einstein aus von der Beobachtung, dass

die Elektrodynamik Maxwells...in ihrer Anwendung auf bewegte Körper zu Asymmetrien führt, welche den Phänomenen nicht anzuhaften scheinen.

Als Beispiel diskutiert er die in Abschnitt 4.1 dargestellte Interpretation des Induktionsgesetzes aus der Sicht eines bewegten Leiters, in dem kein elektrisches Feld herrscht, sondern die Ladungen aufgrund der Lorentz-Kraft in Bewegung gesetzt werden. Einstein möchte die Elektrodynamik so umformulieren, dass es (wie in der Newton'schen Mechanik) nur auf Relativbewegungen ankommt; er postuliert ein verallgemeinertes Relativitätsprinzip, das die aus der Mechanik bekannte Äquivalenz von Inertialsystemen auf die Gesetze der Elektrodynamik ausweitet. Wie wir in diesem Kapitel sehen werden, revolutionierte er mit diesem Schritt das gesamte Gebäude der Physik des 19. Jahrhunderts und die damit verbundenen Vorstellungen von Raum und Zeit.

5.1. Das Einstein'sche Relativitätsprinzip

Wir erinnern uns zunächst an das Galilei'sche Relativitätsprinzip (Abschnitt 4.1 des Mechanik-Teils) und fragen mit Einstein, ob ein solches Prinzip auch für die Gesetze der Elektrodynamik gültig ist. Die Existenz von elektromagnetischen Wellen scheint dagegen zu sprechen; wir geben zwei Versionen des Arguments an:

- (i) Die Lichtgeschwindigkeit c ändert sich unter speziellen Galilei-Transformationen. Wie in Abschnitt 4.1 des Mechanik-Teils betrachten wir zwei Bezugssysteme (BS), die sich relativ zueinander mit Geschwindigkeit w_0 in x -Richtung bewegen. Wird von einer in S' ruhenden Lichtquelle ein Lichtsignal (mit Lichtgeschwindigkeit c') in positive x -Richtung ausgesandt, so misst der Beobachter in S (nach dem Galilei'schen Gesetz der Geschwindigkeitsaddition) die Lichtgeschwindigkeit

$$c = w_0 + c' \neq c'. \quad (5.1)$$

† Annalen der Physik **17**, 891-921 (1905).

- (ii) Das Medium, in dem sich die Lichtwellen (analog zu Schallwellen) ausbreitet, der sogenannte *Äther*, definiert ein BS absoluter Ruhe. Bewegungen relativ zum Äther müssten sich deshalb durch elektromagnetische Experimente (insbesondere durch eine Richtungsabhängigkeit der Lichtgeschwindigkeit relativ zur Bewegungsrichtung) nachweisen lassen, verschiedene BS wären nicht äquivalent‡.

Experimente vom Typ (ii) wurden um die Jahrhundertwende von Michelson und Morley durchgeführt, die aber keinen Effekt der Bewegung relativ zum Äther nachweisen konnten. Einstein postulierte deshalb ein verallgemeinertes Relativitätsprinzip, das auch für die Elektrodynamik gelten soll:

- Die Gesetze der Physik (d.h. der Mechanik *und* der Elektrodynamik) gelten in allen Inertialsystemen (IS).
- Die Lichtgeschwindigkeit im Vakuum hat in allen IS den gleichen Wert.

Die zweite Aussage ist insoweit eine Folge der ersten, als der Wert der Lichtgeschwindigkeit im Vakuum Bestandteil der Maxwell-Gleichungen ist. Wegen ihrer überragenden Bedeutung formulieren wir sie hier aber als separates Postulat.

Wie wir sehen werden, hat das Einstein'sche Postulat gravierende Folgen:

- (i) Die Transformation zwischen IS kann *nicht* durch Galilei-Transformationen beschrieben werden, denn diese widersprechen (wie oben gezeigt) der Konstanz der Lichtgeschwindigkeit. Wir benötigen also eine neue, relativistische Kinematik, und die Galilei-Transformation muss durch die Lorentz-Transformation ersetzt werden. Insbesondere wird das Galilei'sche Gesetz der Addition von Geschwindigkeiten (5.1) bei Transformation zwischen zwei Bezugssystemen mit Relativgeschwindigkeit w_0 ersetzt durch

$$v = \frac{v' + w_0}{1 + \frac{v'w_0}{c^2}}, \quad (5.2)$$

wie wir in Abschnitt 5.3 zeigen werden. Setzt man in (5.2) $v' = c$, so folgt in der Tat auch $v = c$.

- (ii) Da die Galilei-Transformation den physikalischen Gehalt der Newton'schen Gesetze widerspiegelt, müssen auch diese abgeändert werden, d.h. wir bekommen eine neue *relativistische Dynamik*.

Dagegen bleiben die Gesetze der Elektrodynamik ihrem Gehalt nach unverändert, sie werden lediglich relativistisch interpretiert.

‡ Dies ist ganz analog zum Auftreten von Reibungskräften bei der Bewegung relativ zu einem viskosen Fluid, s. Abschnitt 4.1 des Mechanik-Teils.

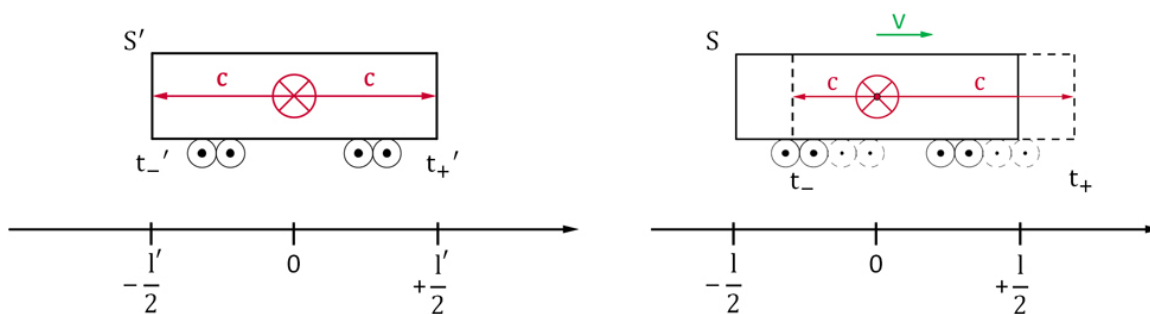


Abbildung 18. Zur Relativität der Gleichzeitigkeit.

5.2. Relativistische Kinematik

In diesem Abschnitt analysieren wir einige einfache Gedankenexperimente mit Licht, das von einer Quelle in einem bewegten BS S' (dem “Zug”) ausgesandt wird. Die Experimente werden einerseits in S' , andererseits in einem ortsfesten BS S (dem “Bahnsteig”) unter Annahme des Einstein’schen Relativitätsprinzips interpretiert. Daraus ergeben sich die wesentlichen kinematischen Beziehungen der speziellen Relativitätstheorie, die wir dann in Abschnitt 5.3 in der Lorentz-Transformation formalisieren. Die Relativgeschwindigkeit zwischen den beiden BS wird hier (statt mit w_0) durchgängig mit v bezeichnet.

5.2.1. Relativität der Gleichzeitigkeit. Zur Zeit $t = 0$ wird ein Lichtsignal von der Mitte eines Waggons, der (in S' !) die Länge ℓ' besitzt, ausgesandt. Wann erreicht das Lichtsignal das vordere (Zeit t_+) bzw. das hintere (Zeit t_-) Ende des Waggons? In S' ist die Antwort einfach: Die Laufzeiten des Lichtes zum vorderen und hinteren Ende sind gleich, es gilt

$$t_+ = t_- = \frac{\ell'}{2c}.$$

In S ist die Länge ℓ des Waggons (wie wir noch sehen werden) eine andere, was aber für diese Überlegung keine Rolle spielt. Entscheidend ist, dass die Lichtgeschwindigkeit nach wie vor c beträgt, die Relativgeschwindigkeit zwischen dem Lichtsignal und den Enden des Waggons sich deshalb in Vorwärts- und Rückwärtsrichtung unterscheidet. Das vordere Ende läuft dem Lichtsignal davon und wird erst zur Zeit

$$t_+ = \frac{\ell}{2(c-v)}$$

erreicht, das hintere Ende läuft dem Lichtsignal entgegen und wird zur Zeit

$$t_- = \frac{\ell}{2(c+v)} < t_+$$

erreicht. Die beiden Ereignisse (Ankunft des Lichtsignals vorne bzw. hinten) sind somit in S' gleichzeitig, in S aber nicht. Es gibt keinen absoluten Begriff der Gleichzeitigkeit

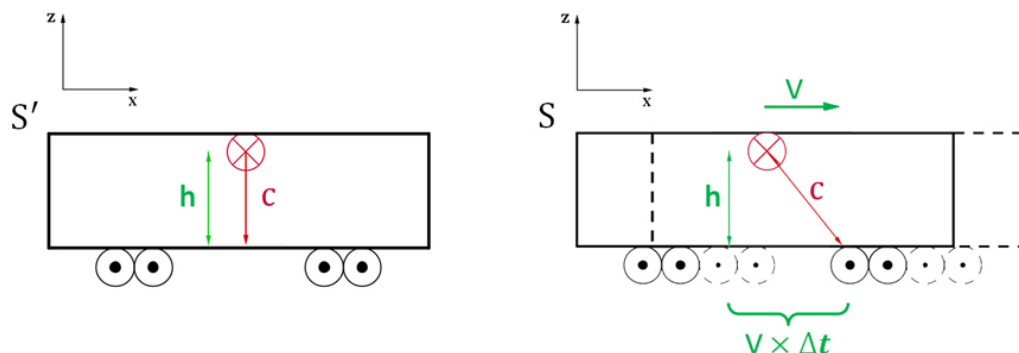


Abbildung 19. Illustration zur Zeitdilatation.

verschiedener Ereignisse mehr, und damit (im Gegensatz zur Newton'schen Physik) **keinen absoluten, vom BS unabhängigen Zeitbegriff**§.

5.2.2. *Zeitdilatation.* Wir betrachten jetzt eine schematische Zeitmessung. Zur Zeit $t = t' = 0$ wird in S' ein Lichtsignal aus der Höhe h senkrecht nach unten ausgesandt (Abb. 20). Wann erreicht es den Boden des Waggons? In S' ist die Antwort einfach

$$\Delta t' = h/c.$$

Aus der Sicht von S hat sich der Auftreffpunkt des Lichtes während der (noch zu bestimmenden) Zeit Δt um $v\Delta t$ verschoben, die Laufstrecke des Lichtes ist deshalb

$$d = \sqrt{h^2 + v^2(\Delta t)^2} > h,$$

und die entsprechende Laufzeit ist $\Delta t = d/c$. Quadrieren beider Seiten ergibt $(\Delta t)^2(c^2 - v^2) = h^2$ und damit

$$\Delta t = \frac{h}{c} \frac{1}{\sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}}} = \gamma \Delta t' \quad (5.3)$$

mit

$$\gamma = \frac{1}{\sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}}} > 1. \quad (5.4)$$

Wir schliessen, dass $\Delta t' = (1/\gamma)\Delta t < \Delta t$, d.h. der bewegte Beobachter misst eine kürzere Laufzeit; bewegte Uhren laufen langsamer.

§ Vgl. Kap. 2 des Mechanik-Teils.

|| Wir setzen hier implizit voraus, dass $h = h'$, d.h. Längenmaßstäbe senkrecht zur Bewegungsrichtung ändern sich nicht.

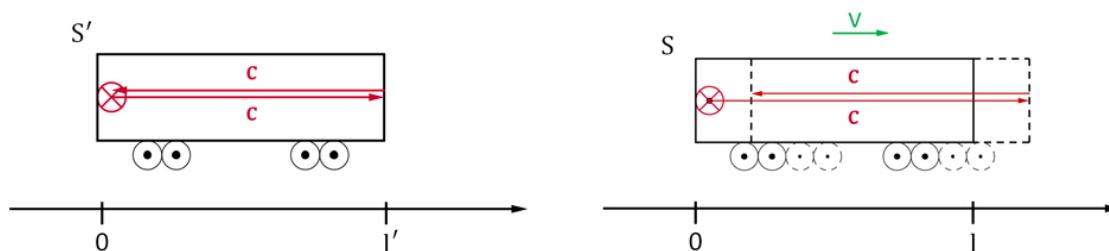


Abbildung 20. Illustration zur Längenkontraktion.

5.2.3. *Längenkontraktion.* Wir können nun auch die Länge des Waggons messen, indem wir zur Zeit $t = t' = 0$ ein Lichtsignal am hinteren Ende aussenden, es am vorderen Ende reflektieren lassen, und die Laufzeit bis zur Rückkehr des Signals messen. In S' ist die Laufzeit

$$\Delta t' = \frac{2\ell'}{c}.$$

In S ist die Zeit Δt_1 bis zur Reflektion durch die Bewegung des Waggons verlängert, die Zeit Δt_2 nach der Reflektion verkürzt. Es gilt

$$\Delta t = \Delta t_1 + \Delta t_2 \quad \text{mit} \quad \Delta t_1 = \frac{\ell}{c-v}, \quad \Delta t_2 = \frac{\ell}{c+v},$$

und somit

$$\Delta t = \ell \left(\frac{1}{c-v} + \frac{1}{c+v} \right) = \frac{2c\ell}{c^2 - v^2} = \frac{2\ell\gamma^2}{c}.$$

Da andererseits gemäss (5.3) $\Delta t' = (1/\gamma)\Delta t$, schliessen wir, dass

$$\ell = \frac{c}{2}\gamma^{-2}\Delta t = \frac{c}{2}\gamma^{-1}\Delta t' = \frac{\ell'}{\gamma} < \ell'. \quad (5.5)$$

Der bewegte Waggon scheint in Bewegungsrichtung verkürzt.

Wir betonen schon an dieser Stelle, dass die Situation bezüglich der Vertauschung von S und S' natürlich symmetrisch ist, d.h. Maßstäbe in S scheinen aus Sicht von S' ebenfalls verkürzt. Das ist *nicht* paradox, weil die Längemessung bei einem bewegten Objekt die *gleichzeitige* Messung beider Enden voraussetzt, und die beiden Beobachter sich in ihrer Auffassung über die Gleichzeitigkeit von Ereignissen, wie wir gesehen haben, nicht einig sind.

5.3. Die Lorentz-Transformation

Die Lorentz-Transformation formalisiert die oben abgeleiteten kinematischen Beziehungen, und verallgemeinert die spezielle Galilei-Transformation aus Kapitel 4 des Mechanik-Teils auf relativistische Verhältnisse. Wir betrachten zwei Bezugssysteme

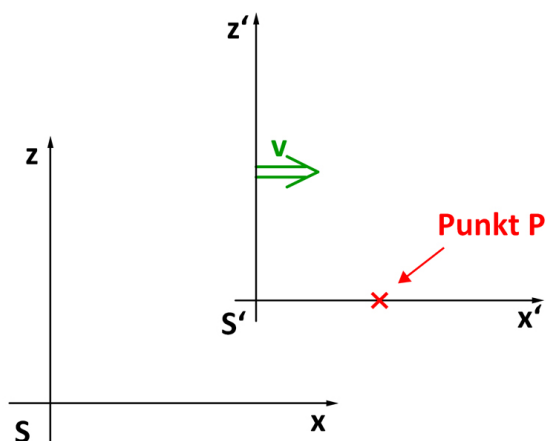


Abbildung 21. Zur Herleitung der Lorentz-Transformation.

S und S' mit Relativgeschwindigkeit $v\vec{e}_x$ (Abb. 21). Zur Zeit $t = t' = 0$ sei $x = x', y = y', z = z'$. Ein Punkt P habe in S' die Koordinaten $(x', 0, 0)$, und wir suchen seine Koordinaten in S . Die Position des Ursprungs von S' in S zur Zeit t ist vt , und der Abstand von P vom Ursprung ist, von S aus gemessen, wegen der Längenkontraktion (5.5) x'/γ . Damit folgt

$$x = vt + \frac{x'}{\gamma} \Rightarrow x' = \gamma(x - vt) \quad (5.6)$$

als Lorentz-Transformation für x . Für kleine Geschwindigkeiten ist $\gamma \approx 1$ und (5.6) reduziert sich auf die spezielle Galilei-Transformation.

Qualitativ neu ist an der Lorentz-Transformation, dass die Zeit in einer x -abhängigen Weise mit transformiert werden muss. Um das zu sehen, nutzen wir die Symmetrie der Situation: Von S' aus gesehen bewegt sich S mit Geschwindigkeit $-v$, somit gilt (da γ eine gerade Funktion von v ist)

$$x = \gamma(x' + vt') = \gamma(\gamma(x - vt) + vt') = \gamma^2 x - \gamma^2 vt + \gamma vt'$$

Auflösen nach t' ergibt

$$t' = \gamma t - \frac{1}{\gamma v}(\gamma^2 - 1)x = \gamma \left(t - \frac{vx}{c^2} \right) \quad (5.7)$$

als Transformationsvorschrift für die Zeit. Schliesslich gilt für die übrigen räumlichen Koordinaten (bei Bewegung in x -Richtung)

$$y' = y, z' = z \quad (5.8)$$

und die Umkehrtransformationen von (5.6) und (5.7) lauten

$$x = \gamma(x' + vt'), \quad t = \gamma \left(t' + \frac{vx'}{c^2} \right). \quad (5.9)$$

Es ist instruktiv, die kinematischen Effekte von Abschnitt 5.2 aus (5.6) und (5.7) herzuleiten.

- (i) *Zeitdilatation*. Wir betrachten eine Uhr am Ursprung von S' aus der Sicht von S . Sie befindet sich zur Zeit t am Ort $x = vt$ und zeigt die Zeit

$$t' = \gamma \left(t - \frac{vx}{c^2} \right) = \gamma \left(1 - \frac{v^2}{c^2} \right) = \frac{1}{\gamma} t$$

in Übereinstimmung mit (5.3).

- (ii) *Längenkontraktion*. Die Enden eines Maßstabs liegen in S' bei x'_1 und x'_2 mit $\ell' = x'_2 - x'_1$. Wir messen diese Positionen *gleichzeitig* in S , also bei Zeiten t_1, t_2 mit $t_1 = t_2$. Damit folgt

$$\ell' = x'_2 - x'_1 = \gamma(x_1 - x_2) = \gamma \ell$$

in Übereinstimmung mit (5.5).

- (iii) Schliesslich leiten wir noch das relativistische Gesetz (5.2) für die Geschwindigkeitsaddition her. Ein Teilchen startet zur Zeit 0 am Ursprung von S und befindet sich zur Zeit t am Ort x , seine Geschwindigkeit ist also $u = x/t$. Die Geschwindigkeit in S' ist entsprechend

$$u' = \frac{x'}{t'} = \frac{x - vt}{t - vx/c^2} = \frac{u - v}{1 - uv/c^2}$$

in Übereinstimmung mit (5.2).

5.4. Die Geometrie der Raum-Zeit

5.4.1. Minkowski-Abstand. In der Newton'schen Physik gibt es getrennte Abstandsbegriffe für Raum und Zeit (vgl. Kap. 2 des Mechanik-Teils). Der zeitliche Abstand zwischen zwei Ereignissen (= Raum-Zeit-Punkten) $(\vec{r}_1, t_1), (\vec{r}_2, t_2)$ ist $t_2 - t_1$, er kann positiv sein (1 ist früher als 2) oder negativ (1 ist später als 2). Der räumliche Abstand ist der euklidische Abstand $|\vec{r}_1 - \vec{r}_2| = \sqrt{(\vec{r}_1 - \vec{r}_2) \cdot (\vec{r}_1 - \vec{r}_2)}$. Wie wir gesehen haben, ist der zeitliche Abstand (sogar schon die zeitliche Abfolge) zweier Ereignisse in der Relativitätstheorie abhängig vom Bezugssystem, wir brauchen also einen neuen Abstandsbegriff, der unter Lorentz-Transformationen invariant ist. Dies leistet der *Minkowski-Abstand*

$$s_{12}^2 = c^2(t_1 - t_2)^2 - |\vec{r}_1 - \vec{r}_2|^2. \quad (5.10)$$

Er kombiniert räumliche und zeitliche Abstände, allerdings in einer (aus Sicht der euklidischen Geometrie) ungewohnten Weise. Wegen des Minuszeichens in (5.10) kann s_{12}^2 auch negativ sein, weshalb die Darstellung als Quadrat einer Grösse s_{12} , die die Dimension einer Länge hat, eher symbolisch zu verstehen ist.

Wir zeigen, dass (5.10) in der Tat unter Lorentz-Transformationen invariant ist, und betrachten dazu den Minkowski-Abstand eines Raum-Zeit-Punktes (x, t) vom Ursprung. In S ist $s^2 = c^2 t^2 - x^2$, in S' entsprechend

$$(s')^2 = c^2 (t')^2 - (x')^2 = c^2 \gamma^2 \left(t - \frac{vx}{c^2} \right)^2 - \gamma^2 (x - vt)^2 =$$

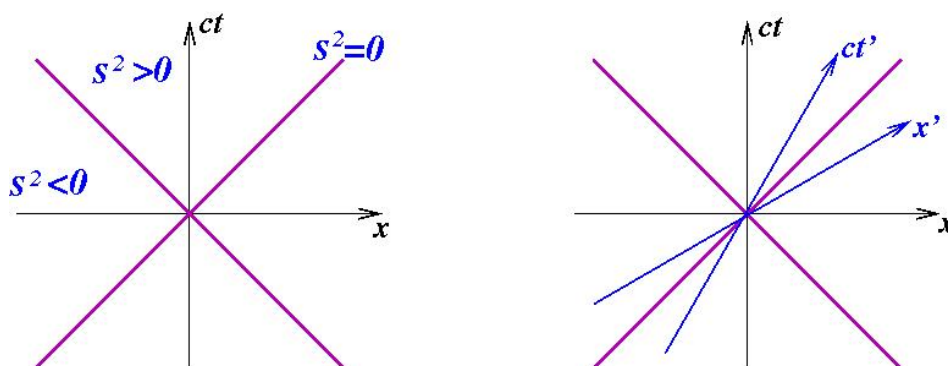


Abbildung 22. Geometrie der Raumzeit. *Links:* Der Lichtkegel $x = \pm ct$ (in lila) zerteilt die Raumzeit in die Bereiche des absoluten Zunkunft ($s^2 > 0, t > 0$), der absoluten Vergangenheit ($s^2 > 0, t < 0$) und der absoluten Gegenwart ($s^2 < 0$). Durch Hinzunahme einer weiteren räumlichen Koordinaten wird der Bereich $s^2 < 0$ zusammenhängend, Zukunft und Vergangenheit bleiben aber getrennt und berühren sich nur im Ursprung (vgl. Abbildung 24). *Rechts:* Darstellung einer Lorentz-Transformation in ein bewegtes Bezugssystem (x', t') . Durch geeignete Wahl der Relativgeschwindigkeit kann die Zeitachse ct' einen beliebigen Winkel innerhalb des Lichtkegels, und die räumliche Achse x' einen beliebigen Winkel ausserhalb des Lichtkegels einnehmen.

$$= c^2 \gamma^2 \left(1 - \frac{v^2}{c^2}\right) t^2 - \gamma^2 \left(1 - \frac{v^2}{c^2}\right) x^2 = s^2.$$

5.4.2. *Lichtkegel.* Wir stellen die zweidimensionale Raumzeit in einem *Minkowski-Diagramm* in der (x, ct) -Ebene dar (Abbildung 22). Die *Weltlinie* eines Teilchens, das sich mit konstanter Geschwindigkeit v nach rechts bewegt, ist gegeben durch

$$x = vt \quad \Rightarrow \quad ct = \frac{c}{v}x,$$

also eine Gerade mit Steigung $c/v > 1$. Die Bahn eines solchen Teilchens liegt innerhalb des *Lichtkegels* $|x| = c|t|$. Er umfasst alle Punkte, die vom Ursprung aus mit einem Lichtsignal (in der Zukunft oder aus der Vergangenheit) erreicht werden können, und somit den Minkowski-Abstand $s^2 = 0$ vom Ursprung haben.

Der Lichtkegel zerlegt die Raumzeit-Ebene in drei Gebiete:

- (i) $s^2 > 0, t > 0$. Dies ist das Innere des *Vorwärts-Lichtkegels* $x = \pm ct$ mit $t > 0$. Dieses Gebiet umfasst die *absolute Zukunft* des Raumzeit-Punktes $(0, 0)$. Das bedeutet, dass Ereignisse in diesem Gebiet in jedem BS später als $t = 0$ stattfinden, d.h. unter einer beliebigen Lorentz-Transformation gilt $t' > 0$. Andererseits gibt es für jedes solche Ereignis ein BS, in dem es am Ursprung stattfindet, also bei $x' = 0$. Zum Beweis dieser Aussage betrachten wir den rechten Teil von Abbildung 22. Die Koordinatenachsen des transformierten Systems S' sind bestimmt durch $t' = 0$ (x' -Achse) und $x' = 0$ (t' -Achse), sie sind somit gemäss (5.6, 5.7) in S gegeben durch

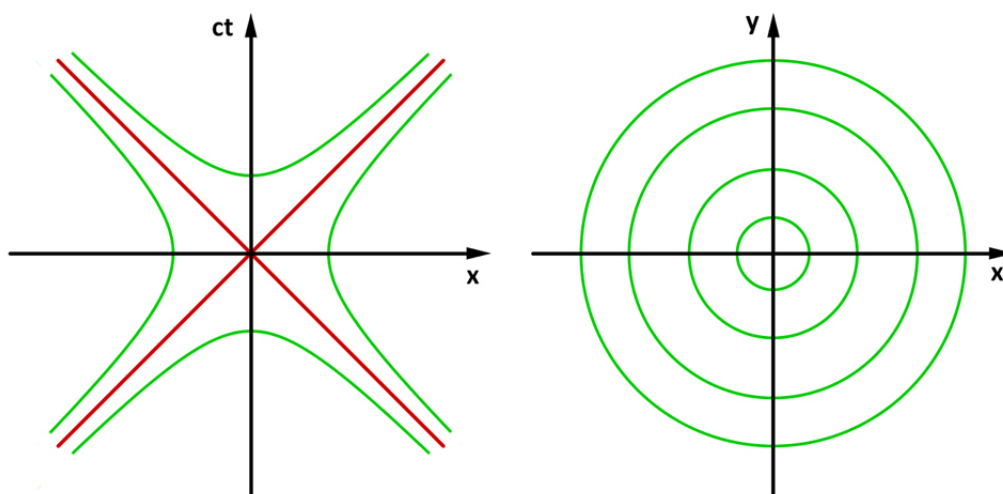


Abbildung 23. Links: Die Linien konstanten Minkowski-Abstands vom Ursprung der zweidimensionalen Raumzeit sind Hyperbeln (grün). Rechts: In der euklidischen Geometrie sind die Linien konstanten Abstands Kreise.

die beiden Geraden

$$ct = \frac{c}{v}x \quad (t'\text{-Achse}), \quad ct = \frac{v}{c}x \quad (x'\text{-Achse}),$$

wie in Abbildung 22 eingezeichnet. Offensichtlich kann die t' -Achse durch geeignete Wahl von v durch jeden Punkt im Inneren des Vorwärts-Lichtkegels gelegt werden.

- (ii) $s^2 > 0, t < 0$. Dies ist die *absolute Vergangenheit*, die das Innere des Rückwärts-Lichtkegels ausfüllt. Ereignisse in diesem Gebiet finden in jedem BS vor $t = t' = 0$ statt, und es gibt für jedes Ereignis ein BS, in dem es am Ursprung ($x' = 0$) stattfindet.
- (iii) $s^2 < 0$. Dies ist das Gebiet ausserhalb des Lichtkegels, das wir als *absolute Gegenwart* bezeichnen. Ereignisse in diesem Gebiet sind in jedem BS räumlich vom Ursprung getrennt, d.h. es gilt stets $x' \neq 0$, aber für jedes solche Ereignis gibt es (wie man sich anhand des rechten Teils von Abbildung 22 leicht klarmacht) ein BS, in dem das Ereignis bei $t' = 0$ stattfindet, also *gleichzeitig* mit $(x, t) = (0, 0)$. Ereignisse in diesem Bereich sind kausal vom Ursprung getrennt, da sie nur von Signalen erreicht werden könnten, die sich mit Überlichtgeschwindigkeit ausbreiten.

Wir verallgemeinern diese Begriffe auf das Verhältnis von zwei beliebigen Raumzeit-Punkten (\vec{r}_1, t_1) und (\vec{r}_2, t_2) . Die Punkte sind voneinander

- *zeitartig entfernt*, wenn $s_{12}^2 > 0$,
- *raumartig entfernt*, wenn $s_{12}^2 < 0$, und
- *lichtartig entfernt*, wenn $s_{12}^2 = 0$.

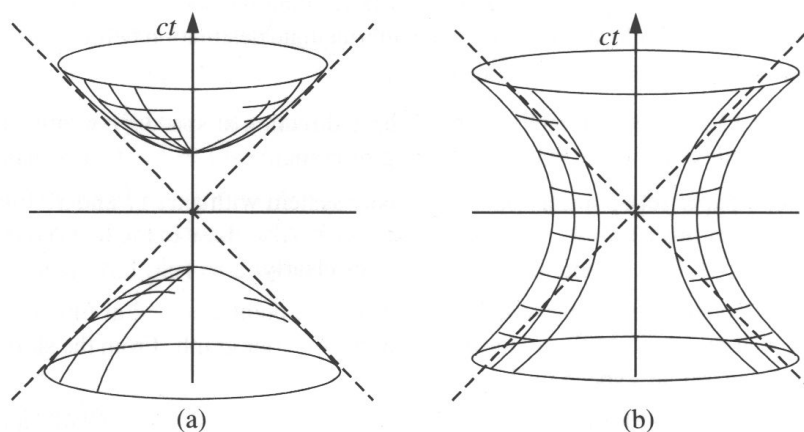


Abbildung 24. Die Hyperboloide konstanten Minkowski-Abstands in einer dreidimensionalen Raumzeit, für (a) $s^2 > 0$ und (b) $s^2 < 0$ (aus *Introduction to Electrodynamics* von D.J. Griffiths).

Wir sehen hier, dass die in Abschnitt 5.2.1 betonte Relativität der Gleichzeitigkeit ihre Grenzen hat: Die Reihenfolge zwischen zwei zeitartig getrennten Ereignissen kann durch einen Wechsel des BS nicht verändert werden. Die Existenz von zeitartig entfernten Bereichen in der Raumzeit ist konzeptionell wichtig, da ohne sie die Vorstellung einer kausalen Verknüpfung zweier Ereignisse als Ursache und Wirkung nicht aufrechterhalten werden könnte.

Wir bemerken schliesslich noch, dass die Linien konstanten Minkowski-Abstands in der zweidimensionalen Raumzeit *Hyperbeln* sind (Abb. 23). Auflösen der Gleichung $s^2 = c^2t^2 - x^2$ nach x oder t ergibt

$$ct = \pm\sqrt{x^2 + s^2} \text{ für } s^2 > 0$$

und

$$x = \pm\sqrt{c^2t^2 - s^2} \text{ für } s^2 < 0.$$

Aus diesem Grund spricht man auch von der *hyperbolischen* Geometrie der Raumzeit. Bei Hinzunahme einer zweiten Raumdimension werden die Hyperbeln zu Rotationshyperboloiden (Abbildung 24). Für $s^2 > 0$ zerfällt das Hyperboloid in zwei Teile, die Zukunft und Vergangenheit entsprechen, während das raumartige Hyperboloid ($s^2 < 0$) zusammenhängend ist. Die Tatsache, dass es nur eine Zeitdimension, aber mehrere Raumdimensionen gibt, bricht die Symmetrie zwischen Raum und Zeit, die in der zweidimensionalen Raumzeit vorhanden ist (vgl. Abbildung 22).

5.4.3. Eigenzeit. Wir betrachten einen Beobachter, der eine allgemeine Bewegung $x(t)$ in der zweidimensionalen Raumzeit-Ebene ausführt (Abb. 25). Welche Zeit misst er? Die Beziehung (5.3) für die Zeitdilatation, angewandt auf ein infinitesimales Zeitintervall

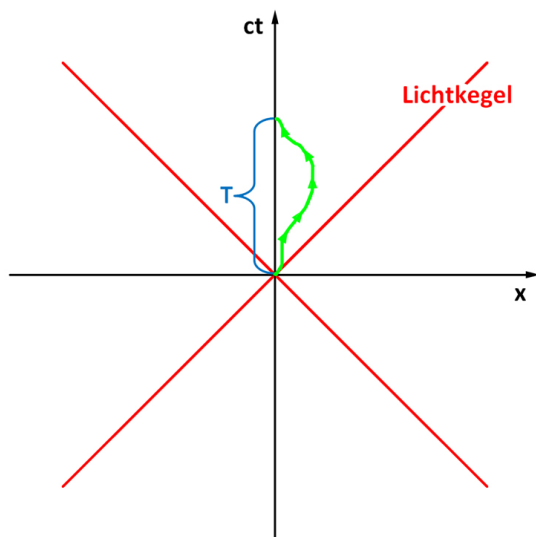


Abbildung 25. Zum Begriff der Eigenzeit. Ein Beobachter, der sich entlang der grünen Weltlinie bewegt, misst eine Zeit T' , die stets kürzer ist als die vom ruhenden Beobachter gemessene Zeit T .

dt , ergibt

$$dt' = \sqrt{1 - v^2/c^2} dt$$

wobei $v = dx/dt$ jetzt die (zeitabhängige) Momentangeschwindigkeit bezeichnet. Wir quadrieren das kleine Zeitintervall dt' und erhalten

$$(dt')^2 = (1 - c^{-2}(dx/dt)^2)(dt)^2 = (dt)^2 - c^{-2}(dx)^2 = \frac{1}{c^2}[c^2(dt)^2 - (dx)^2] = \frac{1}{c^2}(ds)^2,$$

d.h. $(dt')^2$ ist, bis auf den Faktor $1/c^2$, das infinitesimale Inkrement des Minkowski-Abstands. Wir definieren deshalb das infinitesimale Inkrement der *Eigenzeit* τ des Beobachters durch

$$d\tau = \frac{1}{c} ds = \sqrt{1 - c^{-2}(\dot{x})^2} dt = \frac{1}{\gamma} dt, \quad (5.11)$$

wobei hier und im folgenden stets impliziert wird, dass der Dilatationsfaktor γ (über \dot{x}) zeitabhängig sein kann. Damit ist die von dem bewegten Beobachter gemessene Zeit entlang des gesamten Weges

$$T' = \int_0^T dt \sqrt{1 - c^{-2}(dx/dt)^2}. \quad (5.12)$$

Wegen des Minus-Zeichens in der Wurzel gilt immer $T' < T$, d.h. die bewegte Uhr geht stets langsamer als eine am Ursprung verbleibende Uhr.

Es ist instruktiv, den Ausdruck (5.12) mit dem Ausdruck für die Bogenlänge einer Kurve in der euklidischen (x, y) -Ebene zu vergleichen, die von $x = 0$ bis $x = L$ mit

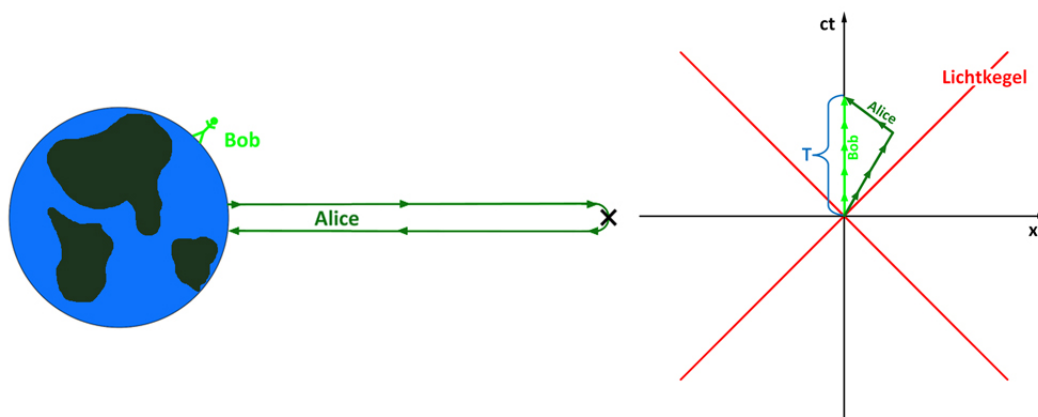


Abbildung 26. Illustration zum Zwillingsparadoxon. Das rechte Bild zeigt die Weltlinien von Alice und Bob.

positiver Geschwindigkeit in x -Richtung ($\dot{x} > 0$) verläuft. Aus Abschnitt 7.4 des Mechanik-Teils der Vorlesung wissen wir, dass die Bogenlänge durch das Funktional

$$\mathcal{F}_s[y(\cdot)] = \int_0^L dx \sqrt{1 + (dy/dx)^2} \quad (5.13)$$

gegeben ist, welches durch gerade Verbindungen *minimiert* wird. Bis auf das unterschiedliche Vorzeichen vor dem Ableitungsterm unter der Wurzel sehen die Ausdrücke (5.12) und (5.13) sehr ähnlich aus, aber dieser Unterschied ist wesentlich, denn das Integral (5.12) wird für den geraden Weg ($\dot{x} = 0$) *maximal*. In der hyperbolischen Geometrie der Raumzeit ist die gerade Verbindung zwischen zwei Punkten unter allen möglichen Kurven die *längste*.

Als Anwendung des Konzepts der Eigenzeit behandeln wir das sogenannte *Zwillingsparadoxon* (Abb. 26). Von zwei Zwillingen Alice und Bob tritt eine (Alice) einen Weltraumflug an und trifft nach einer Zeit T (gemessen von dem daheimgebliebenen Bob) wieder auf der Erde ein. Es wird angenommen, dass das Raumschiff sich bis auf eine kurze Phase, in der sich die Flugrichtung umkehrt, geradlinig mit konstantem Geschwindigkeitsbetrag v bewegt. Nach der Zeitdilationsbeziehung (5.3) sollte auf dem Raumschiff dann die Zeit $T' = (1/\gamma)T < T$ vergangen sein, Alice ist also bei ihrer Rückkehr jünger als Bob. Das “Paradoxon” ergibt sich aus einer Umkehrung der Perspektive: Bis auf die Umkehrphase (die im Prinzip beliebig kurz gemacht werden kann) befindet sich auch Alice in einem Inertialsystem, und aus ihrer Sicht sollte Bob jünger geblieben sein.

Die Auflösung des Paradoxons liegt in der Tatsache, dass die Situation in Wirklichkeit *nicht* symmetrisch ist, denn Alice muss (um überhaupt zur Erde zurückzukehren) mindestens einmal das BS wechseln. Ihre Weltlinie im (x, t) -Diagramm ist deshalb keine Gerade, und aus (5.12) folgt, dass die von ihr gemessene Eigenzeit T' auf jeden Fall kürzer ist als die von Bob gemessene Zeit T . Nimmt man an, dass die Umkehrung der Geschwindigkeit instantan erfolgt, ist die Weltlinie $x(t)$ stückweise linear

und die Auswertung des Integrals (5.12) ergibt

$$T' = 2 \times \frac{T}{2} \sqrt{1 - v^2/c^2} = \frac{1}{\gamma} T$$

wie ursprünglich erwartet.

5.5. Relativistische Dynamik

5.5.1. *Vierervektoren.* Im Mechanik-Teil der Vorlesung haben wir gelernt, dass das Newton'sche Bewegungsgesetz

$$\frac{d}{dt} \vec{p} = \vec{F} \quad (5.14)$$

unter Koordinatentransformationen (insbesondere unter Drehungen) invariant ist, weil es sich dabei um eine Beziehung zwischen *Vektoren* handelt. Ein *Vektor* ist in diesem Zusammenhang eine dreikomponentige Grösse, die sich unter Drehungen wie ein Ortsvektor $\vec{r} = (x, y, z)$ transformiert, ein *Skalar* hingegen eine (einkomponentige) Grösse, die sich unter Drehungen nicht ändert.

In der Newton'schen Physik ist die Zeit t als global und unabhängig vom BS definierte Grösse ein Skalar, und infolgedessen sind Zeitableitungen von Ortsvektoren wie ¶

$$\vec{v} = \frac{d\vec{r}}{dt}, \quad \vec{a} = \frac{d^2\vec{r}}{dt^2}, \quad \vec{p} = m\vec{v}$$

ebenfalls Vektoren. In der Relativitätstheorie hingegen ist die Zeit abhängig vom BS und damit kein Skalar mehr. Um zu einer relativistischen Verallgemeinerung des Bewegungsgesetzes (5.14) zu kommen, müssen wir zunächst die Begriffe Vektor und Skalar auf *Lorentz-invariante* Grössen verallgemeinern.

- Ein *Lorentz-Vektor* (auch *Vierervektor*) ist eine vierkomponentige Grösse, die sich unter Lorentz-Transformationen wie ein Raum-Zeit-Punkt⁺

$$X = (X^0, X^1, X^2, X^3) \equiv (ct, x, y, z) = (ct, \vec{r}) \quad (5.15)$$

transformiert.

- Ein *Lorentz-Skalar* ist eine (einkomponentige) Grösse, die unter Lorentz-Transformationen invariant ist.

5.5.2. *Relativistischer Impuls und relativistische Energie.* Die Zeit t ist, wie schon bemerkt, kein Lorentz-Skalar. Dagegen ist die Eigenzeit τ proportional zu dem invarianten Minkowski-Abstand, s. (5.11), und damit auch selbst ein Lorentz-Skalar. Wir definieren deshalb, in offensichtlicher Verallgemeinerung des Newton'schen Impulses $\vec{p} = m d\vec{r}/dt$, den relativistischen Impuls oder *Viererimpuls* eines Teilchens durch

$$P = (P^0, P^1, P^2, P^3) \equiv m \frac{dX}{d\tau} = m\gamma \frac{dX}{dT} = m\gamma(c, \dot{x}, \dot{y}, \dot{z}), \quad (5.16)$$

¶ Auch die Masse m ist ein Skalar.

⁺ Vierervektoren werden im folgenden durch Grossbuchstaben ohne Vektorpfeil bezeichnet. Die Bedeutung der hochgestellten Indizes wird in Abschnitt 5.6 erläutert.

wobei nach wie vor $\dot{x} = dx/dt$ usw. Im nichtrelativistischen Grenzfall $|\dot{\vec{r}}| \ll c$, $\gamma \approx 1$, reduzieren sich die *räumlichen* Komponenten des Viererimpulses auf den Newton'schen Impuls,

$$(P^1, P^2, P^3) \approx m\dot{\vec{r}},$$

aber es stellt sich die Frage nach der physikalischen Bedeutung der *zeitlichen* Komponente P^0 . Dazu entwickeln wir P^0 nach Ordnungen von $|\vec{v}|^2/c^2$:

$$P^0 = \frac{mc}{\sqrt{1 - |\vec{v}|^2/c^2}} \approx mc \left(1 + \frac{|\vec{v}|^2}{c^2} + \dots \right) = \frac{1}{c} \left(mc^2 + \frac{1}{2}m|\vec{v}|^2 + \dots \right).$$

Im zweiten Term in der Klammer erkennen wir die Newton'sche kinetische Energie. In Vorgriff auf weitergehende Überlegungen in Abschnitt 5.5.3 postulieren wir schon an dieser Stelle die Existenz einer *Ruheenergie* mc^2 , und identifizieren die Grösse cP^0 als *Gesamtenergie* E des Teilchens,

$$E = \frac{mc^2}{\sqrt{1 - |\vec{v}|^2/c^2}} \approx mc^2 + \frac{1}{2}m|\vec{v}|^2 + \dots \quad (5.17)$$

Damit können wir den Viererimpuls schreiben als

$$P = (E/c, \vec{p}), \quad \vec{p} = \frac{m\vec{v}}{\sqrt{1 - |\vec{v}|^2/c^2}} = m_r \vec{v} \quad (5.18)$$

mit der *relativistischen Masse* $m_r = \gamma m$. Die Tatsache, dass die Energie hier als zeitliche Komponente des Viererimpulses auftritt, sollte eigentlich nicht überraschen, denn das Noether-Theorem (Abschnitt 5.5 des Mechanik-Teils) hat uns ja gelehrt, dass die Erhaltungsgrösse Energie mit *zeitlichen* Translationen, und der Impuls mit *räumlichen* Translationen verknüpft ist.

Einem allgemeinen Vierervektor $X = (X^0, X^1, X^2, X^3)$ lässt sich, analog zum Minkowski-Abstand, der Minkowski-Betrag

$$|X|^2 = (X^0)^2 - (X^1)^2 - (X^2)^2 - (X^3)^2 \quad (5.19)$$

zuordnen, das per Konstruktion ein Lorentz-Skalar ist. Für den Viererimpuls ergibt sich so die invariante Grösse

$$(P^0)^2 - |\vec{p}|^2 = \frac{E^2}{c^2} - m^2 \gamma^2 |\vec{v}|^2 = m^2 \gamma^2 (c^2 - |\vec{v}|^2) = m^2 c^2. \quad (5.20)$$

Auflösen nach E liefert die wichtige Beziehung

$$E = \sqrt{m^2 c^4 + c^2 |\vec{p}|^2} \quad (5.21)$$

zwischen Energie und Impuls eines relativistischen Teilchens. Interessanterweise ist diese Beziehung auch für masselose Teilchen ($m = 0$) sinnvoll, und lautet dann

$$E = c|\vec{p}|. \quad (5.22)$$

Anhand von (5.17) und (5.18) sieht man, dass ein solches Teilchen nur dann eine nichtverschwindende Energie und einen nichtverschwindenden Impuls haben kann, wenn mit $m \rightarrow 0$ zugleich der Grenzübergang $|\vec{v}| \rightarrow c$ durchgeführt wird, d.h. *masselose Teilchen müssen sich mit Lichtgeschwindigkeit bewegen.*

Das wichtigste Beispiel eines masselosen Teilchens ist das *Photon*, das Quant des elektromagnetischen Feldes. Tatsächlich finden wir die relativistische Energie-Impuls-Beziehung (5.22) in der Elektrodynamik wieder als Beziehung

$$u = c|\vec{g}_{\text{em}}|$$

zwischen der Energiedichte u und der Impulsdichte \vec{g}_{em} einer ebenen elektromagnetischen Welle, s. (4.41), (4.42) und (4.26). In der Quantenmechanik lernt man, dass Energie und Impuls eines *einzelnen* Photons gegeben sind durch

$$E = h\nu, \quad |\vec{p}| = h/\lambda, \quad (5.23)$$

wobei ν und λ die Frequenz und Wellenlänge der elektromagnetischen Welle bezeichnen; wegen $c = \nu\lambda$ ergibt sich wieder (5.22).

5.5.3. Kräfte. Die relativistische Verallgemeinerung des Newton'schen Bewegungsgesetzes (5.14) muss die Form einer Beziehung zwischen Vierervektoren haben, also

$$\frac{d}{d\tau}P = K \quad (5.24)$$

mit dem Vierervektor $K = (K^0, K^1, K^2, K^3)$ der *Minkowski-Kraft*. Der räumliche Teil dieser Gleichung lautet

$$\gamma \frac{d}{dt}\vec{p} = \vec{K}, \quad \vec{K} = (K^1, K^2, K^3),$$

sodass wir durch Vergleich mit (5.14) den räumlichen Anteil der Minkowski-Kraft durch die Beziehung

$$\vec{K} = \gamma\vec{F} \quad (5.25)$$

mit der Newton'schen Kraft \vec{F} verbinden können. Zur Bestimmung der zeitlichen Komponente K^0 leiten wir (5.20) nach τ ab, und erhalten

$$0 = \frac{d}{d\tau}[(P^0)^2 - |\vec{p}|^2] = 2 \left(P^0 \frac{dP^0}{d\tau} - \vec{p} \cdot \frac{d\vec{p}}{d\tau} \right) = 2(P^0 K^0 - \vec{p} \cdot \vec{K}).$$

Auflösen nach K^0 ergibt

$$K^0 = \frac{1}{P^0} \vec{p} \cdot \vec{K} = \frac{\gamma}{c} \vec{v} \cdot \vec{F}. \quad (5.26)$$

Damit lässt sich die zeitliche Komponente von (5.24) in die vertraute Form

$$\frac{dE}{dt} = c \frac{dP^0}{dt} = \frac{c}{\gamma} \frac{dP^0}{d\tau} = \frac{c}{\gamma} K^0 = \vec{v} \cdot \vec{F} \quad (5.27)$$

bringen, die den versprochenen direkten Beleg für die Identifikation von cP^0 mit E liefert: Die Änderung der Energie ist gerade die von der Kraft erbrachte Leistung $\vec{v} \cdot \vec{F}$.

Als Anwendung von (5.24) betrachten wir die Bewegung unter einer konstanten Kraft in x -Richtung, $\vec{F} = (F_x, 0, 0)$. Die Bewegungsgleichung für p_x lautet

$$\frac{dp_x}{dt} = \frac{d}{dt} \frac{mv_x}{\sqrt{1 - v_x^2/c^2}} = F_x.$$

Die Integration mit Anfangsbedingung $v_x(0) = 0$ ergibt

$$\frac{mv_x}{\sqrt{1 - v_x^2/c^2}} = F_x t$$

und durch Auflösung nach v_x folgt

$$v_x(t) = \frac{F_x t}{\sqrt{m^2 + F_x^2 t^2/c^2}}.$$

Für kurze Zeiten dominiert in der Wurzel der m^2 -Term und wir erhalten das Newton'sche Ergebnis $v_x = F_x t/m$. Für lange Zeiten hingegen wird $v_x \rightarrow c$, das Teilchen kann nur bis zur Lichtgeschwindigkeit beschleunigt werden (die allerdings nie erreicht wird).

5.6. Relativistische Struktur der Elektrodynamik

Wir kehren zurück zur Elektrodynamik und fragen, welche Gestalt die Maxwell-Gleichungen in der relativistischen Formulierung annehmen. Die Maxwell-Gleichungen für die Potentiale, (4.31) und (4.32), legen es nahe, jeweils Φ und \vec{A} , und ρ und \vec{j} zu Vierervektoren zusammenzufassen:

$$A = (\Phi, \vec{A}) \quad \text{Vierervektor der Potentiale} \quad (5.28)$$

$$J = (c\rho, \vec{j}) \quad \text{Vierervektor der Quellen} \quad (5.29)$$

Auch weist man leicht nach, dass der d'Alembert-Operator (4.33) invariant unter Lorentz-Transformationen, und damit ein Lorentz-Skalar ist. Wir können deshalb die beiden Gleichungen (4.31, 4.32) zusammenfassen in einer einzigen, manifest Lorentz-invarianten Beziehung zwischen Vierervektoren

$$\square A = -\frac{4\pi}{c} J. \quad (5.30)$$

Um die relativistische Rolle der elektromagnetischen Felder \vec{E} und \vec{B} zu verstehen, müssen wir den Formalismus noch erweitern um die Unterscheidung zwischen *kovarianten* und *kontravarianten* Vierervektoren. Neben dem kontravarianten Vierervektor (5.15) können wir einen Raumzeitpunkt alternativ durch den kovarianten Vektor (mit tiefgestellten Indizes)

$$(X_0, X_1, X_2, X_3) = (-ct, x, y, z) \quad (5.31)$$

darstellen, der sich von (5.15) durch das Vorzeichen der zeitlichen Komponente unterscheidet. Damit nimmt der Minkowski-Betrag (5.19) die symmetrische Form

$$|X|^2 = -\sum_{\mu=0}^3 X_\mu X^\mu$$

an, die an das übliche Skalarprodukt erinnert. Entsprechend können wir bekannte elektrodynamische Beziehungen in einer neuen, symmetrischen Form darstellen. Der d'Alembert-Operator (4.33) wird zu

$$\square = \sum_{\mu=0}^3 \frac{\partial^2}{\partial X_\mu \partial X^\mu} \quad (5.32)$$

und die Kontinuitätsgleichung (3.10) und die Bedingung (4.30) für die Lorentz-Eichung lassen sich schreiben als vierdimensionale Divergenzen,

$$\sum_{\mu=0}^3 \frac{\partial J^\mu}{\partial X^\mu} = 0 \quad \text{Kontinuitätsgleichung} \quad (5.33)$$

$$\sum_{\mu=0}^3 \frac{\partial A^\mu}{\partial X^\mu} = 0 \quad \text{Lorentz-Eichung.} \quad (5.34)$$

In dieser Darstellung sind die elektromagnetischen Felder Komponenten des *Feldstärkentensors* \hat{F} , einer antisymmetrischen 4×4 -Matrix, die sich gewissermassen als vierdimensionale Rotation

$$F^{\mu\nu} = \frac{\partial A^\nu}{\partial X_\mu} - \frac{\partial A^\mu}{\partial X_\nu}, \quad \mu, \nu = 0, 1, 2, 3 \quad (5.35)$$

aus dem Vierervektor der Potentiale ergibt. Eine 4×4 -Matrix hat zunächst 16 Einträge. Wegen der Bedingung der Antisymmetrie verschwinden die 4 Einträge auf der Diagonalen, und die verbleibenden 12 Elemente sind betragsmässig paarweise gleich. Es bleiben damit 6 unabhängige Elemente, die gerade den 2×3 Komponenten der "Vektorfelder" \vec{E} und \vec{B} entsprechen. So ergibt sich zum Beispiel aus (5.28) und (5.35)

$$F^{01} = \frac{\partial A^1}{\partial X_0} - \frac{\partial A^0}{\partial X_1} = -\frac{1}{c} \frac{\partial A_x}{\partial t} - \frac{\partial \Phi}{\partial x} = E_x$$

wobei im letzten Schritt die Beziehung (4.27) benutzt wurde. Insgesamt hat der Feldstärkentensor die Form

$$\hat{F} = \begin{pmatrix} 0 & E_x & E_y & E_z \\ -E_x & 0 & B_z & -B_y \\ -E_y & -B_z & 0 & B_x \\ -E_z & B_y & -B_x & 0 \end{pmatrix}, \quad (5.36)$$

eine eindrückliche Demonstration der Vereinheitlichung von elektrischen und magnetischen Phänomenen.