

Theoretische Physik in zwei Semestern I

Teil A: Klassische Mechanik

Joachim Krug

Institut für Theoretische Physik, Universität zu Köln

E-mail: krug@thp.uni-koeln.de

1	Gegenstand, Geschichte, Gültigkeitsbereich	2
1.1	Gegenstand der Mechanik	2
1.2	Einige historische Daten	3
1.3	Grenzen der klassischen Mechanik	4
2	Kinematik von Massenpunkten	5
3	Die Newton'schen Gesetze	8
4	Bezugssysteme	12
4.1	Das Galilei'sche Relativitätsprinzip	12
4.2	Beschleunigte Bezugssysteme	14
5	Erhaltungsgrößen	16
5.1	Impulserhaltung	17
5.2	Drehimpulserhaltung	18
5.3	Energieerhaltung	20
5.3.1	Energiesatz für einen Massenpunkt.	20
5.3.2	Energiesatz für ein System von Massenpunkten.	22
5.4	Bewegung in einer Dimension	23
5.4.1	Bewegungstypen.	23
5.4.2	Energiemethode.	24
5.5	Das Noether-Theorem	26
6	Das Kepler-Problem	27
6.1	Die Kepler'schen Gesetze	27
6.2	Zweikörperproblem mit Zentralkraft	30
6.2.1	Impulserhaltung.	30
6.2.2	Drehimpulserhaltung.	31
6.2.3	Energieerhaltung.	32

6.3	Bahnkurven im Keplerproblem	32
6.3.1	Bewegungstypen.	33
6.3.2	Quantitative Berechnung der Bahnkurven.	35
6.3.3	Zurück zum Zweikörperproblem.	38
6.4	Drei und mehr Körper	38
7	Analytische Mechanik	41
7.1	Bewegung unter Zwangsbedingungen	42
7.2	Lagrange-Gleichungen erster Art	45
7.3	Lagrange-Gleichungen zweiter Art	47
7.3.1	Herleitung.	47
7.3.2	Beispiele	50
7.3.3	Verallgemeinerte Impulse und Erhaltungsgrößen.	51
7.4	Variationsprinzipien	53
7.4.1	Variationsprobleme.	53
7.4.2	Euler-Lagrange-Gleichungen.	55
7.4.3	Das Hamilton'sche Prinzip.	58
7.5	Hamilton-Mechanik	58
7.5.1	Die Hamilton'schen Gleichungen	58
7.5.2	Der Phasenraum.	60
7.5.3	Ein Beispiel für Hamilton'sches Chaos.	62

1. Gegenstand, Geschichte, Gültigkeitsbereich

1.1. Gegenstand der Mechanik

Die Mechanik befasst sich mit dem Zusammenhang zwischen *Bewegungen* und *Kräften*. Dabei geht es meistens darum, aus vorgegebenen Kräften die resultierende Bewegung zu berechnen; historisch allerdings hat man eher (z.B. im Falle des Gravitationsgesetzes) aus der Beobachtung von Bewegungen auf die Kräfte geschlossen.

Der Kern der Mechanik ist das 2. Newton'sche Gesetz, das wir heute in der Form

$$m \frac{d^2 \vec{r}}{dt^2} = \vec{F} \quad (1.1)$$

schreiben. Hier ist \vec{r} die Bahnkurve der Bewegung und $d^2 \vec{r}/dt^2$ die entsprechende Beschleunigung. Diese Gleichung verknüpft die Beschleunigung, eine unmittelbar beobachtbare Grösse, mit der *trägen Masse*, einer Eigenschaft des Körpers, und der auf ihn wirkenden *Kraft* \vec{F} . Weder Kraft noch Masse werden durch diese Beziehung jeweils für sich präzise definiert; nach Ernst Mach[‡] sind Kräfte ganz allgemein "*bewegungsbestimmende Umstände*".

Das Bewegungsgesetz (1.1) ist sehr allgemein anwendbar, etwa auf

[‡] Ernst Mach: *Die Mechanik in ihrer Entwicklung historisch-kritisch dargestellt*.

- *Massenpunkte* als idealisierte Beschreibung von Atomen, Molekülen, Sandkörnern, Fussbällen, Satelliten, Planeten, Sternen, Galaxien...Wir befassen uns hier meistens mit Massenpunkten, die wir auch als *Teilchen* bezeichnen.
- *starre Körper*, das sind Systeme von mehreren Massenpunkten, deren Abstände festgehalten werden .
- *deformierbare Körper/Kontinua*: Die Kontinuumsmechanik umfasst Disziplinen wie Hydrodynamik und Elastizitätstheorie. Kontinua werden durch *partielle* Differentialgleichungen beschrieben.

Kräfte entstehen aus *Wechselwirkungen* zwischen den Körpern. Wir unterscheiden zwischen

- *elementaren Wechselwirkungen* wie der Gravitation, der elektromagnetischen Wechselwirkung, und der schwachen und starken Wechselwirkung zwischen Elementarteilchen, und
- *effektiven Wechselwirkungen*, die auf elementare Wechselwirkungen reduziert werden können; Beispiele sind chemische Bindungen, Kontaktwechselwirkung und Reibung zwischen makroskopischen Körpern, van der Waals-Wechselwirkungen u.v.a.m.

Die *Ursachen* von Kräften sind aber nicht eigentlicher Gegenstand der Mechanik.

1.2. Einige historische Daten

- **Vorsokratische Philosophie.** Zu erwähnen ist hier der Schulstreit zwischen Heraklit (“*Alles fliesst*”) und Parmenides (“*Alle Veränderung ist Illusion*”). In diesem Zusammenhang erdachte Zenon von Elea (490-430 v.Chr.) seine bekannten Paradoxien zum Beweis der Unmöglichkeit von Bewegung.
- **Aristoteles** (384-322 v.Chr.) hat als Erster eine Mechanik entwickelt, die sich stark an die Alltagserfahrung anlehnt. In seiner Theorie bedarf jede Bewegung einer Ursache, und es wird unterschieden zwischen der *naturgemässen* Bewegung eines Körpers zu seinem natürlichen Ort und der *naturwidrigen* Bewegung unter dem Einfluss von äusseren Ursachen. Um die Bewegung der Gestirne zu erklären, die ohne erkennbare Ursache ablaufen, postuliert er, dass für Himmelskörper andere Gesetze als für irdische Bewegungen gelten.
- **Johannes Kepler** (1571-1630) formulierte auf der Grundlage der Marsbeobachtungen von Tycho Brahe (1546-1601) seine drei Gesetze der Planetenbewegung.
- **Galileo Galilei** (1564-1642) machte Experimente zur Fallbewegung und stellte das Trägheitsgesetz auf.
- **Isaac Newton** (1643-1727) legte mit seinen Bewegungsgesetzen die Grundlage der Mechanik und stellte mit der Entwicklung der Infinitesimalrechnung auch den angemessenen mathematischen Rahmen bereit. Darüber hinaus gelingt ihm mit

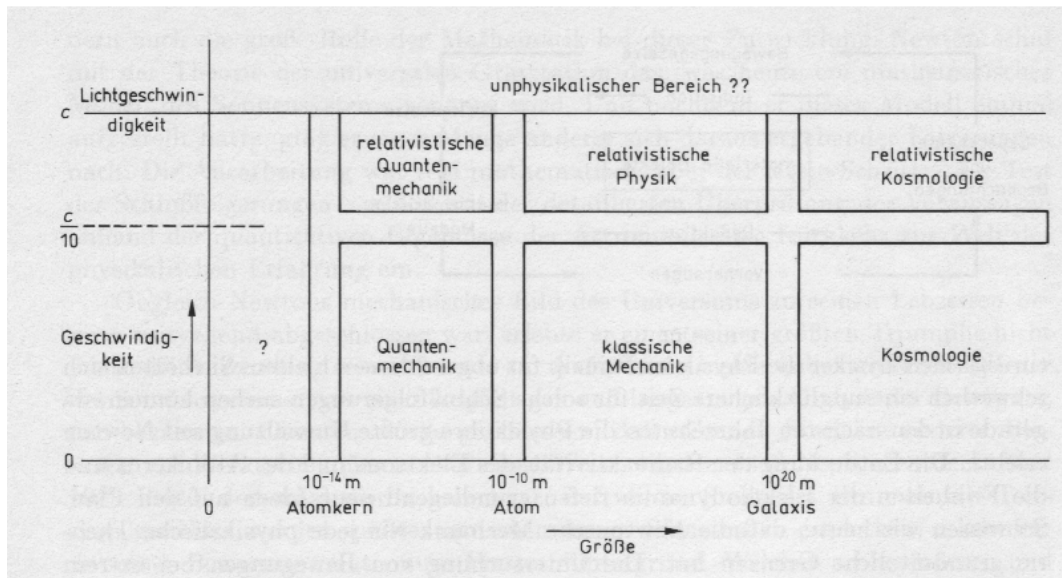


Abbildung 1. Gültigkeitsbereich der klassischen Mechanik; aus A.P. French, *Newtonsche Mechanik* (de Gruyter 1996).

der Formulierung des Gravitationsgesetzes die *Vereinheitlichung von himmlischer und irdischer Mechanik*.

- **Joseph Louis Lagrange** (1736-1813) und **William Rowan Hamilton** (1805-1865) bringen die Mechanik auf ihre bis heute gültige analytische Form.
- **Emmy Noether** (1882-1935) stellt einen allgemeinen Zusammenhang zwischen *Erhaltungssätzen* und *Symmetrien* in der Mechanik her.

1.3. Grenzen der klassischen Mechanik

Die Newton'sche Mechanik ist der menschlichen Erfahrungswelt angemessen, stösst aber ausserhalb dieses Bereichs an ihre Grenzen (s. Abb. 1):

- bei *hohen Geschwindigkeiten* (vergleichbar mit der Lichtgeschwindigkeit c) treten (speziell) relativistische Effekte auf,
- bei *kleinen Abständen* treten Quanteneffekte auf, und
- bei *grossen Abständen* (d.h. in der Kosmologie) treten allgemein relativistische Effekte auf.

Jenseits dieser Grenzen stösst man somit auf den Bereich der "modernen" Physik, im Sinne der im 20. Jahrhundert entwickelten Theorien. Alle diese Theorien gehen aus von mechanischen Grundbegriffen wie Energie, Impuls und Masse, die Mechanik bildet somit das *Fundament* der gesamten theoretischen Physik.

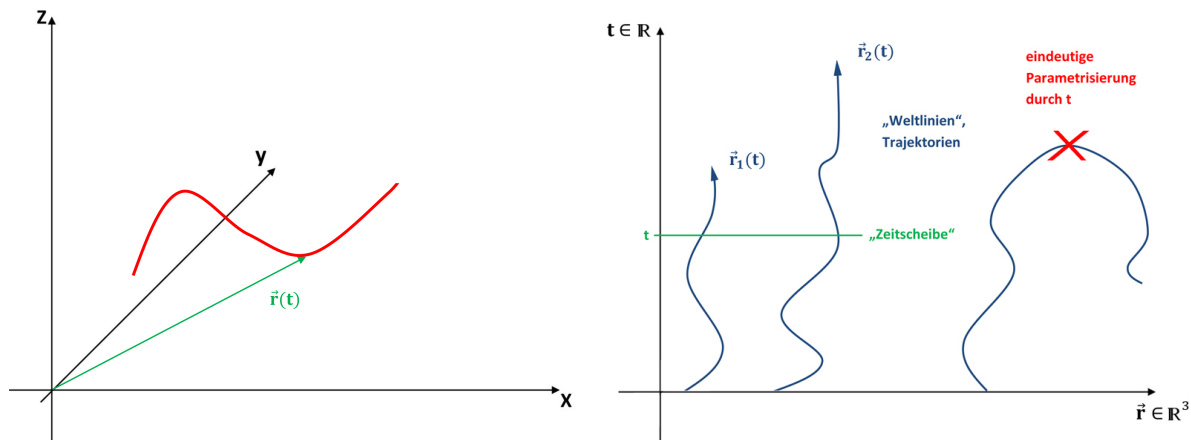


Abbildung 2. Links: Zur Definition des Ortsvektors $\vec{r}(t)$. Rechts: Raum-Zeit Struktur der klassischen Mechanik. Die Kurve im rechten Bildteil ist keine erlaubte Weltlinie eines Teilchens.

2. Kinematik von Massenpunkten

In diesem vorbereitenden Kapitel stellen wir einige Grundlagen zur Beschreibung von Bewegungen zusammen. Bewegung kann immer nur relativ zu einem *Bezugssystem* nachgewiesen werden; in einem Universum, das nur einen Körper enthält, kann sich nichts bewegen. Hier betrachten wir meist ein *dreidimensionales kartesisches Koordinatensystem*,

$$\vec{r}(t) = (x(t), y(t), z(t)) \in \mathbb{R}^3$$

ist der Ort eines Teilchens zur Zeit $t \in \mathbb{R}$ (Abb. 2 links). Die Zeit ist in der Newton'schen Mechanik ein global definierter Parameter. Es gibt einen *absoluten Gleichzeitigkeitsbegriff*, d.h. es ist möglich, Uhren global zu synchronisieren[§].

Die Raum-Zeit-Struktur der klassischen Newton'schen Mechanik besteht aus dreidimensionalen "Zeitscheiben", die entlang der eindimensionalen Zeitachse aufgereiht sind (Abb. 2 rechts). *Ereignisse* sind Raum-Zeit-Punkte

$$(\vec{r}, t) \in \mathbb{R}^3 \times \mathbb{R}$$

und es gibt getrennte Abstandsbegriffe für die räumliche und die zeitliche Dimension:

- Der *zeitliche* Abstand zwischen zwei Ereignissen (\vec{r}_1, t_1) und (\vec{r}_2, t_2) ist $t_2 - t_1$. Wenn $t_2 - t_1 > 0$ sagen wir, dass Ereignis 1 *vor* Ereignis 2 liegt.
- Der *räumliche* Abstand ist der euklidische Abstand

$$|\vec{r}_1 - \vec{r}_2| = \sqrt{(\vec{r}_2 - \vec{r}_1) \cdot (\vec{r}_2 - \vec{r}_1)} \quad (2.1)$$

wobei \cdot das kartesische Skalarprodukt zwischen Vektoren im \mathbb{R}^3 bezeichnet.

[§] In den Worten von Isaac Newton: *Absolute, True, and Mathematical Time, of itself, and from its own nature flows equally without regard to any thing external, and by another name is called Duration.*

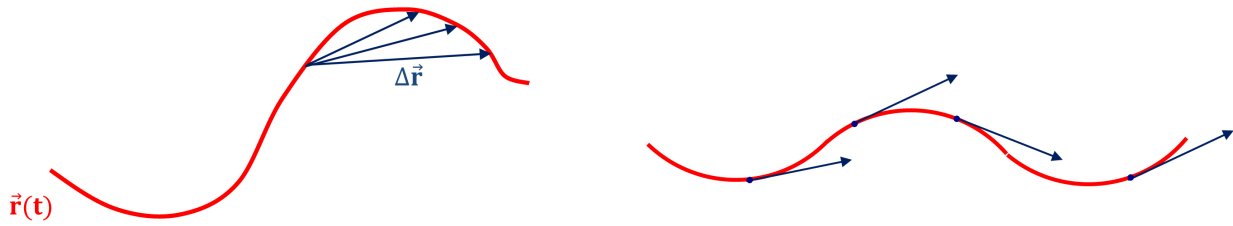


Abbildung 3. Zur Definition der Geschwindigkeit \vec{v} . Der Geschwindigkeitsvektor ergibt sich aus dem Quotienten $\frac{\Delta \vec{r}}{\Delta t}$ im Grenzfalle $\Delta t \rightarrow 0$ (links), und schmiegt sich lokal an die Bahnkurve an (rechts).

Die *Geschwindigkeit* \vec{v} des Massenpunktes kann jetzt definiert werden durch^{||} (Abb. 3)

$$\vec{v} = \frac{d\vec{r}}{dt} \equiv \lim_{\Delta t \rightarrow 0} \frac{\Delta \vec{r}}{\Delta t}, \quad \Delta \vec{r} = \vec{r}(t + \Delta t) - \vec{r}(t), \quad (2.2)$$

und analog die Beschleunigung durch

$$\vec{a} = \frac{d\vec{v}}{dt} = \frac{d^2\vec{r}}{dt^2}. \quad (2.3)$$

Der Geschwindigkeitsvektor \vec{v} schmiegt sich lokal an die Bahnkurve an; mathematisch gesprochen “lebt” er nicht im Ortsraum, sondern im *Tangentialraum* der Bahnkurve (der allerdings oftmals stillschweigend mit dem \mathbb{R}^3 identifiziert wird). Es ist deshalb nützlich, ein lokales Koordinatensystem zu definieren, das sich mit dem Massenpunkt mitbewegt. Dazu sind einige Begriffe einzuführen.

- (i) *Bogenlänge* $s(t)$. Die in einem infinitesimalen Zeitintervall dt zurückgelegte Wegstrecke ist

$$ds = |d\vec{r}| = |\vec{v}| dt.$$

Integration ergibt

$$s(t_2) - s(t_1) = \int_{t_1}^{t_2} dt |\vec{v}| = \int_{t_1}^{t_2} dt \left| \frac{d\vec{r}}{dt} \right|. \quad (2.4)$$

Sofern überall $|\vec{v}| > 0$ gilt, kann die Bahnkurve statt durch t auch durch s parametrisiert werden: $\vec{r}(t) \rightarrow \vec{r}(s)$.

- (ii) Der *Tangentialvektor* $\vec{\tau}$ ist definiert durch

$$\vec{\tau} = \frac{d\vec{r}}{ds} = \vec{v} \cdot \frac{dt}{ds} = \frac{\vec{v}}{|\vec{v}|} \Rightarrow \vec{v} = |\vec{v}| \vec{\tau}. \quad (2.5)$$

Der Tangentialvektor ist der Einheitsvektor in Richtung von \vec{v} , $|\vec{\tau}| = 1$.

- (iii) *Normalenvektor* \vec{n} . Da $\vec{\tau}$ ein Einheitsvektor ist, $\vec{\tau} \cdot \vec{\tau} = 1$, gilt

$$0 = \frac{d}{ds} (\vec{\tau}(s) \cdot \vec{\tau}(s)) = 2\vec{\tau}(s) \cdot \frac{d\vec{\tau}}{ds}.$$

^{||} “ \equiv ” bedeutet, dass die linke Seite durch die rechte definiert wird, oder umgekehrt.

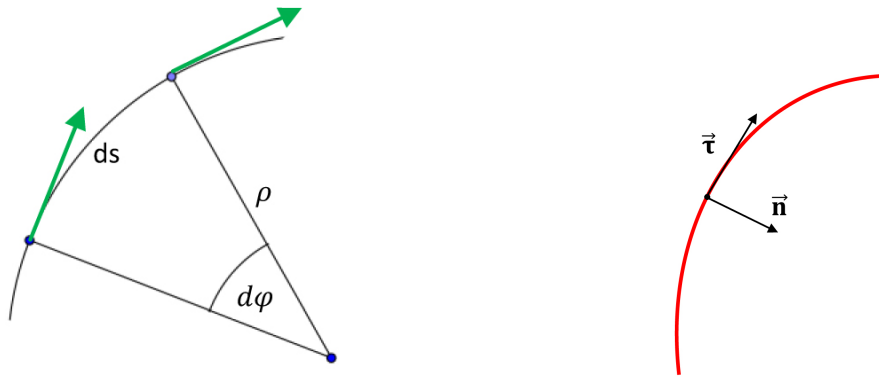


Abbildung 4. Links: Drehung des Tangentialvektors (grün) entlang einer gekrümmten Bahnkurve. Rechts: Tangential- und Normalenvektor stehen senkrecht aufeinander und spannen zusammen die Bahnebene auf.

Sofern $d\vec{\tau}/ds \neq 0$ steht der Vektor $d\vec{\tau}/ds$ *senkrecht* auf $\vec{\tau}$. Wir zeigen jetzt, dass die beiden Vektoren $\vec{\tau}$ und $d\vec{\tau}/ds$ eine Ebene aufspannen, in der die Bahn lokal verläuft. Dazu führen wir eine Taylor-Entwicklung der Bahnkurve bis zur quadratischen Ordnung durch:

$$\vec{r}(s + \Delta s) \approx \vec{r}(s) + \Delta s \frac{d\vec{r}}{ds} + \frac{1}{2}(\Delta s)^2 \frac{d^2\vec{r}}{ds^2} = \vec{r}(s) + \Delta s \vec{\tau} + \frac{1}{2}(\Delta s)^2 \frac{d\vec{\tau}}{ds},$$

d.h. der Bahnpunkt $\vec{r}(s + \Delta s)$ liegt, vom Aufpunkt $\vec{r}(s)$ aus gesehen, in der durch $\vec{\tau}$ und $d\vec{\tau}/ds$ definierten Ebene.

Da der Betrag von $\vec{\tau}$ sich zeitlich nicht ändert, ist die Änderung von $\vec{\tau}$ eine Drehung um einen infinitesimalen Winkel $d\varphi$,

$$|d\vec{\tau}| = d\varphi.$$

Die Bewegung lässt sich als infinitesimaler Teil eines Kreisbogens auffassen (Abb. 4 links),

$$ds = \rho d\varphi,$$

wodurch der lokale *Krümmungsradius* ρ der Bahn definiert wird. Damit haben wir

$$\frac{|d\vec{\tau}|}{ds} = \frac{d\varphi}{ds} = \frac{1}{\rho}$$

und können den Normalenvektor definieren als Einheitsvektor in Richtung von $d\vec{\tau}/ds$ (Abb. 4 rechts):

$$\vec{n} = \rho \frac{d\vec{\tau}}{ds}. \quad (2.6)$$

Als Anwendung drücken wir die *Beschleunigung* \vec{a} des Massenpunktes in den lokalen Koordinaten aus; dabei bezeichnen wir den Betrag der Geschwindigkeit mit $v = |\vec{v}|$ und $\dot{v} = dv/dt$:

$$\vec{a} = \frac{d\vec{v}}{dt} = \frac{d}{dt}(|\vec{v}|\vec{\tau}) = \frac{dv}{dt}\vec{\tau} + v \frac{d\vec{\tau}}{dt} = \dot{v}\vec{\tau} + v \frac{d\vec{\tau}}{ds} \frac{ds}{dt} = \dot{v}\vec{\tau} + \frac{v^2}{\rho}\vec{n}. \quad (2.7)$$

Die beiden Terme ergeben sich aus der Änderung des *Betrags* und der *Richtung* der Geschwindigkeit. Der zweite Term heisst *Zentripetalbeschleunigung*.

3. Die Newton'schen Gesetze

Isaac Newton hat seine drei berühmten Gesetze 1686 in der *Principia*¶ formuliert. Wir wollen im folgenden ihren physikalischen Gehalt aus heutiger Sicht herausarbeiten.

Lex prima (Trägheitsgesetz): Jeder Körper beharrt in einem Zustand der Ruhe oder der gleichförmigen geradlinigen Bewegung, wenn er nicht durch einwirkende Kräfte gezwungen wird, seinen Zustand zu ändern.

Das Trägheitsgesetz besagt, dass die Bewegung kräftefreier (d.h.: unbeeinflusster) Körper *bei geeigneter Wahl des Bezugssystems* gleichförmig und geradlinig verläuft, also

$$\vec{r}(t) = \vec{r}(0) + \vec{v}_0 t \quad (3.1)$$

mit einem zeitlich konstanten Geschwindigkeitsvektor \vec{v}_0 . Ein solches Bezugssystem heisst *Inertialsystem*. Die Lex prima *definiert* somit Inertialsysteme und *postuliert* zugleich ihre Existenz.

Wie viele zentrale Konzepte der Physik ist auch das Konzept des Inertialsystems eine *Idealisierung*: Streng unbeeinflusst ist ein Körper nur, wenn er der einzige im Universum ist; dann lässt sich allerdings auch nicht nachweisen, ob er sich bewegt (s. Kapitel 2). Reale Bezugssysteme nähern sich in unterschiedlichem Masse dieser Idealisierung an.

Lex secunda (Bewegungsgesetz): Die Änderung der Bewegung ist der Einwirkung der bewegenden Kraft proportional und erfolgt in Richtung derjenigen geraden Linie, in welcher jene Kraft wirkt.

Aus moderner Sicht identifizieren wir die Newton'sche "Bewegungsgrösse" mit dem *Impuls*

$$\vec{p} = m\vec{v} \quad (3.2)$$

wobei $m = m_t$ die *träge* Masse ist. Dann besagt die Lex secunda, dass die Änderung des Impulses (im vektoriellen Sinne) gleich der Kraft ist,

$$\frac{d\vec{p}}{dt} = \vec{F}, \quad (3.3)$$

was bei konstanter Masse äquivalent ist zu (1.1). Der zentrale Gehalt dieses Gesetzes ist, dass Bewegungen durch *Differentialgleichungen zweiter Ordnung* beschrieben werden, und somit durch Angabe von *Anfangsort* $\vec{r}(0)$ und *Anfangsgeschwindigkeit* $\vec{v}(0)$, also durch insgesamt 6 freie Parameter, vollständig determiniert sind.

Für sich genommen erlaubt die Lex secunda weder die Bestimmung von Massen noch von Kräften. Dieses konzeptionelle Problem wird (zumindest teilweise) behoben durch die

¶ *Philosophiae naturalis principia mathematica* = Mathematische Prinzipien der Naturlehre.

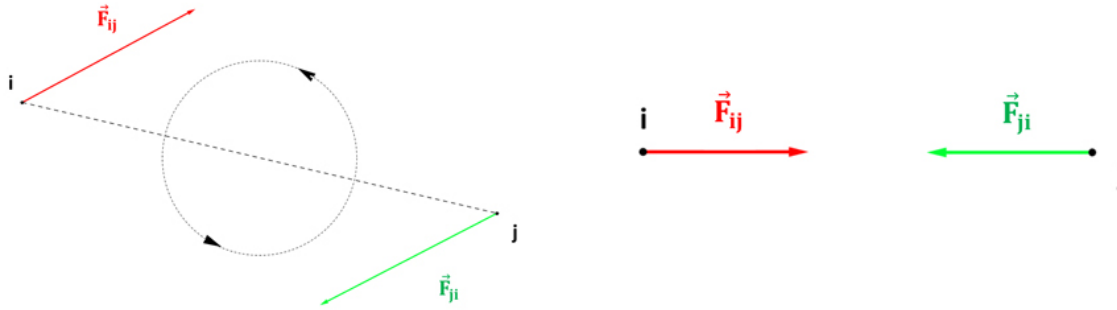


Abbildung 5. Die links dargestellte Situation genügt der Lex tertia, erzeugt aber ein unphysikalisches Drehmoment. Der Zusatz 1 schränkt physikalische Wechselwirkungen auf die rechts dargestellte Situation ein.

Lex tertia (Gegenwirkungsprinzip): Die Wirkung ist stets der Gegenwirkung proportional, oder die Wirkungen zweier Körper aufeinander sind stets gleich und von entgegengesetzter Richtung.

Bezeichnet man mit \vec{F}_{ij} die Kraft, die Körper j auf Körper i ausübt, so heisst das zunächst

$$\vec{F}_{ij} = -\vec{F}_{ji}. \quad (3.4)$$

Dadurch sind aber unphysikalische Situationen noch nicht ausgeschlossen, bei denen z.B. ein Paar von Körpern ohne äussere Kräfte ein Drehmoment erzeugen (Abb. 5). Wir formulieren deshalb den

Zusatz 1: Die Kräfte zwischen zwei Massenpunkten wirken stets in Richtung der Verbindungslinie, also

$$(\vec{r}_i - \vec{r}_j) \times \vec{F}_{ij} = 0. \quad (3.5)$$

Die Lex tertia und der Zusatz 1 sind offensichtlich Aussagen über die *Form physikalischer Wechselwirkungen*. Eine weitere wichtige Eigenschaft von physikalischen Wechselwirkungen ist enthalten in dem

Zusatz 2 (Superpositionsprinzip): Kräfte addieren sich wie Vektoren.

Wir ziehen zwei wichtige Folgerungen aus der Lex tertia:

(i) Aus (3.4) folgt mit (1.1) sofort

$$\ddot{\vec{r}}_i = \frac{1}{m_i} \vec{F}_{ij} = -\frac{1}{m_i} \vec{F}_{ji} = -\frac{m_j}{m_i} \ddot{\vec{r}}_j$$

d.h. aus dem Verhältnis der Beschleunigungen zweier wechselwirkender Körper lässt sich auf das Verhältnis ihrer trägen Massen schliessen. Dies definiert im Prinzip eine Messvorschrift für Massenverhältnisse und damit, über die Lex secunda (1.1) auch für Kräfte.

- (ii) Innere Kräfte können ein System von Massenpunkten nicht beschleunigen, anschaulich: *Man kann im Weltall nicht schwimmen.*

Das Bewegungsgesetz (3.3) bildet den Ausgangspunkt für alle folgenden Überlegungen. Wir schreiben es noch einmal ausführlich und in allgemeinsten Form hin:

$$\frac{d}{dt}(m\dot{\vec{r}}) = \vec{F}(\vec{r}, \dot{\vec{r}}, t). \quad (3.6)$$

Mathematisch haben wir es also mit einem (i.a. nichtlinearen) System von gewöhnlichen Differentialgleichungen zweiter Ordnung zu tun. Das System ist *autonom*, wenn \vec{F} nicht explizit von der Zeit abhängt ($\vec{F} = \vec{F}(\vec{r}, \dot{\vec{r}})$), sonst *nicht-autonom*.

Wir sammeln zum Schluss dieses Kapitels noch einige bekannte Beispiele für Kräfte und Bewegungen:

- a.) *Kräftefreie Bewegung:* Mit $\vec{F} = 0$ ist die Lösung von (1.1) die kräftefreie Bewegung (3.1).
 b.) *Konstante Kraft* (z.B. beim freien Fall): Mit $\vec{F} \equiv \vec{F}_0$ lautet die Lösung von (1.1)

$$\vec{r}(t) = \vec{r}(0) + \vec{v}(0)t + \frac{1}{2m}\vec{F}_0t^2.$$

- c.) *Zentralkräfte:* Eine Kraft zwischen zwei wechselwirkenden Körpern heisst Zentralkraft, wenn (3.4) und (3.5) erfüllt sind, und der Betrag der Kraft nur vom Abstand zwischen den beiden Körpern abhängt, also

$$\vec{F}_{ij} = -\vec{F}_{ji} = f(|\vec{r}_i - \vec{r}_j|) \frac{\vec{r}_i - \vec{r}_j}{|\vec{r}_i - \vec{r}_j|}. \quad (3.7)$$

Die Kraft ist anziehend wenn $f < 0$, und abstossend wenn $f > 0$. Bekannte Beispiele für Zentralkräfte sind die Gravitationskraft zwischen zwei (schweren!) Massen m_1, m_2

$$f(r) = -\frac{Gm_1m_2}{r^2}, \quad (3.8)$$

die Coulomb-Kraft⁺ zwischen zwei Ladungen q_1, q_2

$$f(r) = \frac{q_1q_2}{r^2}, \quad (3.9)$$

und das Hooke'sche Gesetz

$$f(r) = -kr \quad (3.10)$$

mit der Federkonstanten k .

- d.) Die *Lorentz-Kraft* auf ein Teilchen der Ladung q in einem äusseren elektrischen Feld \vec{E} und Magnetfeld \vec{B}

$$\vec{F} = q \left(\vec{E} + \frac{1}{c} \vec{v} \times \vec{B} \right) \quad (3.11)$$

ist ein Beispiel für eine *geschwindigkeitsabhängige* Kraft.

⁺ Wir benutzen hier, wie im Teil B der Vorlesung, Gauss'sche Einheiten.

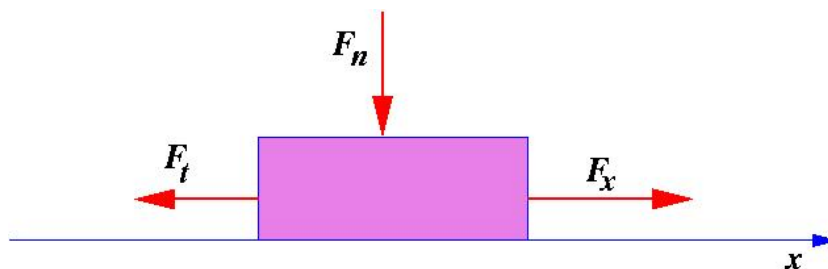


Abbildung 6. Illustration zur Festkörperreibung.

e.) Ebenfalls geschwindigkeitsabhängig sind *Reibungskräfte*, die bei mechanischen Phänomenen im Alltag eine grosse Rolle spielen. Man unterscheidet zwischen *trockener Reibung* (auch: *Coulomb-Reibung*) zwischen Festkörperoberflächen und *fluider Reibung* zwischen einem festen Körper und einer Flüssigkeit oder einem Gas.

- *Festkörperreibung*: Wir betrachten einen Körper in Kontakt mit einer Oberfläche (s. Abb. 6). Es wirkt eine Normalkraft $-F_n \vec{e}_z$ und eine Zugkraft $F_x \vec{e}_x$. Die tangentielle Reibungskraft $-F_t \vec{e}_x$ ist der Zugkraft entgegengesetzt. Man unterscheidet zwischen *Haftreibung* und *Gleitreibung*: Für $F_x < F_{\max}$ bleibt der Körper in Ruhe (*haftet*), es gilt somit $F_t = F_x$. Für $F_x > F_{\max}$ gleitet der Körper, und die Reibungskraft $F_t = F_g$ ist unabhängig von F_x . Im Gegensatz zur fluiden Reibung (s. unten) hängt die trockene Gleitreibungskraft nur vom Vorzeichen (bzw. von der Richtung) der Geschwindigkeit ab, nicht von ihrem Betrag. Durch

$$F_{\max} = \mu_0 F_n, \quad F_g = \mu F_n \quad (3.12)$$

werden die Koeffizienten der Haftreibung μ_0 und der Gleitreibung μ definiert; es gilt i.a. $\mu_0 > \mu$. Die mikroskopische Begründung dieser einfachen empirischen Beziehungen ist Gegenstand der aktuellen Forschung.

- Ein Beispiel für *fluide Reibung* ist die Stokes-Reibung

$$\vec{F}_{\text{Stokes}} = -\gamma \vec{v}, \quad (3.13)$$

wobei der Reibungskoeffizient γ für eine Kugel vom Radius R in einem Fluid der Viskosität η durch den Ausdruck $\gamma = 6\pi R\eta$ gegeben ist. Diese Beziehung gilt für langsame Bewegungen in einem Fluid hoher Viskosität. Bei hohen Geschwindigkeiten und kleinen Viskositäten (z.B. bei der Bewegung in Luft) findet man stattdessen ein *turbulentes* Reibungsgesetz von der Form

$$\vec{F}_{\text{turb}} = -\tilde{\gamma} |\vec{v}|^2 \frac{\vec{v}}{|\vec{v}|}, \quad (3.14)$$

d.h. der Betrag der Reibungskraft ist proportional zum Quadrat des Geschwindigkeitsbetrags.

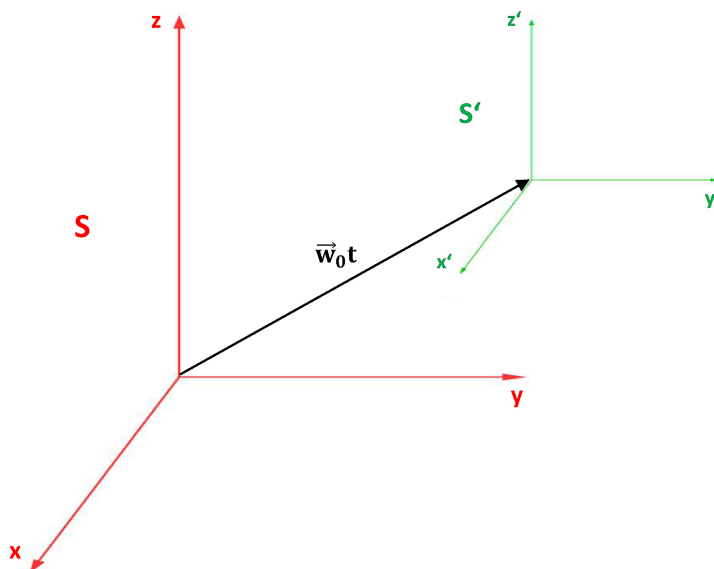


Abbildung 7. Spezielle Galilei-Transformation

4. Bezugssysteme

4.1. Das Galilei'sche Relativitätsprinzip

Wir haben gesehen, dass ein Inertialsystem (IS) durch die geradlinig gleichförmige Bewegung (3.1) von kräftefreien Körpern definiert ist. In einem solchen Bezugssystem (BS) gilt dann auch das Newton'sche Bewegungsgesetz (1.1). Wir fragen nun, unter welchen raum-zeitlichen Koordinatentransformationen

$$(\vec{r}, t) \rightarrow (\vec{r}', t')$$

diese Eigenschaften von IS erhalten bleiben. Offensichtliche Beispiele sind

(i) *Räumliche und zeitliche Translation:*

$$\vec{r}' = \vec{r} + \vec{r}_0, \quad t' = t + t_0 \quad (4.1)$$

(ii) *Drehungen:*

$$\vec{r} \rightarrow \vec{r}' = \hat{R}\vec{r} \quad \hat{R} : \text{Drehmatrix, } \hat{R} \circ \hat{R}^T = \mathbb{1} \quad (4.2)$$

Weniger offensichtlich ist die Invarianz der Newton'schen Gesetze unter

(iii) *speziellen Galilei-Transformationen:* Diese beschreiben den Übergang in ein BS, das sich mit konstanter Geschwindigkeit \vec{w}_0 relativ zum Ausgangssystem bewegt (Abb. 7),

$$\vec{r}' = \vec{r} - \vec{w}_0 t. \quad (4.3)$$

Wir rechnen die Gültigkeit der Lex prima im transformierten System S' nach:

$$\vec{r}' = \vec{r} - \vec{w}_0 t = \vec{r}(0) + \vec{v}_0 t - \vec{w}_0 t = \vec{r}'(0) + [\vec{v}_0 - \vec{w}_0]t,$$

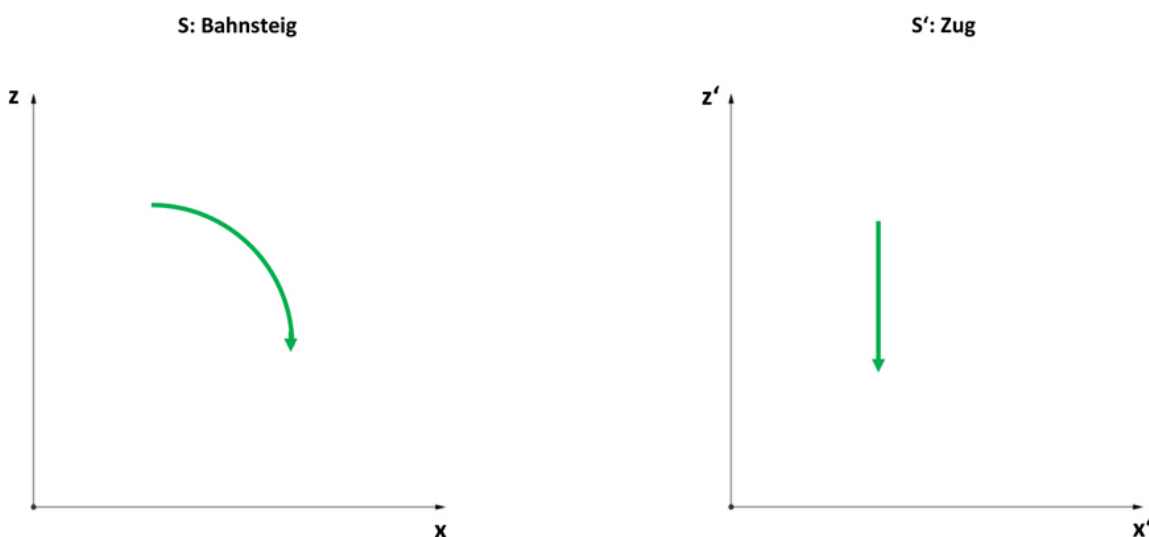


Abbildung 8. Illustration zum Galilei'schen Relativitätsprinzip.

was wieder von der Form (3.1) ist. Die Geschwindigkeit des Massenpunktes in S' ergibt sich durch vektorielle Addition,

$$\vec{v}'_0 = \vec{v}_0 - \vec{w}_0.$$

Wir formulieren das **Galilei'sche Relativitätsprinzip**:

- Jedes BS, das durch eine Kombination der Transformationen (i)-(iii) aus einem IS hervorgeht, ist wieder ein IS. Diese Transformationen bilden die *Galilei-Gruppe*.
- Die Newton'schen Gesetze gelten in allen IS, d.h. alle IS sind (bzgl. Experimenten der Newton'schen Physik) gleichwertig.

Der physikalische Kern dieses Prinzips ist die Invarianz der *Beschleunigungen* (als zweiten Ableitungen nach der Zeit) unter speziellen Galilei-Transformationen. Zur Illustration betrachten wir einen frei fallenden Körper in einem mit Geschwindigkeit $\vec{w}_0 = w_0 \vec{e}_x$ fahrenden Zug (Abb. 8). Ein Beobachter im Zug (BS S') sieht die Trajektorie

$$x'(t) = x'(0), \quad z'(t) = z'(0) - \frac{1}{2}gt^2,$$

der Beobachter auf dem Bahnsteig (BS S) hingegen sieht eine gekrümmte Bahn,

$$x(t) = x(0) + w_0 t, \quad z(t) = z(0) - \frac{1}{2}gt^2.$$

Trotzdem messen beide die gleichen Beschleunigungen:

$$\ddot{x} = \ddot{x}' = 0, \quad \ddot{z} = \ddot{z}' = -g,$$

und schliessen deshalb auf das gleiche Kraftgesetz

$$m\ddot{\vec{r}} = m\ddot{\vec{r}}' = -mg\vec{e}_z.$$

Reibungskräfte verletzen das Galilei'sche Relativitätsprinzip. Als Beispiel betrachten wir die Bewegung eines Massenpunktes unter dem Einfluss von Stokes-Reibung. In S sei die Bewegungsgleichung

$$m\ddot{\vec{r}} = -\gamma\dot{\vec{r}}. \quad (4.4)$$

Mit (4.3) ergibt sich dann in S'

$$m\ddot{\vec{r}}' = m\ddot{\vec{r}} = -\gamma\dot{\vec{r}} = -\gamma(\dot{\vec{r}}' + \vec{w}_0) \neq -\gamma\dot{\vec{r}}', \quad (4.5)$$

was offensichtlich *nicht* von der Form (4.4) ist. Das Ruhesystem des Fluids ist gegenüber anderen BS ausgezeichnet. Im Beispiel des fahrenden Zuges spüren Sie das, wenn Sie die Hand aus dem Fenster halten.

4.2. Beschleunigte Bezugssysteme

Beschleunigte BS sind keine IS, dort wirken deshalb zusätzliche "Scheinkräfte". Wir betrachten die zwei wichtigsten Fälle.

a.) *Gleichmässig beschleunigte Bezugssysteme.* Wir betrachten ein BS S' , das durch die Transformation

$$\vec{r}' = \vec{r} - \frac{1}{2}\vec{a}_0 t^2 \quad (4.6)$$

mit konstantem Beschleunigungsvektor \vec{a}_0 aus einem IS S hervorgeht. Dann gilt

$$\dot{\vec{r}}' = \dot{\vec{r}} - \vec{a}_0 t, \quad \ddot{\vec{r}}' = \ddot{\vec{r}} - \vec{a}_0,$$

und das Bewegungsgesetz in S' lautet

$$m\ddot{\vec{r}}' = m(\ddot{\vec{r}} - \vec{a}_0) = \vec{F} - m\vec{a}_0. \quad (4.7)$$

Der Term $-m\vec{a}_0$ stellt in diesem Fall die Scheinkraft dar.

Als relevantes Beispiel betrachten wir einen frei fallenden Fahrstuhl mit $\vec{a}_0 = -g\vec{e}_z$. Wir lassen in dem fallenden Fahrstuhl einen Körper der Masse m , genauer: der trägen Masse m_t und der schweren Masse m_s fallen. Das Bewegungsgesetz des Körpers in S' lautet dann*

$$m_t\ddot{\vec{r}}' = \vec{F} - m_t\vec{a}_0 = -m_s g\vec{e}_z + m_t g\vec{e}_z = -(m_s - m_t)g\vec{e}_z.$$

Unter der Annahme der Äquivalenz von träger und schwerer Masse, $m_s = m_t$, heben sich Scheinkraft und Schwerkraft gerade weg, und der Körper ist *kräftefrei*, ein Umstand, den man sich bei Experimenten auf Parabelflügen oder an Bord von Satelliten zunutze macht.

* Die Masse in (4.7) ist die *träge* Masse!

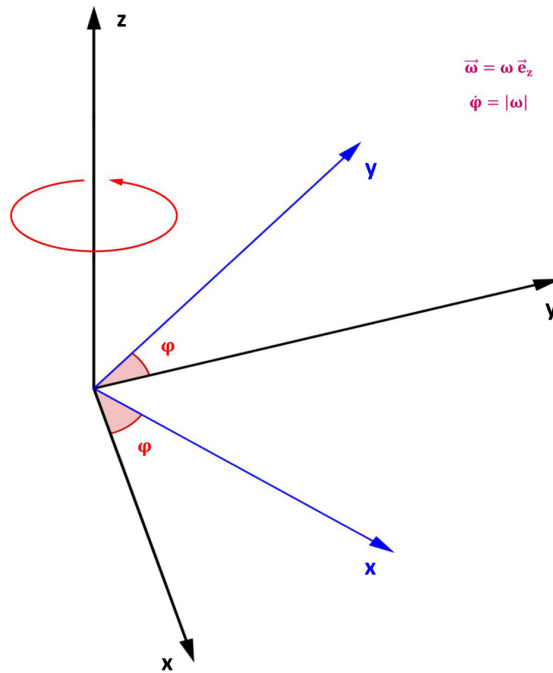


Abbildung 9. Rotierendes Bezugssystem.

Die Ununterscheidbarkeit der Wirkungen von Gravitationskräften und Scheinkräften in beschleunigten BS ist der Kerngedanke der allgemeinen Relativitätstheorie. Das *Einstein'sche Äquivalenzprinzip*, das dieser Theorie zugrundeliegt, postuliert die Äquivalenz von schwerer und träger Masse, sowie die Äquivalenz von Gravitations- und Trägheitskräften.

- b.) *Rotierende Bezugssysteme.* Das BS S' rotiere nun relativ zum IS S mit konstanter Winkelgeschwindigkeit um eine feste Drehachse (Abb.9). Der Ortsvektor eines Massenpunktes lässt sich nun entweder durch die Basisvektoren \vec{e}_i des ortsfesten IS S , oder durch die Basisvektoren \vec{e}'_i des rotierenden BS S' darstellen,

$$\vec{r}(t) = \sum_{i=1}^3 x_i(t) \vec{e}_i = \sum_{i=1}^3 x'_i(t) \vec{e}'_i(t) = \vec{r}' \quad (4.8)$$

Der Index $i = 1, 2, 3$ steht für die drei Koordinaten x, y, z in S bzw. x', y', z' in S' , und die angegebene Zeitabhängigkeit bezieht sich auf das IS S . Wie in den Übungen gezeigt wird, können wir die Bewegung der Einheitsvektoren \vec{e}'_i von S' in S gemäss

$$\dot{\vec{e}}'_i = \vec{\omega} \times \vec{e}'_i \quad (4.9)$$

durch eine vektorielle Winkelgeschwindigkeit $\vec{\omega}$ beschreiben, die in Richtung der Drehachse zeigt und deren Betrag die Drehfrequenz darstellt.

Die *Geschwindigkeit* in S ergibt sich aus (4.8) zu

$$\dot{\vec{r}} = \sum_{i=1}^3 \dot{x}'_i \vec{e}'_i + \sum_{i=1}^3 x'_i \dot{\vec{e}}'_i \quad (4.10)$$

Da die \vec{e}'_i in S' ortsfest sind, beschreibt die erste Summe die Bewegung relativ zum rotierenden BS S' ,

$$\dot{\vec{r}}' = \sum_{i=1}^3 \dot{x}'_i \vec{e}'_i.$$

Ausserdem gilt gemäss (4.9)

$$\sum_{i=1}^3 \dot{x}'_i \vec{e}'_i = \sum_{i=1}^3 \dot{x}'_i (\vec{\omega} \times \vec{e}'_i) = \vec{\omega} \times \sum_{i=1}^3 \dot{x}'_i \vec{e}'_i = \vec{\omega} \times \dot{\vec{r}}' = \vec{\omega} \times \vec{r}'. \quad (4.11)$$

Damit wird aus (4.10)

$$\dot{\vec{r}} = \dot{\vec{r}}' + \vec{\omega} \times \vec{r}'. \quad (4.12)$$

Die *Beschleunigung* in S ergibt sich durch nochmalige Differentiation von (4.10) zu

$$\ddot{\vec{r}} = \sum_{i=1}^3 \ddot{x}'_i \vec{e}'_i + 2 \sum_{i=1}^3 \dot{x}'_i \dot{\vec{e}}'_i + \sum_{i=1}^3 x'_i \ddot{\vec{e}}'_i. \quad (4.13)$$

Die erste Summe ist wieder die in S' beobachtete Beschleunigung $\ddot{\vec{r}}'$, die zweite Summe lässt sich analog zu (4.11) als $2(\vec{\omega} \times \dot{\vec{r}}')$ schreiben. Zur Berechnung der dritten Summe leiten wir (4.9) nach der Zeit ab, und erhalten

$$\ddot{\vec{e}}'_i = \vec{\omega} \times \dot{\vec{e}}'_i = \vec{\omega} \times (\vec{\omega} \times \vec{e}'_i).$$

Damit folgt insgesamt

$$\ddot{\vec{r}} = \ddot{\vec{r}}' + 2(\vec{\omega} \times \dot{\vec{r}}') + \vec{\omega} \times (\vec{\omega} \times \vec{r}'),$$

und das Bewegungsgesetz in S' ergibt sich aus dem Newton'schen Bewegungsgesetz im IS S zu

$$m\ddot{\vec{r}}' = m\ddot{\vec{r}} - 2m(\vec{\omega} \times \dot{\vec{r}}') - m\vec{\omega} \times (\vec{\omega} \times \vec{r}') = \vec{F} + \vec{F}_C + \vec{F}_Z \quad (4.14)$$

mit der *Coriolis-Kraft* $\vec{F}_C = -2m(\vec{\omega} \times \dot{\vec{r}}')$ und der *Zentrifugalkraft* $\vec{F}_Z = -m\vec{\omega} \times (\vec{\omega} \times \vec{r}')$.

5. Erhaltungsgrössen

Die zentrale Bedeutung von physikalischen Grössen wie Energie, Impuls und Drehimpuls beruht auf ihrer Eigenschaft, unter sehr allgemeinen Bedingungen, und für Systeme aus beliebig vielen wechselwirkenden Teilchen, *erhalten* (also zeitlich konstant) zu sein. Im folgenden diskutieren wir die Erhaltungsgrössen der Mechanik, zunächst für ein einzelnes Teilchen und dann für Systeme aus vielen Teilchen.

5.1. Impulserhaltung

Für einen einzelnen Massenpunkt folgt aus dem Bewegungsgesetz in der Form (3.3)

$$\frac{d\vec{p}}{dt} = 0 \quad \text{falls} \quad \vec{F} = 0,$$

d.h. der Impuls ist im kräftefreien Fall erhalten. Das ist der Inhalt der Lex prima. Wir betrachten nun zwei Massenpunkte \vec{r}_1 und \vec{r}_2 , die die Kräfte \vec{F}_{12} und \vec{F}_{21} aufeinander ausüben, ansonsten aber kräftefrei sind. Die Bewegungsgesetze lauten

$$\dot{\vec{p}}_1 = \vec{F}_{21}, \quad \dot{\vec{p}}_2 = \vec{F}_{12}.$$

Für den Gesamtimpuls $\vec{P} = \vec{p}_1 + \vec{p}_2$ folgt damit

$$\frac{d\vec{P}}{dt} = \dot{\vec{p}}_1 + \dot{\vec{p}}_2 = \vec{F}_{21} + \vec{F}_{12} = 0 \quad (5.1)$$

wegen der Lex tertia in ihrer schwachen Form (3.4).

Dieses Argument lässt sich offensichtlich auf beliebig viele Teilchen verallgemeinern. Wir betrachten N Teilchen mit Massen m_i an Orten $\vec{r}_i(t)$, $i = 1, \dots, N$. Zwischen den Teilchen wirken *innere Kräfte* (Wechselwirkungen) \vec{F}_{ij} , definiert wie in Kapitel 3. Zusätzlich wirkt auf Teilchen i die *äussere Kraft* \vec{F}_i . Dann lautet nach dem Superpositionsprinzip die Bewegungsgleichung für Teilchen† i

$$\dot{\vec{p}}_i = m_i \ddot{\vec{r}}_i = \sum_{j:j \neq i} \vec{F}_{ij} + \vec{F}_i. \quad (5.2)$$

Die inneren Kräfte werden summiert über alle Teilchen j ausser dem Teilchen i selbst‡. Der Gesamtimpuls

$$\vec{P} = \sum_{i=1}^N \vec{p}_i \quad (5.3)$$

entwickelt sich dann gemäss

$$\frac{d}{dt} \vec{P} = \sum_{i,j:i \neq j} \vec{F}_{ij} + \sum_i \vec{F}_i. \quad (5.4)$$

Die entscheidende Beobachtung ist nun, dass in der Summe über die inneren Kräfte jedes Paar von Teilchen zweimal vorkommt, einmal mit dem Beitrag \vec{F}_{ij} und einmal mit dem Beitrag \vec{F}_{ji} . Wegen der Lex tertia (3.4) heben sich diese Beiträge paarweise weg, und die Summe verschwindet identisch. Wenn keine äusseren Kräfte wirken verschwindet auch die zweite Summe, und wir folgern den

Impulssatz: In einem System ohne äussere Kräfte ist der Gesamtimpuls erhalten.

† Bei den Summenbildungen wird der Wertebereich der Indizes $i, j = 1, \dots, N$ oft unterdrückt.

‡ Wir könnten auch $\vec{F}_{ii} = 0$ definieren und über alle j summieren.

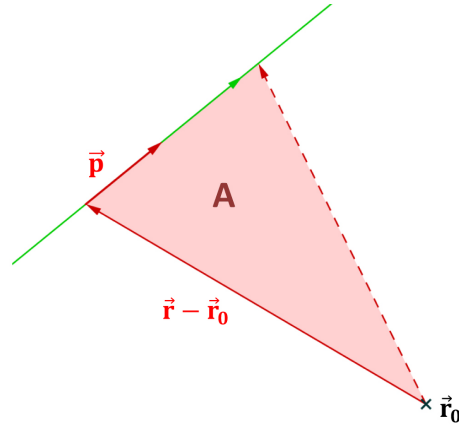


Abbildung 10. Illustration zum Flächensatz.

Definieren wir den *Schwerpunkt* \vec{R} des System durch

$$\vec{R} = \frac{1}{M} \sum_{i=1}^N m_i \vec{r}_i, \quad M = \sum_{i=1}^N m_i, \quad (5.5)$$

so können wir den Gesamtimpuls schreiben in der Form

$$\vec{P} = M \dot{\vec{R}},$$

und (5.4) wird zu

$$\frac{d}{dt} M \dot{\vec{R}} = \sum_{i=1}^N \vec{F}_i = \vec{F}^{(\text{ext})}, \quad (5.6)$$

d.h. der Schwerpunkt bewegt sich wie ein Massenpunkt der Masse M unter dem Einfluss der Summe der äusseren Kräfte $\vec{F}^{(\text{ext})}$. Insbesondere gilt der

Schwerpunktsatz: In einem System ohne äussere Kräfte bewegt sich der Schwerpunkt gleichförmig geradlinig,

$$\vec{R}(t) = \vec{R}(0) + \frac{1}{M} \vec{P} t. \quad (5.7)$$

5.2. Drehimpulserhaltung

Der Drehimpuls eines Massenpunktes relativ zum Bezugspunkt \vec{r}_0 ist definiert durch

$$\vec{l} = (\vec{r}(t) - \vec{r}_0) \times \vec{p}(t). \quad (5.8)$$

Daraus folgt für die zeitliche Änderung

$$\frac{d}{dt} \vec{l} = \dot{\vec{r}} \times \vec{p} + (\vec{r} - \vec{r}_0) \times \dot{\vec{p}} = (\vec{r} - \vec{r}_0) \times \vec{F} \equiv \vec{m}, \quad (5.9)$$

wobei die letzte Beziehung das von der Kraft \vec{F} ausgeübte *Drehmoment* \vec{m} definiert. Im kräftefreien Fall ist der Drehimpuls des Teilchens somit erhalten. Eine anschauliche Darstellung dieser Tatsache bietet der

Flächensatz: Die vom Fahrstrahl§ des Teilchens überstrichene Fläche A wächst gemäss

$$\frac{dA}{dt} = \frac{1}{2m} |\vec{l}|, \quad (5.10)$$

der in den Übungen bewiesen wird.

Analog zum Gesamtimpuls (5.3) besitzt ein System aus N Teilchen den Gesamtdrehimpuls

$$\vec{L} = \sum_{i=1}^N \vec{l}_i = \sum_{i=1}^N m_i (\vec{r}_i - \vec{r}_0) \times \dot{\vec{r}}_i, \quad (5.11)$$

der sich, analog zu (5.9), gemäss

$$\frac{d\vec{L}}{dt} = \sum_{i=1}^N (\vec{r}_i - \vec{r}_0) \times \left(\sum_{j:j \neq i} \vec{F}_{ij} + \vec{F}_i \right) \quad (5.12)$$

mit der Zeit entwickelt. Wir spalten den Beitrag der inneren Kräfte auf in zwei Teile, vertauschen im zweiten Teil die Indizes i und j , und benutzen die Lex tertia (3.4):

$$\begin{aligned} \sum_{i,j:i \neq j} (\vec{r}_i - \vec{r}_0) \times \vec{F}_{ij} &= \sum_{i,j:i < j} (\vec{r}_i - \vec{r}_0) \times \vec{F}_{ij} + \sum_{i,j:i > j} (\vec{r}_i - \vec{r}_0) \times \vec{F}_{ij} = \\ &= \sum_{i,j:i < j} (\vec{r}_i - \vec{r}_0) \times \vec{F}_{ij} + \sum_{i,j:i < j} (\vec{r}_j - \vec{r}_0) \times \vec{F}_{ji} = \sum_{i,j:i < j} (\vec{r}_i - \vec{r}_j) \times \vec{F}_{ij}. \end{aligned}$$

Erfüllen die inneren Kräfte ausserdem den Zusatz 1 (3.5), so verschwindet der Beitrag der inneren Kräfte und aus (5.12) wird

$$\frac{d\vec{L}}{dt} = \sum_{i=1}^N (\vec{r}_i - \vec{r}_0) \times \vec{F}_i \equiv \vec{M}^{(\text{ext})}, \quad (5.13)$$

d.h. die Änderung des Gesamtdrehimpulses ist gegeben durch das Gesamtdrehmoment der *äusseren* Kräfte. Wir formulieren den

Drehimpulssatz: In einem System ohne äussere Kräfte und mit inneren Kräften, die den Zusatz 1 (3.5) erfüllen (also insbesondere bei inneren Zentralkräften) ist der Gesamtdrehimpuls \vec{L} erhalten.

§ Das ist die Verbindungslinie zwischen \vec{r}_0 und \vec{r} , s. Abb. 10.

5.3. Energieerhaltung

It is important to realize that in physics today, we have no knowledge of what energy is. We do not have a picture that energy comes in little blobs of a definite amount. It is not that way. However, there are formulas for calculating some numerical quantity, and when we add it all together it gives "28" - always the same number. It is an abstract thing in that it does not tell us the mechanism or the reasons for the various formulas. Richard Feynman, The Feynman Lectures on Physics Vol. 1.

5.3.1. *Energiesatz für einen Massenpunkt.* Zur Herleitung des Energiesatzes für einen einzelnen Massenpunkt gehen wir aus von der Bewegungsgleichung in der allgemeinsten Form (3.6):

$$m\ddot{\vec{r}} = \vec{F}(\vec{r}, \dot{\vec{r}}, t).$$

Multipliziert man beide Seiten dieser Gleichung skalar mit $\dot{\vec{r}}$, so folgt

$$m\dot{\vec{r}} \cdot \ddot{\vec{r}} = \frac{d}{dt} \left[\frac{1}{2} m (\dot{\vec{r}})^2 \right] = \dot{\vec{r}} \cdot \vec{F}. \quad (5.14)$$

Die Grösse in den eckigen Klammern ist die *kinetische Energie* des Teilchens, die wir (wie in der Mechanik üblich) mit T bezeichnen,

$$T = \frac{1}{2} m (\dot{\vec{r}})^2. \quad (5.15)$$

Nun integrieren wir beide Seiten von (5.14) über das Zeitintervall von t_1 bis t_2 , und erhalten

$$\Delta T = T(t_2) - T(t_1) = \int_{t_1}^{t_2} dt \frac{d\vec{r}}{dt} \cdot \vec{F} = \Delta A. \quad (5.16)$$

Hier bezeichnet ΔA die von der Kraft \vec{F} entlang der Bahn geleistete Arbeit, die gemäss (5.16) gleich der Änderung der kinetischen Energie des Teilchens ist. Die Beziehung $\Delta T = \Delta A$ ist die allgemeinste Form des Energiesatzes für ein Teilchen. Sie ist allerdings nur bedingt von Nutzen, da ΔA in diesem allgemeinsten Fall von dem vollen, raumzeitlichen Verlauf der Bahn abhängt und auch nicht-mechanische Energieformen enthält.

Wir betrachten deshalb im folgenden speziell zeitunabhängige Kraftfelder, $\vec{F} = \vec{F}(\vec{r})$. Dann ist die geleistete Arbeit gegeben durch das *Wegintegral*

$$\Delta A = \int_{\vec{r}_1}^{\vec{r}_2} d\vec{r} \cdot \vec{F}(\vec{r}), \quad (5.17)$$

das zwar nicht mehr vom zeitlichen Ablauf der Bewegung abhängt, aber im allgemeinen noch wegabhängig ist. Für spezielle Kraftfelder, die wir *konservativ* nennen, ist ΔA *wegunabhängig*. Ein Kraftfeld \vec{F} ist genau dann konservativ, wenn überall gilt||

$$\nabla \times \vec{F} = 0, \quad (5.18)$$

|| Wir bezeichnen die Rotation eines Vektorfeldes \vec{V} mit $\nabla \times \vec{V}$, den Gradienten einer Funktion f mit ∇f . Es gilt $\nabla \times \vec{V} = \left(\frac{\partial V_z}{\partial y} - \frac{\partial V_y}{\partial z}, \frac{\partial V_x}{\partial z} - \frac{\partial V_z}{\partial x}, \frac{\partial V_y}{\partial x} - \frac{\partial V_x}{\partial y} \right)$ und $\nabla f = \left(\frac{\partial f}{\partial x}, \frac{\partial f}{\partial y}, \frac{\partial f}{\partial z} \right)$.

und der Definitionsbereich von \vec{F} einfach zusammenhängend ist. Dann existiert zu \vec{F} ein *Potential* ¶, also eine skalare Funktion $V(\vec{r})$ sodass

$$\vec{F} = -\nabla V. \quad (5.19)$$

Damit folgt aus (5.17)

$$\Delta A = - \int_{\vec{r}_1}^{\vec{r}_2} d\vec{r} \cdot \nabla V(\vec{r}) = V(\vec{r}_1) - V(\vec{r}_2),$$

und durch Umstellen von (5.16)

$$T(t_2) + V(\vec{r}(t_2)) = T(t_1) + V(\vec{r}(t_1)) \Rightarrow T + V \equiv E = \text{const.} \quad (5.20)$$

Die Gesamtenergie E des Teilchens, also die Summe aus kinetischer Energie T und potentieller Energie V , ist erhalten.

Ein einfaches Beispiel für eine konservative Kraft ist die (näherungsweise) konstante Kraft im Schwerfeld an der Erdoberfläche: Mit $\vec{F} = -mg\vec{e}_z$ ist das entsprechende Potential $V(\vec{r}) = mgz$. Eine besonders wichtige Klasse von konservativen Kräften sind Zentralkräfte. Wir zeigen, dass *jede Zentralkraft konservativ ist*. Ausgangspunkt ist ein Potential V , das bezüglich des Koordinatenursprungs rotationssymmetrisch ist und somit nur von $r = |\vec{r}|$ abhängt:

$$V(\vec{r}) = \phi(|\vec{r}|), \quad (5.21)$$

mit einer beliebigen (differenzierbaren) Funktion $\phi(r)$. Das zugehörige Kraftfeld ist gemäss (5.19)

$$\vec{F} = -\nabla V = -\phi'(|\vec{r}|)\nabla|\vec{r}| = -\phi'(r)\frac{\vec{r}}{|\vec{r}|},$$

mit $\phi'(r) = d\phi/dr$. Dies ist gerade von der Form (3.7) einer Zentralkraft mit $f(r) = -\phi'(r)$. Andererseits lässt sich *jede* Zentralkraft auf diese Weise aus einem Potential der Form (5.21) gewinnen, weil jede skalare Funktion $f(r)$ eine Stammfunktion $-\phi(r)$ besitzt.

Geschwindigkeitsabhängige Kräfte verletzen im allgemeinen den Energiesatz. Als Beispiel betrachten wir die Bewegung unter dem Einfluss von Stokes-Reibung. Multiplikation beider Seiten von (4.4) mit $\dot{\vec{r}}$ ergibt

$$\frac{dT}{dt} = -\gamma(\dot{\vec{r}})^2 < 0.$$

Die kinetische Energie des Teilchens nimmt ab, Bewegungsenergie wird in Wärmeenergie des umgebenden Fluids *dissipiert*. Allerdings sind nicht alle geschwindigkeitsabhängigen Kräfte dissipativ. Eine Ausnahme ist der magnetische Anteil der Lorentz-Kraft (3.11): Da $\dot{\vec{r}} \cdot (\dot{\vec{r}} \times \vec{B}) = 0$, leistet das Magnetfeld keine Arbeit und die kinetische Energie des Teilchens bleibt erhalten.

¶ Die genaue Bedeutung dieses Begriffs ist hier: $V(\vec{r})$ ist (bis auf eine additive Konstante) die potentielle Energie eines Teilchens, das sich im Kraftfeld $\vec{F} = -\nabla V$ bewegt.

5.3.2. *Energiesatz für ein System von Massenpunkten.* Wir verallgemeinern nun den Energiesatz (5.20) auf ein System von N Teilchen mit *inneren Zentralkräften* und *konservativen äusseren Kräften*. Die inneren Kräfte \vec{F}_{ij} entstehen aus rotationssymmetrischen Wechselwirkungspotentialen

$$V_{ij}(\vec{r}_i, \vec{r}_j) = \phi_{ij}(|\vec{r}_i - \vec{r}_j|)$$

gemäss

$$\vec{F}_{ij} = -\nabla_i V_{ij}(\vec{r}_i, \vec{r}_j) = -\phi'_{ij}(|\vec{r}_i - \vec{r}_j|) \frac{\vec{r}_i - \vec{r}_j}{|\vec{r}_i - \vec{r}_j|}, \quad (5.22)$$

wobei ∇_i die Bildung des Gradienten bezüglich der Variablen \vec{r}_i bezeichnet. Ein wichtiges Beispiel ist die Gravitationswechselwirkung (3.8) mit dem zugehörigen Potential

$$\phi_{ij}(r) = -\frac{Gm_i m_j}{r}. \quad (5.23)$$

Das Potential der äusseren Kräfte ist eine Funktion $V^{(\text{ext})}(\vec{r}_1, \dots, \vec{r}_N)$ aller Teilchenkoordinaten, sodass

$$\vec{F}_i = -\nabla_i V^{(\text{ext})}. \quad (5.24)$$

Die gesamte kinetische Energie des Systems ist

$$T = \sum_{i=1}^N \frac{1}{2} m_i (\dot{\vec{r}}_i)^2. \quad (5.25)$$

Sie ändert sich in der Zeit gemäss

$$\begin{aligned} \frac{dT}{dt} &= \sum_{i=1}^N m_i \dot{\vec{r}}_i \cdot \ddot{\vec{r}}_i = \sum_{i,j:i \neq j} \dot{\vec{r}}_i \cdot \vec{F}_{ij} + \sum_{i=1}^N \dot{\vec{r}}_i \cdot \vec{F}_i = \\ &= \sum_{i,j:i < j} (\dot{\vec{r}}_i \cdot \vec{F}_{ij} + \dot{\vec{r}}_j \cdot \vec{F}_{ji}) + \sum_{i=1}^N \dot{\vec{r}}_i \cdot \vec{F}_i = \sum_{i,j:i < j} (\dot{\vec{r}}_i - \dot{\vec{r}}_j) \cdot \vec{F}_{ij} + \sum_{i=1}^N \dot{\vec{r}}_i \cdot \vec{F}_i. \end{aligned} \quad (5.26)$$

Im ersten Schritt wurden die Bewegungsgleichungen der Teilchen eingesetzt. Im zweiten Schritt wurde die Lex tertia in ihrer schwachen Form (3.4) ausgenutzt, um die erste Summe über i, j , in der jedes Teilchenpaar zweimal vorkommt, in eine Summe umzuwandeln, in der jedes Paar nur einmal auftaucht.

Die gesamte potentielle Energie des Systems ist

$$V = \sum_{i,j:i < j} V_{ij}(\vec{r}_i, \vec{r}_j) + V^{(\text{ext})}(\vec{r}_1, \dots, \vec{r}_N), \quad (5.27)$$

wobei zu beachten ist, dass in der Summe über i, j jedes Teilchenpaar nur einmal gezählt wird. Durch Zeitableitung erhalten wir

$$\frac{dV}{dt} = \sum_{i,j:i < j} (\dot{\vec{r}}_i \cdot \nabla_i V_{ij} + \dot{\vec{r}}_j \cdot \nabla_j V_{ij}) + \sum_{i=1}^N \dot{\vec{r}}_i \cdot \nabla_i V^{(\text{ext})}(\vec{r}_1, \dots, \vec{r}_N) = \quad (5.28)$$

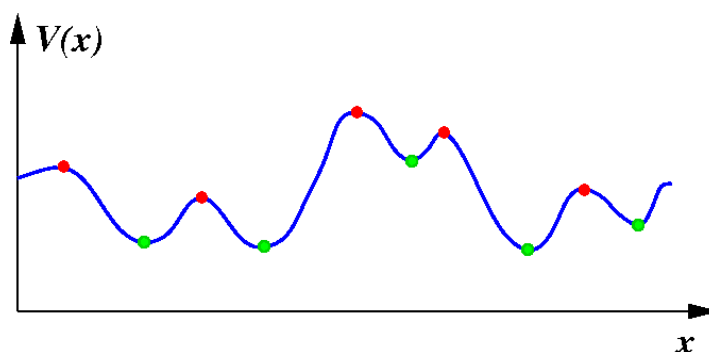


Abbildung 11. Stabile (grün) und instabile (rot) Ruhelagen im eindimensionalen Potential.

$$= - \sum_{i,j:i < j} (\dot{\vec{r}}_i - \dot{\vec{r}}_j) \cdot \vec{F}_{ij} - \sum_{i=1}^N \dot{\vec{r}}_i \cdot \vec{F}_i = - \frac{dT}{dt},$$

da $\nabla_i V_{ij} = \vec{F}_{ij} = -\vec{F}_{ji} = -\nabla_j V_{ij}$. Damit haben wir gezeigt

$$\frac{d}{dt}(T + V) = 0 \Leftrightarrow T + V = E = \text{const.} \quad (5.29)$$

5.4. Bewegung in einer Dimension

In diesem Kapitel untersuchen wir Bewegungen entlang der eindimensionalen x -Achse, also Lösungen der Bewegungsgleichung

$$m \frac{d^2 x}{dt^2} = F(x) \quad (5.30)$$

für allgemeine Kraftfelder $F(x)$. Eine wesentliche Vereinfachung im Vergleich zum höherdimensionalen Fall folgt aus der Tatsache, dass jedes eindimensionale Kraftfeld konservativ ist, da sich das Potential stets durch Integration

$$V(x_2) - V(x_1) = - \int_{x_1}^{x_2} dx F(x)$$

definieren lässt. Geometrisch betrachtet existiert das Potential, weil es auf der reellen Achse zwischen je zwei Punkten nur einen einzigen Weg gibt.

5.4.1. Bewegungstypen. Wir wollen zunächst die möglichen Bewegungstypen in einem allgemeinen Potential⁺ $V(x)$ klassifizieren. Aus dem Energiesatz (5.20) folgt wegen $T = \frac{1}{2}m(\dot{x})^2 \geq 0$, dass für jede Bewegung gelten muss

$$V(x) \leq E. \quad (5.31)$$

Das führt auf drei mögliche Situationen:

⁺ Wir nehmen hier und im folgenden immer an, dass $V(x)$ differenzierbar ist und damit $F(x)$ überall wohldefiniert.

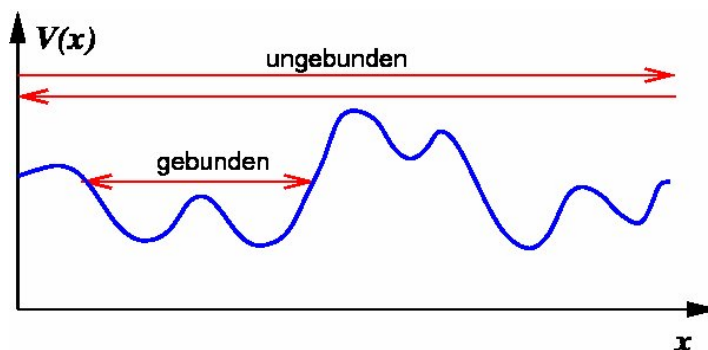


Abbildung 12. Gebundene und ungebundene Bewegung in einem eindimensionalen Potential.

- a) *Ruhelagen.* Ein Punkt x_0 ist eine Ruhelage, wenn

$$F(x_0) = -V'(x_0) = 0,$$

d.h. x_0 ist ein Minimum, ein Maximum oder auch ein Sattelpunkt des Potentials. Minima des Potentials mit $V''(x_0) > 0$, $F'(x_0) < 0$ sind stabile Ruhelagen, Maxima des Potentials ($V''(x_0) < 0$, $F'(x_0) > 0$) sind instabile Ruhelagen (Abb. 11). In der Ruhelage ist $\dot{x} = 0$ und somit $E = V(x_0)$.

- b) *Gebundene Bewegung.* Wenn $V(x) \leq E$ für $x_1 \leq x \leq x_2$ und $V(x) > E$ für $x < x_1$ und $x > x_2$, so ist das Teilchen im Intervall $[x_1, x_2]$ eingespermt und oszilliert periodisch zwischen den Umkehrpunkten x_1 und x_2 hin und her (Abb. 12).
- c) *Ungebundene Bewegung.* Gilt überall $E > V(x)$, so bewegt sich das Teilchen (mit i.a. variablem Geschwindigkeitsbetrag) ungebunden nach links oder nach rechts (Abb. 12).

5.4.2. Energiemethode. Wir zeigen jetzt, wie sich die Bewegungsgleichung (5.30) für allgemeine Kraftfelder $F(x)$ mit Hilfe des Energiesatzes

$$\frac{1}{2}m(\dot{x})^2 + V(x) = E \tag{5.32}$$

lösen läßt. Zunächst reduziert sich die Differentialgleichung 2. Ordnung (5.30) durch Auflösen von (5.32) auf eine Differentialgleichung 1. Ordnung, die wir zunächst noch in der impliziten Form

$$(\dot{x})^2 = \frac{2}{m}[E - V(x)] \tag{5.33}$$

anschreiben. Der Wert der Energie ist dabei durch die Anfangsbedingung festgelegt,

$$E = \frac{1}{2}m\dot{x}(0)^2 + V(x(0)).$$

Die Differentialgleichung (5.33) ist offensichtlich nur sinnvoll, wenn $E \geq V(x)$. Dann können wir auf beiden Seiten die Wurzel ziehen, und erhalten

$$\frac{dx}{dt} = \pm \sqrt{\frac{2}{m}[E - V(x)]}. \quad (5.34)$$

Das positive Vorzeichen beschreibt die Bewegung nach rechts, das negative Vorzeichen die Bewegung nach links. Wir wählen das positive Vorzeichen und bemerken, dass sich die Differentialgleichung (5.34) im Prinzip immer durch Trennung der Variablen lösen lässt. Dazu bringen wir die x -abhängigen Terme auf eine Seite,

$$\frac{dx}{\sqrt{(2/m)[E - V(x)]}} = dt. \quad (5.35)$$

Durch Integration beider Seiten,

$$t = \int_{x(0)}^{x(t)} \frac{dx'}{\sqrt{(2/m)[E - V(x')]}}, \quad (5.36)$$

erhalten wir so die Umkehrfunktion $t(x)$ der gesuchten Bewegung $x(t)$.

Die skizzierte *Energiemethode* erlaubt also die Lösung der eindimensionalen Bewegungsgleichung (5.30) für allgemeine Kräfte $F(x)$. Wir illustrieren sie für den eindimensionalen harmonischen Oszillator mit der Kraft $F = -kx$. Das zugehörige Potential ist eine nach oben offene Parabel,

$$V(x) = \frac{1}{2}kx^2 = \frac{1}{2}m\omega^2x^2, \quad (5.37)$$

mit der Eigenfrequenz $\omega = \sqrt{k/m}$. Bei vorgegebener Energie E bewegt sich der Massenpunkt $x(t)$ zwischen den Punkten maximaler Auslenkung x_{\max} und $-x_{\max}$ periodisch hin und her. An den Umkehrpunkten verschwindet die kinetische Energie, es gilt $E = V(x_{\max}) = V(-x_{\max})$ und somit

$$x_{\max} = \sqrt{\frac{2E}{m\omega^2}}. \quad (5.38)$$

Geometrisch stellt der Energiesatz

$$E = \frac{1}{2}m\dot{x}^2 + \frac{1}{2}m\omega^2x^2 \quad (5.39)$$

die Gleichung einer *Ellipse* in der (x, \dot{x}) -Ebene dar, die im Uhrzeigersinn durchlaufen wird.

Wir führen die Energiemethode für den harmonischen Oszillator explizit durch, und betrachten o.B.d.A. die Bewegung nach rechts mit $\dot{x} > 0$. Zu berechnen ist gemäss (5.36) das Integral

$$t = \int_{x(0)}^{x(t)} \frac{dx'}{\sqrt{(2/m)[E - (k/2)(x')^2]}}. \quad (5.40)$$

Aus einer Integraltafel entnehmen wir die Stammfunktion

$$\int \frac{dx}{\sqrt{A - Bx^2}} = \frac{1}{\sqrt{B}} \arcsin \left(\sqrt{\frac{B}{A}} x \right) + C.$$

Im vorliegenden Fall ist $B = k/m = \omega^2$ und $B/A = 1/x_{\max}^2$, sodass aus (5.40) folgt

$$t = \frac{1}{\omega} [\arcsin(x(t)/x_{\max}) - \arcsin(x(0)/x_{\max})]. \quad (5.41)$$

Durch Auflösen nach $x(t)$ erhalten wir die bekannte harmonische Schwingung

$$x(t) = x_{\max} \sin(\omega t + \varphi), \quad (5.42)$$

mit der Phase $\varphi = \arcsin(x(0)/x_{\max})$.

5.5. Das Noether-Theorem

Fassen wir die Erkenntnisse der Abschnitte 5.1, 5.2 und 5.3 zusammen: Ein N -Teilchen-System ohne äussere Kräfte und mit inneren Zentralkräften besitzt (mindestens) 10 reelle Erhaltungsgrössen, und zwar

- die 3 Komponenten des Gesamtimpulses \vec{P} und die drei Komponenten des Schwerpunktes $\vec{R}(0)$ im Schwerpunktsatz (5.7),
- die 3 Komponenten des Gesamtdrehimpulses \vec{L} , und
- die skalare Gesamtenergie E .

Nicht zufällig ist die Zahl der Erhaltungsgrössen gerade gleich der Zahl der Parameter der allgemeinen Galilei-Transformation aus Kapitel 4, die sich zusammensetzen aus

- den drei Komponenten des Verschiebungsvektors \vec{r}_0 bei räumlichen Translationen und der Verschiebung t_0 des Zeitnullpunktes in (4.1),
- den drei Winkeln, die eine allgemeine Drehung (4.2) parametrisieren, und
- den drei Komponenten der Geschwindigkeit \vec{w}_0 in der speziellen Galilei-Transformation (4.3).

Tatsächlich gibt es eine eindeutige Zuordnung zwischen den 10 Erhaltungsgrössen und den 10 Symmetrietransformationen der Galilei-Gruppe, die die Gesetze der klassischen Mechanik invariant lassen (Tabelle 1). Dies ist eine Anwendung des *Noether-Theorems*, das 1918 von Emmy Noether (in einem sehr viel allgemeineren Kontext) formuliert wurde, und das für viele Bereiche der Physik von fundamentaler Bedeutung ist. Wir werden darauf im Kapitel über analytische Mechanik noch zurückkommen.

Hier wollen wir zunächst an einem einfachen Beispiel den Zusammenhang zwischen Impulserhaltung und Translationsinvarianz plausibel machen. Wir gehen aus von einem N -Teilchen-System, dessen potentielle Energie von der allgemeinen Form

$$V(\vec{r}_1, \vec{r}_2, \dots, \vec{r}_N) = \sum_{i,j:i < j} V_{ij}(\vec{r}_i, \vec{r}_j) + \sum_{i=1}^N V_i^{(\text{ext})}(\vec{r}_i) \quad (5.43)$$

sein soll. Wir fordern für dieses System Translationsinvarianz und zeigen, dass dann der Gesamtimpuls \vec{P} erhalten ist. Invarianz unter beliebigen räumlichen Translationen heisst, dass für jeden beliebigen Verschiebungsvektor \vec{r}_0

$$V(\vec{r}_1 + \vec{r}_0, \vec{r}_2 + \vec{r}_0, \dots, \vec{r}_N + \vec{r}_0) = V(\vec{r}_1, \vec{r}_2, \dots, \vec{r}_N).$$

Erhaltungsgrösse	Symmetrie	Eigenschaft
Impuls \vec{P}	räumliche Translation \vec{r}_0	Homogenität des Raumes
Drehimpuls \vec{L}	räumliche Drehung \hat{R}	Isotropie des Raumes
Energie E	zeitliche Translation t_0	Homogenität der Zeit
Schwerpunkt $\vec{R}(0)$	spezielle Galilei-Transformation \vec{w}_0	Galilei-Invarianz

Tabelle 1. Der Zusammenhang zwischen Symmetrien und Erhaltungsgrössen. Die Homogenität von Raum und Zeit und die Isotropie des Raumes sind sehr allgemeine Eigenschaften unseres Universums, die (soweit wir heute wissen) in allen Bereichen der Physik Gültigkeit haben. Die Eigenschaft der Galilei-Invarianz hingegen gilt nur in der Newton'schen Physik und wird später durch die Lorentz-Invarianz der speziellen Relativitätstheorie zu ersetzen sein.

Für die äusseren Potentiale in (5.43) folgt aus $V_i^{(\text{ext})}(\vec{r}_i + \vec{r}_0) = V_i^{(\text{ext})}(\vec{r}_i)$ offensichtlich, dass $V_i^{(\text{ext})}$ konstant ist und damit die äusseren Kräfte verschwinden,

$$\vec{F}_i = -\nabla V_i^{(\text{ext})} = 0. \quad (5.44)$$

Für das Wechselwirkungspotential folgt aus der Forderung

$$V_{ij}(\vec{r}_i + \vec{r}_0, \vec{r}_j + \vec{r}_0) = V_{ij}(\vec{r}_i, \vec{r}_j),$$

dass V_{ij} nur vom Differenzvektor $\vec{r}_i - \vec{r}_j$ abhängen kann,

$$V_{ij}(\vec{r}_i, \vec{r}_j) = v_{ij}(\vec{r}_i - \vec{r}_j), \quad (5.45)$$

und damit

$$\vec{F}_{ij} = -\nabla_i V_{ij} = \nabla_j V_{ij} = -\vec{F}_{ji}. \quad (5.46)$$

Aus den Gleichungen (5.44) und (5.46) folgt, wie in Abschnitt 5.1 gezeigt wurde, die Erhaltung von \vec{P} .

Schliesslich bemerken wir noch, dass die zusätzliche Annahme von Rotationsinvarianz erzwingt, dass das Potential v_{ij} in (5.45) nur vom Betrag des Abstandsvektors $|\vec{r}_i - \vec{r}_j|$ abhängen kann, die inneren Kräfte also Zentralkräfte sind. Damit ist gemäss Abschnitt 5.2 auch die Drehimpulserhaltung gewährleistet.

6. Das Kepler-Problem

6.1. Die Kepler'schen Gesetze

Auf der Grundlage der Marsbeobachtungen von Tycho Brahe stellte Johannes Kepler die folgenden drei Gesetze der Planetenbewegung auf†:

† Eine schöne Darstellung der Geschichte dieses Problems bis hin zu aktuellen Entwicklungen gibt das Buch *Was Newton nicht wusste: Chaos im Sonnensystem* von Ivars Peterson (insel taschenbuch 2184, 1997).

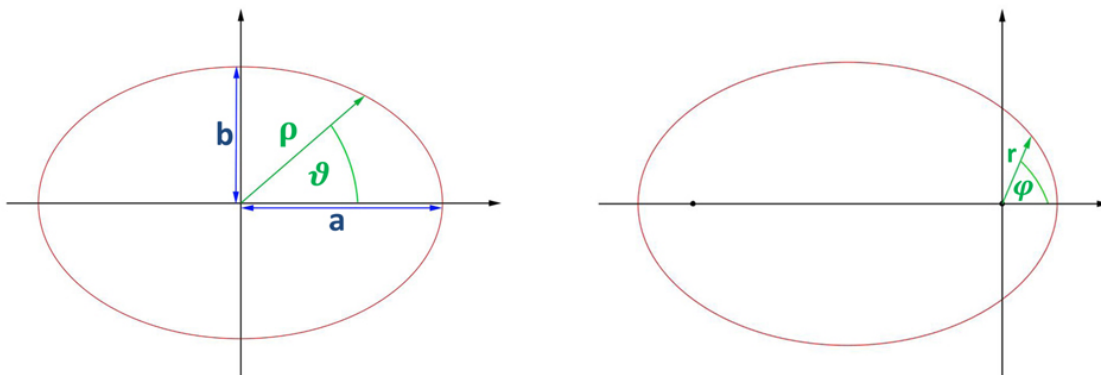


Abbildung 13. Darstellung von Ellipsen in Polarkoordinaten bezüglich des Mittelpunkts (links) bzw. eines Brennpunkts (rechts). Links sind auch die beiden Halbachsen der Ellipse eingezeichnet.

- I. *Die Planeten bewegen sich auf Ellipsen, in deren einem Brennpunkt sich die Sonne befindet (1609).*

Wir erinnern hier kurz an die mathematische Darstellung von Ellipsen (Abb. 13). In einem kartesischen Koordinatensystem, dessen Ursprung sich im Mittelpunkt der Ellipse befindet, lautet die Ellipsengleichung

$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1 \quad (6.1)$$

und a und b , mit $a > b$, heissen *grosse* bzw. *kleine* Halbachse. Benutzt man stattdessen zweidimensionale Polarkoordinaten (ρ, ϑ) bezüglich des Mittelpunkts, so ist die Ellipse gegeben durch

$$\rho^2(\vartheta) = \frac{b^2}{1 - \epsilon^2 \cos^2(\vartheta)} \quad (6.2)$$

mit der *Exzentrizität*

$$\epsilon = \sqrt{1 - b^2/a^2}, \quad (6.3)$$

und in Polarkoordinaten (r, φ) bezüglich eines der Brennpunkte lautet die Darstellung

$$r(\varphi) = \frac{r_0}{1 + \epsilon \cos(\varphi)} \quad (6.4)$$

mit dem *Halbparameter* r_0 , der mit den anderen Parametern über die Beziehung

$$r_0 = (1 - \epsilon^2)a = b^2/a \quad (6.5)$$

verknüpft ist.

Es ist in mehrfacher Hinsicht bemerkenswert, dass Kepler dieses Gesetz finden konnte. Konzeptionell bedeuten die Ellipsenbahnen eine Abkehr vom Dogma der perfekten Kreisbahnen, an dem Aristoteles wie auch Kopernikus aus letztlich ästhetischen Gründen festhielten. Andererseits sind die Exzentrizitäten der meisten

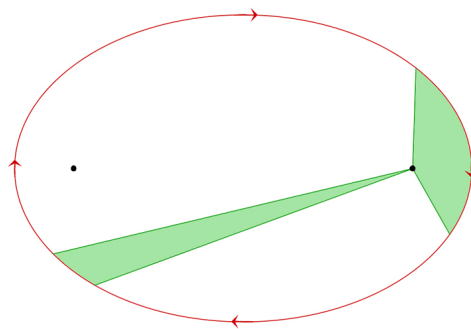


Abbildung 14. Illustration des zweiten Kepler'schen Gesetzes. Die beiden grün schattierten Flächen werden in gleichen Zeiten überstrichen und sind gleich groß.

Planetenbahnen klein (z.B. $\epsilon \approx 0.0935$ für die Marsbahn, $\epsilon \approx 0.0167$ für die Erdbahn). Dies zeigt, dass die Beobachtungen von Brahe (der noch kein Teleskop kannte) ausserordentlich präzise gewesen sein müssen.

- II. *Die Verbindungslinie zwischen den Planeten und der Sonne überstreicht in gleichen Zeiten gleiche Flächen (1609).*

Auch dieses Gesetz stellte einen radikalen Bruch mit der Tradition dar, da es die Annahme einer konstanten Geschwindigkeit der Himmelskörper aufgibt. Aus moderner Sicht ist das Gesetz ein Spezialfall des Flächensatzes (5.10), der für jedes Zentralpotential gilt (Abb. 14). Es enthält deshalb, im Gegensatz zu den anderen beiden Gesetzen, keine spezifische Information über die funktionale Form der Gravitationswechselwirkung.

- III. *Die Quadrate der Umlaufzeiten der Planeten verhalten sich wie die Kuben ihrer grossen Halbachsen (1618).*

Aus diesem Gesetz können wir sehr einfach auf die $1/r^2$ -Abhängigkeit der Gravitationskraft (3.8) schliessen. Wir betrachten dazu (als Spezialfall der Ellipse) eine Kreisbahn vom Radius R . Die Umlaufzeit sei T , die Geschwindigkeit des Massenpunktes also $v = 2\pi R/T$. Dann muss die Schwerkraft F_S die Zentripetalkraft kompensieren, sodass

$$F_S = \frac{mv^2}{R} = \frac{4\pi^2 mR^2}{T^2 R} = \frac{4\pi^2 mR}{T^2}.$$

Das dritte Kepler'sche Gesetz besagt nun, dass[‡]

$$T^2 \sim R^3$$

und deshalb $F_S \sim m/R^2$.

Wir werden im Verlauf dieses Kapitels sehen, dass auch das erste Kepler'sche Gesetz spezifisch für die $1/r^2$ -Abstandsabhängigkeit des Gravitationsgesetzes ist.

[‡] Die Notation $a \sim b$ besagt, dass die beiden Grössen zueinander proportional sind, d.h. das Verhältnis a/b ist eine (nicht spezifizierte) Konstante. Im vorliegenden Fall bedeutet $T^2 \sim a^3$, dass das Verhältnis T^2/a^3 für alle Planeten gleich ist.

Andere Abstandsgesetze würden in den meisten Fällen nicht einmal geschlossene Planetenbahnen produzieren§.

6.2. Zweikörperproblem mit Zentralkraft

Wir wollen nun die Kepler'schen Gesetze systematisch aus dem Gravitationsgesetz (3.8) herleiten. Dazu untersuchen wir zunächst ganz allgemein die Bewegung von zwei Massenpunkten, die über ein Zentralpotential $V(|\vec{r}_1 - \vec{r}_2|)$ miteinander wechselwirken. Die Bewegungsgleichungen lauten

$$m_1 \ddot{\vec{r}}_1 = -\nabla_1 V = -V'(|\vec{r}_1 - \vec{r}_2|) \frac{\vec{r}_1 - \vec{r}_2}{|\vec{r}_1 - \vec{r}_2|} \quad (6.6)$$

$$m_2 \ddot{\vec{r}}_2 = -\nabla_2 V = -V'(|\vec{r}_1 - \vec{r}_2|) \frac{\vec{r}_2 - \vec{r}_1}{|\vec{r}_1 - \vec{r}_2|} = \nabla_1 V. \quad (6.7)$$

Wir werden das Zweikörperproblem (6.6,6.7) mit Hilfe der in Kapitel 5 abgeleiteten Erhaltungssätze auf eine eindimensionale Bewegung reduzieren, und diese dann mit der Energiemethode aus Abschnitt 5.4 analysieren.

6.2.1. Impulserhaltung. Wir wissen aus Abschnitt 5.1, dass sich der Schwerpunkt

$$\vec{R}(t) = \frac{m_1 \vec{r}_1(t) + m_2 \vec{r}_2(t)}{m_1 + m_2} \quad (6.8)$$

geradlinig gleichförmig bewegt. Die *Relativkoordinate*

$$\vec{r}(t) \equiv \vec{r}_1(t) - \vec{r}_2(t) \quad (6.9)$$

erfüllt nach (6.6,6.7) die Bewegungsgleichung

$$\ddot{\vec{r}} = \ddot{\vec{r}}_1 - \ddot{\vec{r}}_2 = -\left(\frac{1}{m_1} + \frac{1}{m_2}\right) V'(r) \frac{\vec{r}}{r}, \quad (6.10)$$

wobei wie üblich $r = |\vec{r}|$. Durch Einführung der *reduzierten Masse*

$$\mu = \left(\frac{1}{m_1} + \frac{1}{m_2}\right)^{-1} = \frac{m_1 m_2}{m_1 + m_2} \quad (6.11)$$

lässt sich (6.10) in die Form

$$\mu \ddot{\vec{r}} = -V'(r) \frac{\vec{r}}{r} \quad (6.12)$$

bringen, d.h. die Relativkoordinate bewegt sich wie ein einzelnes Teilchen der Masse μ . Sind die Massen der beiden Teilchen gleich, $m_1 = m_2 = m$, so gilt $\mu = m/2$. Ist andererseits eine der beiden Massen sehr viel grösser als die andere, so ist μ durch die leichtere Masse bestimmt, $\mu \approx \min[m_1, m_2]$.

§ Dies ist die Aussage des *Betrand'schen Theorems*: Unter allen Zentralpotentialen $V(r)$ haben nur das $1/r$ -Potential und das harmonische Potential $V(r) \sim r^2$ die Eigenschaft, dass alle gebundenen Bahnen geschlossen sind.

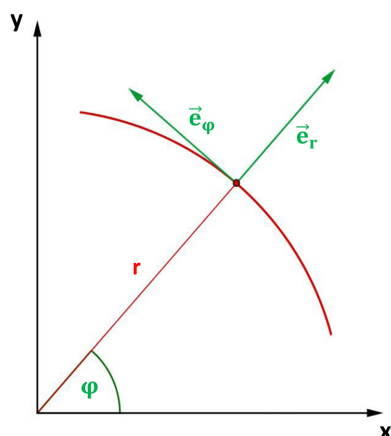


Abbildung 15. Illustration zu den ebenen Polarkoordinaten.

6.2.2. Drehimpulserhaltung. Aus Abschnitt 5.2 wissen wir, dass der Drehimpuls eines Teilchens in einem Zentralpotential erhalten ist. Diese Aussage übertragen wir nun auf den Drehimpuls

$$\vec{l} = \mu(\vec{r} \times \dot{\vec{r}}) \quad (6.13)$$

der Relativbewegung. Da $\vec{r} \cdot \vec{l} = \dot{\vec{r}} \cdot \vec{l} = 0$, verläuft die Bewegung für alle Zeiten in einer Ebene senkrecht zu \vec{l} . Wir wählen die z -Achse des Koordinatensystems in Richtung von \vec{l} , $\vec{l} = l\vec{e}_z$, und beschreiben die Bewegung durch ebene Polarkoordinaten (r, φ) in der (x, y) -Ebene (Abb. 15),

$$x = r \cos \varphi, \quad y = r \sin \varphi,$$

mit den zugehörigen Einheitsvektoren

$$\vec{e}_r = (\cos \varphi, \sin \varphi), \quad \vec{e}_\varphi = (-\sin \varphi, \cos \varphi). \quad (6.14)$$

Die Geschwindigkeit der Relativkoordinate ergibt sich so zu

$$\dot{\vec{r}} = \frac{d}{dt} r \vec{e}_r = \dot{r} \vec{e}_r + r \dot{\vec{e}}_r = \dot{r} \vec{e}_r + r \dot{\varphi} \frac{d\vec{e}_r}{d\varphi} = \dot{r} \vec{e}_r + r \dot{\varphi} \vec{e}_\varphi. \quad (6.15)$$

Die im letzten Schritt benutzte Beziehung folgt aus (6.14). Damit erhalten wir für den Drehimpuls (6.13) den Ausdruck

$$\vec{l} = \mu(\vec{r} \times \dot{\vec{r}}) = \mu r^2 \dot{\varphi} (\vec{e}_r \times \vec{e}_\varphi) = l \vec{e}_z,$$

und durch Vergleich der Koeffizienten folgt die *Azimuthalgleichung*

$$\dot{\varphi} = \frac{l}{\mu r^2}. \quad (6.16)$$

Da l eine Konstante ist, verknüpft (6.16) die beiden zeitabhängigen Funktionen $r(t)$ und $\varphi(t)$.

6.2.3. *Energieerhaltung.* In den vorangegangenen Abschnitten haben wir Impulserhaltung und Drehimpulserhaltung ausgenutzt, es bleibt noch der Energiesatz (Abschnitt 5.3). Die Energie der Relativbewegung ist

$$E = \frac{1}{2}\mu|\dot{\vec{r}}|^2 + V(r) = \text{const.}$$

Aus (6.15) folgt

$$|\dot{\vec{r}}|^2 = |\dot{r}\vec{e}_r + r\dot{\varphi}\vec{e}_\varphi|^2 = \dot{r}^2 + r^2\dot{\varphi}^2.$$

Damit erhalten wir

$$E = \frac{1}{2}\mu\dot{r}^2 + \frac{1}{2}\mu r^2\dot{\varphi}^2 + V(r) = \frac{1}{2}\mu\dot{r}^2 + U(r), \quad (6.17)$$

mit dem *effektiven Potential*

$$U(r) = V(r) + \frac{l^2}{2\mu r^2}. \quad (6.18)$$

Es enthält neben dem Zentralpotential $V(r)$ das ‘‘Zentrifugalpotential’’ $l^2/2\mu r^2$, das eigentlich die kinetische Energie der Azimuthalbewegung darstellt. Im letzten Schritt wurde in (6.17) die Azimuthalgleichung (6.16) benutzt. Die Radialkoordinate vollführt eine *eindimensionale* Bewegung $r(t)$ im Potential $U(r)$.

Die Lösung des eindimensionalen Problems ist aus dem Abschnitt 5.4 bekannt: Auflösen von (6.17) nach \dot{r} liefert

$$\frac{dr}{dt} = \pm \sqrt{\frac{2}{\mu}[E - U(r)]}. \quad (6.19)$$

Durch Trennung der Variablen ergibt sich die Lösung dieser Differentialgleichung (in impliziter Form) zu

$$t(r) = t(r_0) \pm \int_{r_0}^r \frac{dr'}{\sqrt{\frac{2}{\mu}[E - U(r')]}}. \quad (6.20)$$

Gelingt es, das Integral auszuwerten und das Ergebnis nach $r(t)$ aufzulösen, so erhalten wir schliesslich noch die Zeitabhängigkeit der Winkelvariablen aus (6.16),

$$\varphi(t) = \varphi(t_0) + \frac{l}{\mu} \int_{t_0}^t \frac{dt'}{r^2(t')}. \quad (6.21)$$

Mit den Gleichungen (6.18), (6.20) und (6.21) ist die Lösung des allgemeinen Zweikörperproblems (6.6,6.7) (zumindest im Prinzip!) gelungen.

6.3. Bahnkurven im Keplerproblem

Wir konzentrieren uns nun wieder auf die Gravitationswechselwirkung (3.8). Das zugehörige Potential ist

$$V(r) = -\frac{Gm_1m_2}{r} \equiv -\frac{\alpha}{r} \quad (6.22)$$

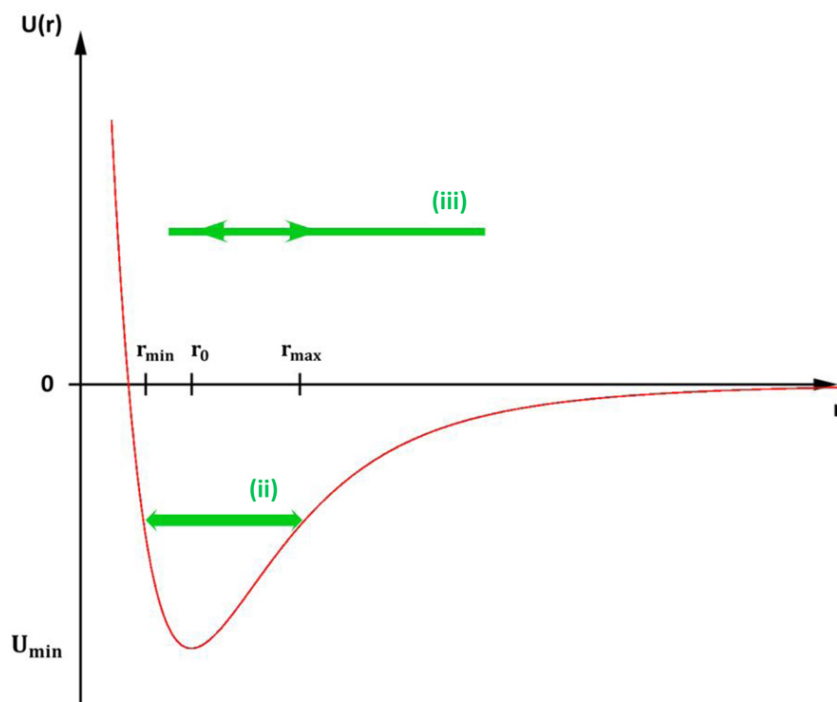


Abbildung 16. Effektives Potential $U(r)$ im Keplerproblem. Die dicken grünen Pfeile illustrieren die (ii) gebundene und (iii) ungebundene Radialbewegung.

mit der Gravitationskonstanten $G \approx 6.67 \times 10^{-11} \text{m}^3/\text{kg} \cdot \text{s}^2$ und der Abkürzung $\alpha = Gm_1m_2$. Das effektive Potential ist (Abb. 16)

$$U(r) = -\frac{\alpha}{r} + \frac{l^2}{2\mu r^2}. \quad (6.23)$$

Wir nehmen im folgenden an, dass $l \neq 0$. Dann dominiert bei kleinen Abständen der Zentrifugalanteil, $U(r) \sim r^{-2} \rightarrow \infty$ für $r \rightarrow 0$, und bei grossen Abständen das (negative) Gravitationspotential, $U(r) \sim -\alpha/r \rightarrow 0$. Dazwischen liegt ein Potentialminimum im Abstand

$$r_0 = \frac{l^2}{\mu\alpha}, \quad (6.24)$$

bei dem das Potential den Wert

$$U_{\min} = -\frac{\mu\alpha^2}{2l^2} \quad (6.25)$$

annimmt.

6.3.1. Bewegungstypen. Wir diskutieren zunächst qualitativ die Bewegungstypen in Abhängigkeit von der Gesamtenergie E (s. auch Abb. 17).

- (i) $E = U_{\min}$, $r = r_0$: Dies ist die stabile Ruhelage der Radialbewegung, die einer Kreisbewegung mit Radius r_0 und [gemäss (6.16)] Kreisfrequenz

$$\omega = \dot{\varphi} = \frac{l}{\mu r_0^2} \quad (6.26)$$

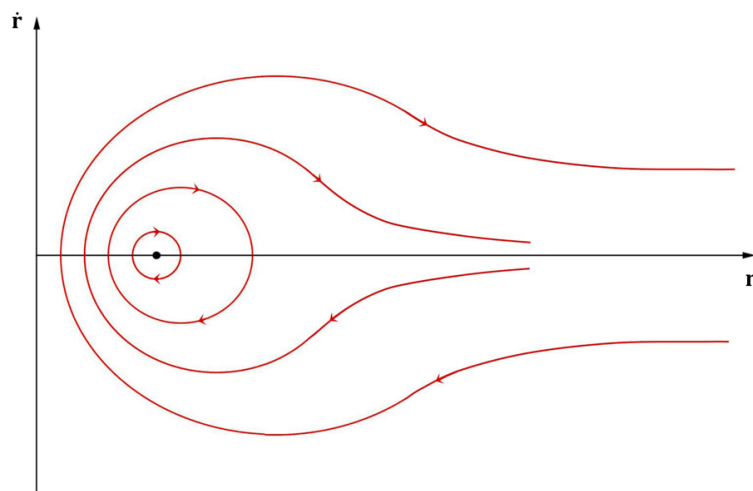


Abbildung 17. Darstellung der gebundenen und ungebundenen Radialbewegung in der (r, \dot{r}) -Ebene. Der Punkt auf der r -Achse repräsentiert die Kreisbewegung.

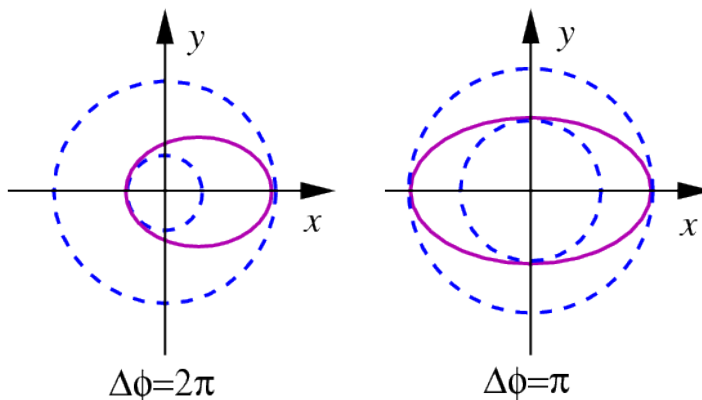


Abbildung 18. Geschlossene Bahnen mit $\Delta\varphi = 2\pi$ und $\Delta\varphi = \pi$. Der linke Fall entspricht dem Kepler-Problem, der rechte dem dreidimensionalen harmonischen Oszillator: Wären die Planeten mit Hooke'schen Federn an die Sonne gebunden, läge die Sonne im Mittelpunkt und nicht im Brennpunkt der Ellipsenbahnen.

entspricht.

- (ii) $U_{\min} < E < 0$: Die Radialbewegung ist eine *gebundene Oszillation* zwischen Umkehrpunkten r_{\min} und r_{\max} . Die Winkelverschiebung nach einer Periode dieser Oszillation ergibt sich aus (6.16) zu

$$\Delta\varphi = \frac{2l}{\mu} \int_{t(r_{\min})}^{t(r_{\max})} \frac{dt'}{r^2(t')} = 2l \int_{r_{\min}}^{r_{\max}} \frac{dr}{r^2 \sqrt{2\mu[E - U(r)]}}, \quad (6.27)$$

wobei im zweiten Schritt die Substitution (6.19) benutzt wurde. Die Bahn ist nur dann geschlossen, wenn $\Delta\varphi/2\pi$ eine rationale Zahl ist,

$$\frac{\Delta\varphi}{2\pi} \in \mathbb{Q}. \quad (6.28)$$

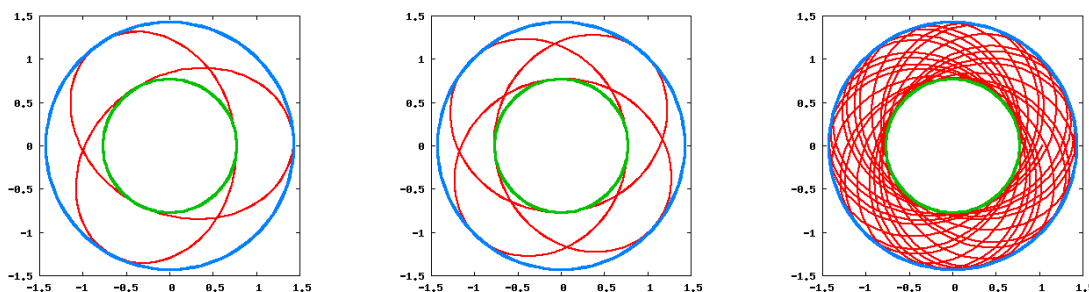


Abbildung 19. Geschlossene Bahnen (rot) mit $\Delta\varphi/\pi = 3/2$ (links) und $\Delta\varphi/\pi = 4/3$ (Mitte). Im rechten Bild ist $\Delta\varphi/2\pi$ irrational, sodaß die Bahn den ringförmigen Bereich zwischen den beiden radialen Umkehrpunkten r_{\min} (grüner Kreis) und r_{\max} (blauer Kreis) mit der Zeit dicht ausfüllt.

Beispiele für geschlossene Bahnen sind die Ellipse mit dem Ursprung in einem der Brennpunkte ($\Delta\varphi = 2\pi$) und die Ellipse mit dem Ursprung im Mittelpunkt ($\Delta\varphi = \pi$), s. Abbildung 18. Wir werden im nächsten Abschnitt sehen, dass der erste Fall beim Kepler-Problem realisiert ist. Weitere Beispiele für Bahnen mit rationalem und irrationalem Verhältnis $\Delta\varphi/2\pi$ finden sich in Abbildung 19.

- (iii) $E > 0$: Die Radialbewegung ist *ungebunden* mit Reflexion an einem Umkehrpunkt r_{\min} . Die zweidimensionale Bewegung ist für $t \rightarrow -\infty$ und $t \rightarrow \infty$ geradlinig, sie kann deshalb durch den *Streuwinkel* χ zwischen Einfall- und Ausfallrichtung charakterisiert werden (s. Abbildung 20).

6.3.2. Quantitative Berechnung der Bahnkurven. Anstatt die vollen Lösungen $r(t)$, $\varphi(t)$ der Bewegungsgleichungen zu suchen, beschränken wir uns hier auf die Bestimmung der Bahnkurven $r(\varphi)$; dazu ist es nicht nötig, die Integrale (6.20,6.21) explizit auszuwerten. Mit der Substitution

$$\dot{r} = \frac{dr}{dt} = \frac{dr}{d\varphi} \dot{\varphi} = \frac{dr}{d\varphi} \frac{l}{\mu r^2}$$

wird der Energiesatz (6.17) zu

$$E = \frac{l^2}{2\mu r^4} \left(\frac{dr}{d\varphi} \right)^2 + \frac{l^2}{2\mu r^2} - \frac{\alpha}{r}. \quad (6.29)$$

Es folgt eine Reihe von Variablentransformationen:

- (i) Da in (6.29) verschiedene inverse Potenzen von r auftreten, führen wir als neue abhängige Variable den inversen Radius

$$u(\varphi) = 1/r(\varphi) \quad (6.30)$$

ein. Wegen

$$\frac{dr}{d\varphi} = -\frac{1}{u^2} \frac{du}{d\varphi} = -r^2 \frac{du}{d\varphi} \Rightarrow \frac{1}{r^4} \left(\frac{dr}{d\varphi} \right)^2 = \left(\frac{du}{d\varphi} \right)^2$$

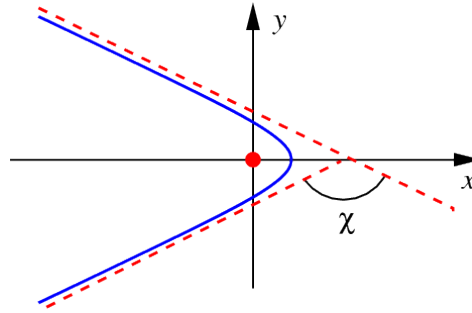


Abbildung 20. Zur Definition des Streuwinkels χ .

ergibt sich so der Ausdruck

$$E = \frac{l^2}{2\mu} \left[\left(\frac{du}{d\varphi} \right)^2 + u^2 \right] - \alpha u, \quad (6.31)$$

der nur noch quadratische und lineare Terme in u und $du/d\varphi$ enthält.

(ii) Nun wird der lineare Term in (6.31) durch quadratische Ergänzung eliminiert: Mit

$$\tilde{u}(\varphi) = u(\varphi) - \mu\alpha/l^2 \quad (6.32)$$

wird aus (6.31)

$$\frac{1}{2}\mu \left(\frac{d\tilde{u}}{d\varphi} \right)^2 + \frac{1}{2}\mu\tilde{u}^2 = \frac{\mu^2 E}{l^2} + \frac{\mu^3 \alpha^2}{2l^4} \equiv \tilde{E}. \quad (6.33)$$

Die Lösung $\tilde{u}(\varphi)$ der Differentialgleichung (6.33) können wir über eine Analogiebetrachtung bestimmen. Dazu interpretieren wir \tilde{u} als Teilchenkoordinate und φ als Zeit. Dann ist (6.33) der Energiesatz eines harmonischen Oszillators mit Masse μ , Federkonstante $k = \mu$ und Gesamtenergie \tilde{E} [vgl. mit (5.39)]. Die Lösung ist eine Schwingung mit Frequenz $\omega = \sqrt{k/\mu} = 1$,

$$\tilde{u}(\varphi) = \tilde{u}_{\max} \cos(\varphi - \varphi_0) \quad (6.34)$$

deren Amplitude \tilde{u}_{\max} sich aus der Gesamtenergie ergibt,

$$\tilde{u}_{\max} = \sqrt{2\tilde{E}/\mu} = \frac{\mu\alpha}{l^2} \sqrt{1 + \frac{2El^2}{\mu\alpha^2}}. \quad (6.35)$$

Damit folgt schliesslich durch Umkehrung der Transformationen (6.30,6.32)

$$r(\varphi) = \frac{1}{u(\varphi)} = \frac{1}{\tilde{u}(\varphi) + \mu\alpha/l^2} = \frac{r_0}{1 + \epsilon \cos(\varphi - \varphi_0)} \quad (6.36)$$

die Gleichung eines *ebenen Kegelschnitts* [s. Abbildung 21] mit der Exzentrizität

$$\epsilon = \sqrt{1 + \frac{2El^2}{\mu\alpha^2}}. \quad (6.37)$$

Der Winkel φ_0 in (6.36) legt die Orientierung der Bahn in der Bahnebene fest; wir setzen im folgenden o.B.d.A. $\varphi_0 = 0$.

Die in Abschnitt 6.3.1 diskutierten Bewegungstypen lassen sich nun anhand der Werte von ϵ quantitativ darstellen.

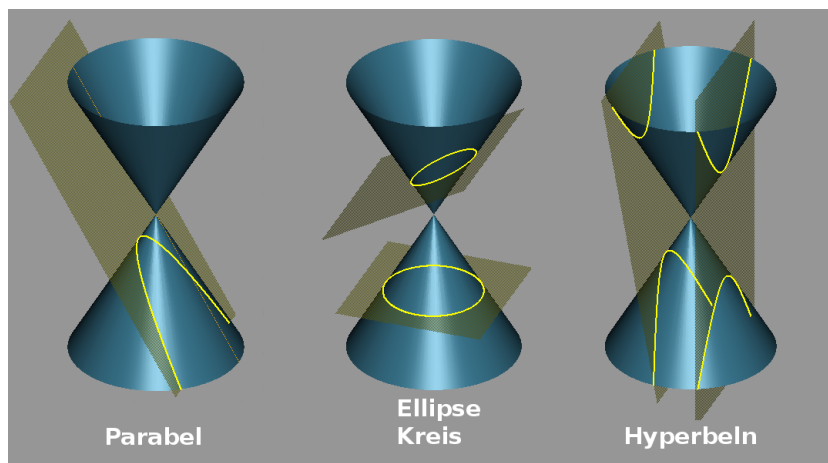


Abbildung 21. Die ebenen Kegelschnitte (aus Wikipedia).

- $E < 0 \Rightarrow \epsilon < 1$: Die Umkehrpunkte r_{\min} und r_{\max} ergeben sich aus (6.36) zu

$$r_{\min} = \frac{r_0}{1 + \epsilon}, \quad r_{\max} = \frac{r_0}{1 - \epsilon}. \quad (6.38)$$

Der Punkt des grössten Abstands zum Ursprung, $r = r_{\max}$, heisst das *Aphel* der Bahn, der Punkt des kleinsten Abstands $r = r_{\min}$ ist das *Perihel* (Abb. 22). Die Bahn ist eine Ellipse [vgl. (6.4)], die für $\epsilon = 0$ zur Kreisbahn entartet. Der Brennpunkt der Ellipse liegt im Ursprung, entsprechend ist die Winkelverschiebung (6.27) $\Delta\varphi = 2\pi$ (s. Abbildung 18). Die grosse Halbachse a der Ellipse ist

$$a = \frac{1}{2}(r_{\min} + r_{\max}) = \frac{r_0}{1 - \epsilon^2} = \frac{\alpha}{2|E|}, \quad (6.39)$$

die kleine Halbachse b ist

$$b = a\sqrt{1 - \epsilon^2} = \frac{l}{\sqrt{2|E|\mu}}. \quad (6.40)$$

- $E > 0 \Rightarrow \epsilon > 1$: In diesem Fall divergiert (6.36) bei einem Winkel φ_∞ mit

$$1 + \epsilon \cos \varphi_\infty = 0 \Rightarrow \varphi_\infty = \arccos(-1/\epsilon). \quad (6.41)$$

Die Bahn ist eine *Hyperbel*, die durch den Streuwinkel $\chi = 2\varphi_\infty - \pi$ charakterisiert wird. Aus (6.41) folgt

$$\sin(\chi/2) = 1/\epsilon, \quad (6.42)$$

und der Perihelabstand r_{\min} ist wieder gegeben durch (6.38).

- $E = 0 \Rightarrow \epsilon = 1$: In diesem Grenzfall entartet die Hyperbel zur Parabel. Der Streuwinkel ist gemäss (6.42) $\chi = \pi$, d.h. Einfall- und Ausfallrichtungen sind antiparallell, und der Perihelabstand ist $r_{\min} = r_0/2$. In kartesischen Koordinaten ist die Bahn (bei Einfall entlang der x -Achse)

$$x = \frac{1}{2}(r_0 - y^2/r_0).$$

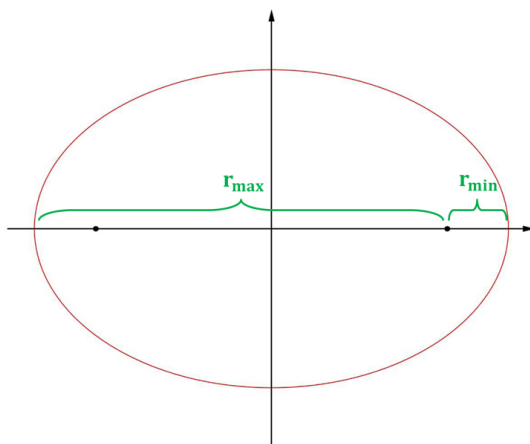


Abbildung 22. Illustration der Begriffe Aphel und Perihel

6.3.3. *Zurück zum Zweikörperproblem.* Wir zeigen schliesslich noch, wie sich die Bewegung der beiden Massenpunkte \vec{r}_1 , \vec{r}_2 aus der Schwerpunktsbewegung $\vec{R}(t)$ und der Bewegung der Relativkoordinate $\vec{r} = \vec{r}_1 - \vec{r}_2$ rekonstruieren lässt. Aus (6.8) und (6.9) folgt

$$\vec{r}_1 = \frac{m_2}{m_1 + m_2} \vec{r} + \vec{R}, \quad \vec{r}_2 = -\frac{m_1}{m_1 + m_2} \vec{r} + \vec{R}.$$

Im Ruhesystem des Schwerpunkts (das ja ein Inertialsystem darstellt) ergibt sich die Bewegung von \vec{r}_1 aus der Relativbewegung \vec{r} einfach durch Skalierung mit dem Faktor $m_2/(m_1 + m_2)$, und die Bewegung von \vec{r}_2 durch Skalierung mit $m_1/(m_1 + m_2)$ und Spiegelung am Schwerpunkt. Insbesondere bewegen sich die Einzelmassen im gebundenen Fall auf Ellipsen mit grossen Halbachsen

$$a_1 = \frac{m_2}{m_1 + m_2} a, \quad a_2 = \frac{m_1}{m_1 + m_2} a$$

um den gemeinsamen Schwerpunkt. Im Fall des Planet-Sonne-Systems gilt wegen $m_2 \gg m_1$ näherungsweise $a_1 \approx a$ aber $a_2 \ll a$. Die Beobachtung der periodischen Bewegung des Zentralgestirns stellt eine wichtige Methode zum Nachweis von extrasolaren Planeten dar.

6.4. Drei und mehr Körper

In Abschnitt 6.2 haben wir gesehen, wie sich das Zweikörperproblem (6.6,6.7), ein System von insgesamt 6 Differentialgleichungen zweiter Ordnung, durch Ausnutzen aller verfügbarer Erhaltungssätze auf eine einzige Differentialgleichung erster Ordnung reduzieren, und damit lösen lässt. Beim Dreikörperproblem erhöht sich die Zahl der Differentialgleichungen auf 9, es stehen aber (im allgemeinen) keine weiteren Erhaltungsgrössen zur Verfügung. Deshalb ist das Problem von $N \geq 3$ gravitativ wechselwirkenden Körpern i.a. analytisch nicht lösbar. Dies hat Henri Poincaré 1892

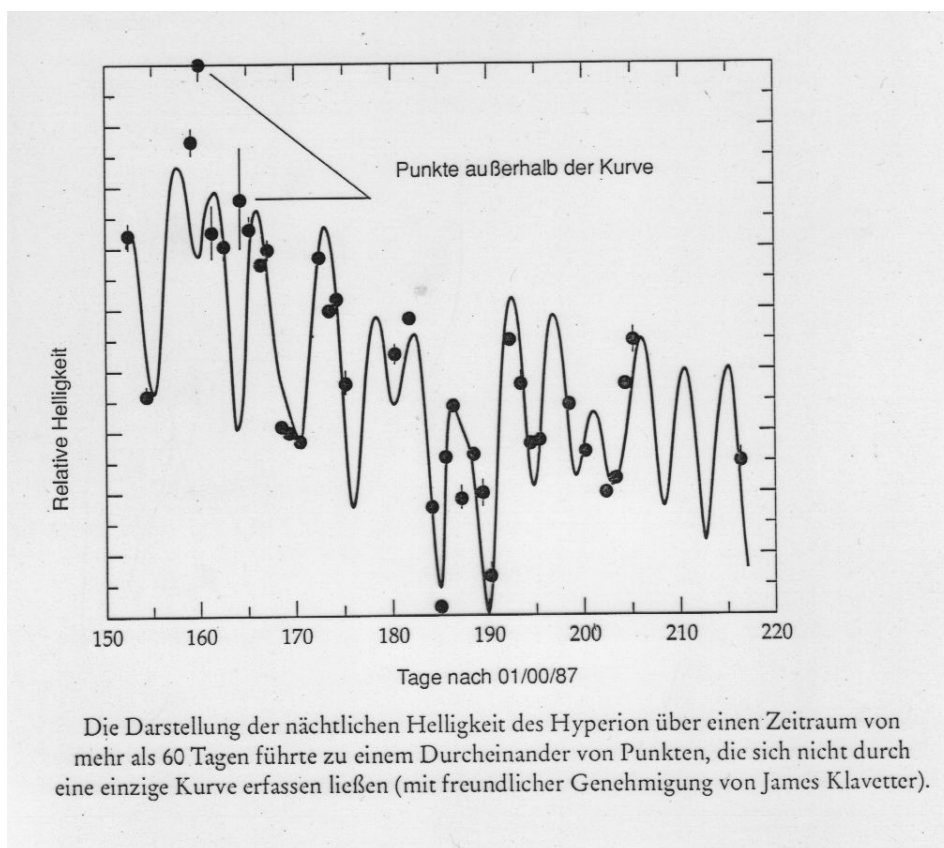


Abbildung 23. Chaotisches Torkeln des Saturn-Mondes Hyperion. Aus *Was Newton nicht wusste: Chaos im Sonnensystem* von I. Peterson.

in seinem Beitrag zu einem vom schwedischen König Oskar II. ausgelobten Wettbewerb bewiesen.

Infolgedessen lassen sich keine allgemeinen Aussagen über die Stabilität und Vorhersagbarkeit von klassischen Vielteilchensystemen wie z.B. dem Sonnensystem machen. Tatsächlich sind die Bewegungen der Himmelskörper im Sonnensystem in vielen Fällen *chaotisch*, d.h. kleine Änderungen in den Anfangsbedingungen wachsen exponentiell an und machen Langzeitvorhersagen unmöglich^{||} (Abb.23 und 24) . Gut untersuchte Beispiele für chaotische Dreikörpersysteme sind die Bewegung des Mondes unter dem Einfluss von Sonne und Erde und die Bewegung der Asteroiden unter dem Einfluss von Sonne und Jupiter. Wir wissen heute aber auch, dass trotz dieser chaotischen Schwankungen die mechanische Stabilität des Sonnensystems über einen Zeitraum von bis zu 10^{12} Jahren, also weit jenseits der Lebensdauer der Sonne, gewährleistet ist[¶].

Die Suche nach lösbaren Spezialfällen des gravitativen N -Körperproblems beschäftigt die Forschung seit über 200 Jahren. Einige Beispiele sind:

^{||} Eine kurze Einführung in die Chaostheorie gibt *Chaos* von Ivar Ekeland, Bd. 28 der DOMINO-Reihe von BLT.

[¶] S. dazu das bereits zitierte Buch von I. Peterson.

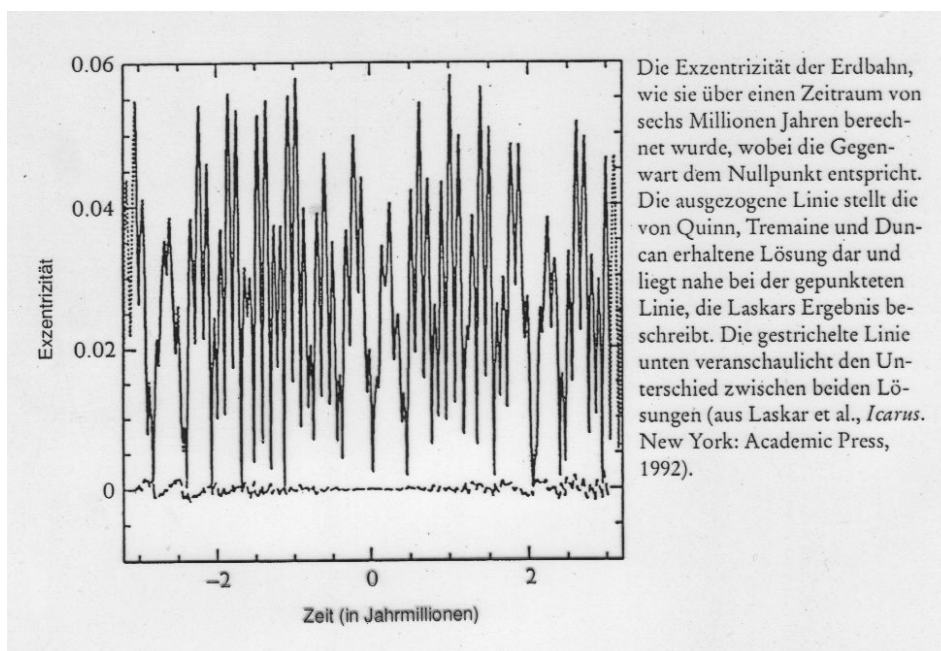


Abbildung 24. Chaotische Schwankungen in der Exzentrizität der Erdbahn (simuliert). Aus *Was Newton nicht wusste: Chaos im Sonnensystem* von I. Peterson.

- *Restringiertes Dreikörperproblem.* Man betrachtet drei Massen m_1, m_2, m_3 unter der Bedingung $m_3 \ll m_1, m_2$. Dann kann der Einfluss von m_3 auf m_1 und m_2 vernachlässigt werden, und die Keplerbewegung der beiden schweren Massen definiert ein zeitabhängiges Potential für die leichte Masse. Die Bewegung der leichten Masse kann sehr kompliziert werden, s. Abbildung 25.
- *Drei Körper an den Ecken eines gleichseitigen Dreiecks.* Dieses von Lagrange untersuchte Beispiel ist für beliebige Massen m_1, m_2, m_3 lösbar. Die Bewegung ist eine Rotation um den Schwerpunkt \vec{R} des Systems (Abb. 26)).
- *Drei Körper auf einer Linie.* Dieses Problem wurde zuerst von L. Euler (1707-1783) betrachtet, es ist ebenfalls für allgemeine Massen m_1, m_2, m_3 lösbar. Der Schwerpunkt liegt in diesem Fall auf der Linie.
- *Choreographische Bahnen.* Hierunter versteht man Lösungen des gravitativen N -Teilchen-Problems mit gleichen Massen, bei denen alle Körper (wie in einem Ballett) nacheinander periodisch die gleiche geschlossene, ebene Kurve durchlaufen. Die oben genannte Lösung von Lagrange ist (im Fall gleicher Massen) das einfachste Beispiel einer choreographischen Bahnen, bei der die drei Teilchen auf einem Kreis umlaufen. Die erste nicht-kreisförmige Bahn, eine Acht, wurde 1993 von C. Moore numerisch entdeckt, und ihre Existenz wurde 2000 von Chenciner und Montgomery

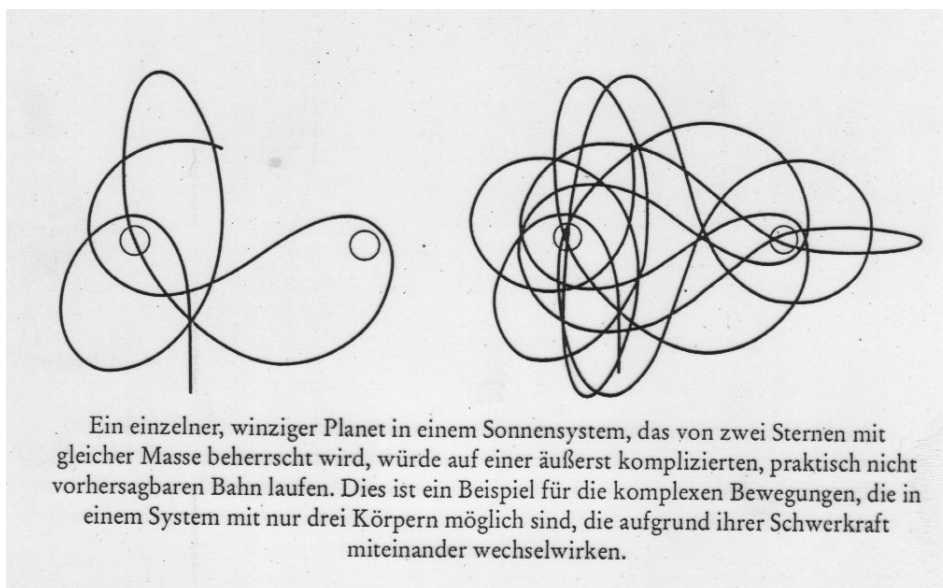


Abbildung 25. Bahn eines leichten Probekörpers im Gravitationsfeld zweier schwerer Massen. Aus *Was Newton nicht wusste: Chaos im Sonnensystem* von I. Peterson.

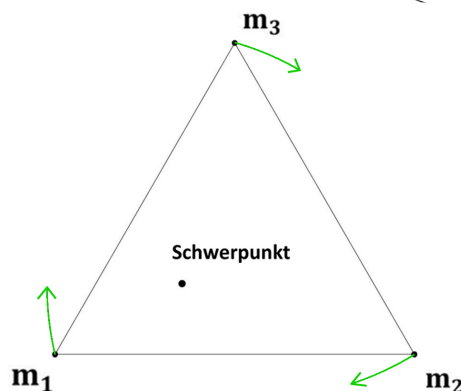


Abbildung 26. Drei Körper an den Ecken eines gleichseitigen Dreiecks rotieren um den gemeinsamen Schwerpunkt.

bewiesen⁺. Seitdem ist eine grosse Vielfalt solcher Bahnen gefunden worden^{*}, einige Beispiele sehen Sie in Abbildung 27.

7. Analytische Mechanik

Gegenstand dieses Kapitels ist eine Weiterentwicklung der Newton'schen Mechanik, die vor allem mit den Namen Lagrange und Hamilton verbunden ist. Wir verfolgen dabei

⁺ C. Moore, *Braids in classical gravity*, Physical Review Letters **70**, 3675 (1993); A. Chenciner und R. Montgomery, *A remarkable periodic solution of the three-body problem in the case of equal masses*, Annals of Mathematics **152**, 881 (2000).

^{*} Animationen choreographischer Bahnen finden Sie unter <http://users.soe.ucsc.edu/~charlie/3body/>.

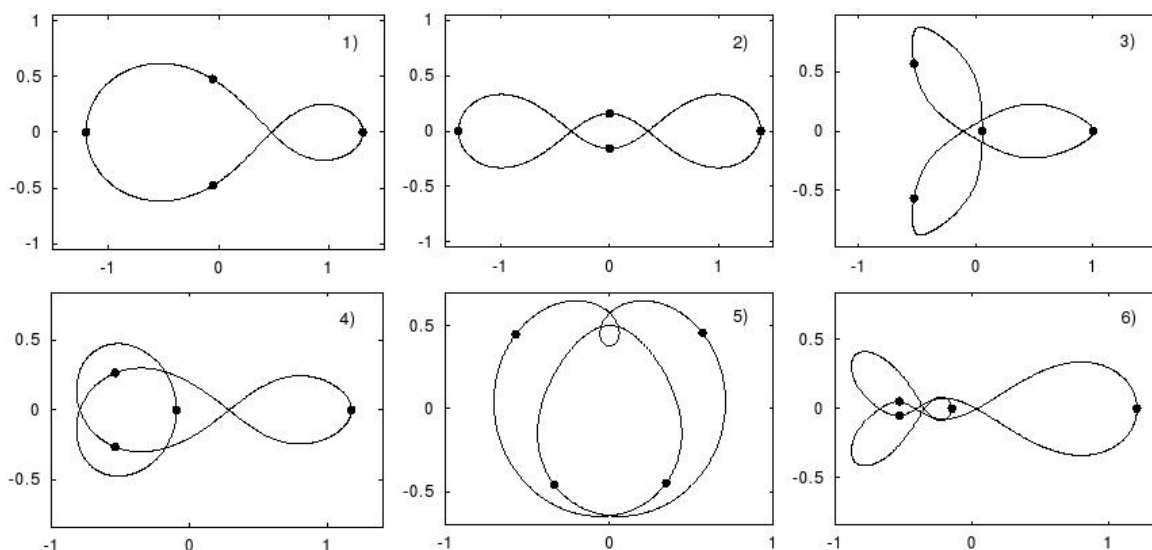


Abbildung 27. Choreographische Bahnen von $N = 4$ gravitativ wechselwirkenden Punktteilchen gleicher Masse. Entnommen aus *Periodic orbits of the planar N -body problem with equal masses and all bodies on the same path* von Carles Simó.

zwei Arten von Zielen:

- Aus *praktischer Sicht* lernen wir, Bewegungsgleichungen in beliebigen (insbesondere nicht-kartesischen) Koordinaten aufzustellen.
- *Konzeptionell* finden wir eine neue (vielleicht auch tiefere) Begründung der Mechanik durch ein *Extremalprinzip*, das Hamilton'sche Prinzip der kleinsten Wirkung.

Am Anfang des traditionellen Aufbaus[†] der analytischen Mechanik steht ein sehr handfestes Problem, nämlich die Beschreibung von Bewegungen unter Zwangsbedingungen.

7.1. Bewegung unter Zwangsbedingungen

In vielen praktisch interessanten Situationen der Mechanik ist die Bewegung von Massenpunkten durch *Zwangsbedingungen* (ZB) eingeschränkt. Wir zählen einige einfache Beispiele auf, auf die wir in der folgenden Diskussion zurückgreifen können:

- Bewegung in einer Ebene*, z.B. auf einer Tischplatte der Höhe h . Die ZB an die Bewegung $\vec{r}(t) = (x(t), y(t), z(t))$ des Massenpunktes lautet $z(t) = h$.
- Ebenes, starres Pendel*. Das Pendel der Länge ℓ ist am Aufhängepunkt $\vec{r}_0 = (0, 0, z_0)$ befestigt und schwingt in der (x, z) -Ebene (Abb. 28). Die ZB lauten $y = 0$ und

$$|\vec{r} - \vec{r}_0|^2 = (z - z_0)^2 + x^2 = \ell^2.$$

[†] Wir folgen hier im wesentlichen der Darstellung von T. Fließbach, *Mechanik* (Spektrum, 2007).

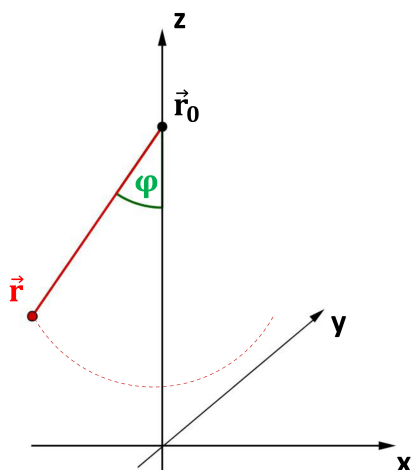


Abbildung 28. Ebenes starres Pendel.

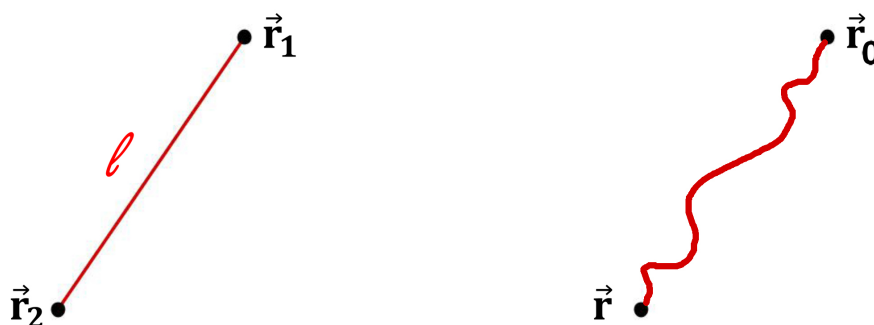


Abbildung 29. Links: Zwei starr verbundene Massenpunkt im Abstand ℓ . Rechts: Zwei durch eine Schnur verbundene Massenpunkt. Das linke Bild illustriert eine holonome Zwangsbedingung, das rechte Bild eine nicht-holonome.

- (iii) *Zwei starr verbundene Massenpunkte.* Die Massenpunkte \vec{r}_1 , \vec{r}_2 sind durch eine starre Verbindung der Länge ℓ verbunden, die ZB lautet (Abb. 29)

$$|\vec{r}_1 - \vec{r}_2|^2 = \ell^2.$$

- (iv) *Massenpunkt an einer Schnur.* Die Schnur habe die Länge ℓ , sei am Punkt \vec{r}_0 befestigt, und als nicht dehnbar angenommen. Dann lautet die ZB (Abb. 29)

$$|\vec{r} - \vec{r}_0|^2 \leq \ell^2.$$

- (v) *Achterbahn.* Die Schienen schränken die Bewegung auf eine (komplizierte) eindimensionale Kurve ein.

In den Beispielen (i)-(iii) [und (v)] lassen sich die ZB durch das Verschwinden von einer oder mehreren geeignet gewählten Funktionen g darstellen:

- (i) $g(\vec{r}) = g(x, y, z) = z - h = 0$.
- (ii) $g_1(\vec{r}) = y = 0, \quad g_2(\vec{r}) = (z - z_0)^2 + x^2 - \ell^2 = 0$.
- (iii) $g(\vec{r}_1, \vec{r}_2) = |\vec{r}_1 - \vec{r}_2|^2 - \ell^2 = 0$.

Dies führt auf folgende

Definition: Eine ZB für ein System von N Massenpunkten, die sich in der Form

$$g(\vec{r}_1, \vec{r}_2, \dots, \vec{r}_N, t) = 0 \quad (7.1)$$

darstellen lässt, heisst *holonom*. Alle anderen ZB (z.B. diejenige aus Beispiel (iv)) sind nicht-holonom. Unter den holonomen ZB unterscheidet man weiter zwischen zeitabhängigen (*rheonomen*) und zeitunabhängigen (*skleronomen*) ZB.

Wir behandeln im folgenden nur holonome ZB und betrachten meist den allgemeinen zeitabhängigen Fall (7.1).

Die Gegenwart von ZB hat zwei wichtige Konsequenzen:

- a.) ZB reduzieren die *Zahl der Freiheitsgrade* f eines Systems. Ein freier Massenpunkt hat 3 Freiheitsgrade, und jede holonome ZB reduziert diese Zahl um 1. Für ein N -Teilchensystem mit R ZB ist die Zahl der Freiheitsgrade somit

$$f = 3N - R.$$

Wir illustrieren diese Beziehung anhand unserer Beispiel:

- (i) $f = 3 - 1 = 2$, die Freiheitsgrade sind x und y .
 - (ii) $f = 3 - 2 = 1$, der verbleibende Freiheitsgrad ist der Auslenkungswinkel des Pendels.
 - (iii) $f = 6 - 1 = 5$ Freiheitsgrade, z.B. 3 Schwerpunktkoordinaten und zwei Winkel zur Beschreibung der Orientierung der Verbindungsachse zwischen den beiden Körpern.
- b.) In Gegenwart von ZB wirken zusätzlich zu den physikalischen Wechselwirkungen *Zwangskräfte* \vec{Z} , die für die Einhaltung der ZB sorgen[‡]. Die Bewegungsgleichung für einen Massenpunkt lautet deshalb statt (1.1)

$$m\ddot{\vec{r}} = \vec{F} + \vec{Z}. \quad (7.2)$$

Die Schwierigkeit ist dabei, dass die Zwangskraft \vec{Z} von der Bewegung selber abhängt, wie man sich etwa am Beispiel der Achterbahn leicht klarmachen kann.

Es gibt zwei Strategien zur Behandlung von Problemen mit ZB:

- I. Explizite Berechnung der Zwangskräfte. Dies führt auf die Lagrange-Gleichungen 1. Art (Abschnitt 7.2).
- II. Eliminierung der ZB durch Transformation auf verallgemeinerte Koordinaten (q_1, \dots, q_f) , welche dann die Lagrange-Gleichungen 2. Art erfüllen (Abschnitt 7.3).

[‡] Die Trennung von Zwangskräften und physikalischen Wechselwirkungen ist eine Idealisierung, denn natürlich beruhen auch die Zwangskräfte auf physikalischen Kräften. Sie werden hier gesondert behandelt, weil sie (im Vergleich zu anderen Kräften) so stark sind, dass sie bei der Bewegung dynamisch nicht in Erscheinung treten (der Gegenstand auf dem Tisch deformiert die Tischoberfläche nicht).

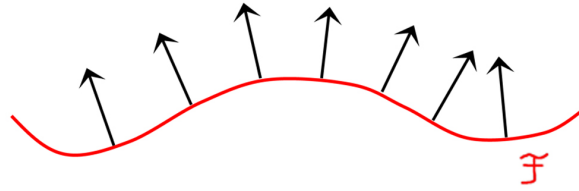


Abbildung 30. Der Gradient ∇g (schwarze Pfeile) steht überall senkrecht auf der durch die ZB $g(\vec{r}, t) = 0$ definierten Fläche \mathcal{F} (rot).

7.2. Lagrange-Gleichungen erster Art

Wir betrachten einen Massenpunkt mit einer ZB $g(\vec{r}, t) = 0$. Um einen plausiblen Ansatz für die Zwangskraft in (7.2) zu finden, bemerken wir zunächst, dass die ZB eine (i.a. zeitabhängige) Fläche

$$\mathcal{F} = \{\vec{r} \in \mathbb{R}^3 : g(\vec{r}, t) = 0\}$$

definiert, auf der die Bewegung ablaufen soll. Die Zwangskraft darf die Bewegung innerhalb von \mathcal{F} nicht beeinflussen, sie muss deshalb überall senkrecht auf \mathcal{F} stehen. Wir behaupten, dass der Ansatz

$$\vec{Z}(\vec{r}, t) = \lambda(t) \nabla g(\vec{r}, t) \quad (7.3)$$

genau diese Eigenschaft hat. Zum Beweis betrachten wir einen Punkt $\vec{r} \in \mathcal{F}$ und führen eine kleine Verschiebung $\vec{r} \rightarrow \vec{r}' = \vec{r} + \Delta\vec{r}$ durch. Liegt der verschobene Punkt nach wie vor in \mathcal{F} ? Eine Taylorentwicklung erster Ordnung von g um \vec{r} ergibt

$$g(\vec{r}', t) = g(\vec{r}, t) + \Delta\vec{r} \cdot \nabla g = \Delta\vec{r} \cdot \nabla g,$$

weil $g(\vec{r}, t) = 0$. Der verschobene Punkt \vec{r}' liegt genau dann in \mathcal{F} , wenn $g(\vec{r}', t) = 0$, d.h. wenn der Verschiebungsvektor $\Delta\vec{r}$ senkrecht zu ∇g steht. Damit ist gezeigt, dass die Zwangskraft (7.3) keine Komponente parallel zu \mathcal{F} besitzt.

Die Bewegungsgleichung für den Massenpunkten lautet dann gemäss (7.2) und (7.3)

$$m\ddot{\vec{r}} = \vec{F} + \lambda(t) \nabla g, \quad (7.4)$$

bei zwei ZB $g_1(\vec{r}, t) = g_2(\vec{r}, t) = 0$ erhält man analog

$$m\ddot{\vec{r}} = \vec{F} + \lambda_1(t) \nabla g_1 + \lambda_2(t) \nabla g_2. \quad (7.5)$$

Im allgemeinen Fall betrachten wir

- N Massenpunkte mit insgesamt $3N$ Ortskoordinaten, die wir zur Vereinfachung in einen $3N$ -dimensionalen Vektor zusammenfassen:

$$(\vec{r}_1, \vec{r}_2, \dots, \vec{r}_N) = (x_1, x_2, x_3, \dots, x_{3N-2}, x_{3N-1}, x_{3N}), \quad (7.6)$$

d.h. $\vec{r}_1 = (x_1, x_2, x_3)$, $\vec{r}_2 = (x_4, x_5, x_6)$ usw.,

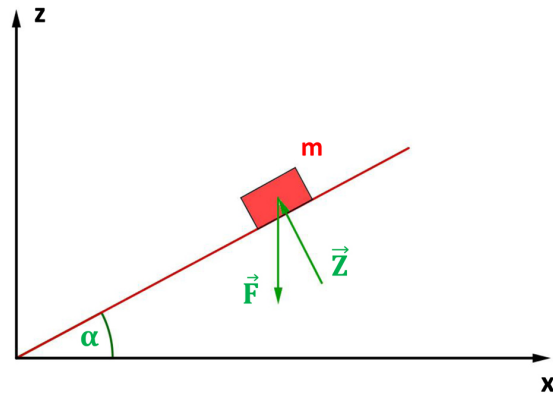


Abbildung 31. Bewegung auf der schiefen Ebene. Auf den Körper wirkt neben der äusseren Kraft \vec{F} die Zwangskraft \vec{Z} .

- und R holonome Zwangsbedingungen

$$g_\alpha(x_1, x_2, \dots, x_{3N}, t) = 0, \quad \alpha = 1, 2, \dots, R. \quad (7.7)$$

Wie in (7.4) und (7.5) wird jeder Zwangsbedingung gemäss (7.3) ein Lagrange-Parameter $\lambda_\alpha(t)$ zugeordnet, und wir erhalten§ die *Lagrange-Gleichungen 1. Art*

$$m_n \ddot{x}_n = F_n + \sum_{\alpha=1}^R \lambda_\alpha(t) \frac{\partial g_\alpha}{\partial x_n}, \quad n = 1, 2, \dots, 3N. \quad (7.8)$$

Zusammen ergeben (7.7) und (7.8) $3N + R$ Gleichungen für die insgesamt $3N + R$ unbekannt Funktionen der Zeit $(x_1, x_2, \dots, x_{3N}, \lambda_1, \dots, \lambda_R)$, das Problem ist also i.a. lösbar. Wir demonstrieren das Lösungsverfahren anhand eines sehr einfachen Beispiels, der *Bewegung eines Massenpunkts auf einer schiefen Ebene* (Abb. 31).

Die Bewegung soll in der (x, z) -Ebene ablaufen, und der Neigungswinkel der Ebene sei α . Die Zwangsbedingungen sind zeitunabhängig und lauten

$$g_1(\vec{r}) = x \sin \alpha - z \cos \alpha = 0, \quad g_2(\vec{r}) = y = 0. \quad (7.9)$$

Als äussere Kraft wirkt die Schwerkraft. Die Bewegungsgleichung lautet somit

$$m\vec{\ddot{r}} = -mg\vec{e}_z + \lambda_1 \nabla g_1 + \lambda_2 \nabla g_2 = -mg\vec{e}_z + \lambda_1 \sin \alpha \vec{e}_x - \lambda_1 \cos \alpha \vec{e}_z + \lambda_2 \vec{e}_y,$$

bzw. in Komponenten

$$m\ddot{x} = \lambda_1 \sin \alpha, \quad m\ddot{y} = \lambda_2, \quad m\ddot{z} = -mg - \lambda_1 \cos \alpha. \quad (7.10)$$

Um λ_1 und λ_2 zu bestimmen, leiten wir die Zwangsbedingungen (7.9) zweimal nach der Zeit ab und setzen dann die Beschleunigungen aus den Bewegungsgleichungen (7.10)

§ Wegen der Notation (7.6) sind die Massen m_n in (7.8) nicht unabhängig wählbar, es gilt $m_1 = m_2 = m_3$, $m_4 = m_5 = m_6$ usw.

ein. Dieses Verfahren führt im allgemeinen auf ein lineares Gleichungssystem für die λ_α , das hier besonders einfach ist: Mit

$$\frac{d^2}{dt^2}g_1(\vec{r}(t)) = \ddot{x} \sin \alpha - \ddot{z} \cos \alpha = 0$$

und

$$\frac{d^2}{dt^2}g_2(\vec{r}(t)) = \ddot{y} = 0$$

folgt nach Einsetzen von (7.10)

$$\lambda_1 \sin^2 \alpha + mg \cos \alpha + \lambda_1 \cos^2 \alpha = 0 \quad \Rightarrow \quad \lambda_1 = -mg \cos \alpha \quad (7.11)$$

und

$$\lambda_2 = 0. \quad (7.12)$$

Die letzte Gleichung besagt einfach, dass (bei entsprechend gewählten Anfangsbedingungen) keine Zwangskräfte nötig sind, um die Bewegung in der (x, z) -Ebene zu halten. Die Zwangskraft ist somit

$$\vec{Z} = \lambda_1 \nabla g_1 = -mg \cos \alpha (\sin \alpha \vec{e}_x - \cos \alpha \vec{e}_z). \quad (7.13)$$

In den runden Klammern steht gerade der Einheitsvektor senkrecht zur schiefen Ebene, d.h. die Zwangskraft kompensiert die Komponente der Schwerkraft, die senkrecht zur Ebene steht. In die Bewegungsgleichungen geht nur die Schwerkraftkomponente parallel zur Ebene ein, und sie lauten

$$m\ddot{x} = -mg \cos \alpha \sin \alpha, \quad m\ddot{z} = -mg \sin^2 \alpha. \quad (7.14)$$

Im vorliegenden Fall hätte man diese Gleichungen auch aufgrund von ganz elementaren Überlegungen hinschreiben können. Bei komplizierteren Zwangsbedingungen ist das systematische Verfahren von Lagrange aber sehr hilfreich.

7.3. Lagrange-Gleichungen zweiter Art

Falls man nicht an der expliziten Form der Zwangskräfte interessiert ist, sind die Lagrange-Gleichungen erster Art ziemlich unökonomisch, denn man berechnet für ein System von $f = 3N - R$ Freiheitsgraden $3N + R$ zeitabhängige Funktionen. In diesem Abschnitt zeigen wir, wie die ZB eliminiert werden können und sich das Problem auf f Bewegungsgleichungen für die f Freiheitsgrade reduzieren lässt.

7.3.1. Herleitung. Die Grundidee ist, verallgemeinerte Koordinaten q_1, \dots, q_f so zu bestimmen, dass die ZB automatisch erfüllt sind, das heisst: Die ursprünglichen Koordinaten x_1, \dots, x_{3N} sind als Funktionen

$$x_n = x_n(q_1, \dots, q_f), \quad n = 1, \dots, 3N \quad (7.15)$$

so zu wählen, dass für alle q_1, \dots, q_f und alle $\alpha = 1, \dots, R$ gilt||

$$g_\alpha(x_1(q_1, \dots, q_f), x_2(q_1, \dots, q_f), \dots, x_{3N}(q_1, \dots, q_f)) = 0. \quad (7.16)$$

|| In diesem Abschnitt beschränken wir uns auf zeitunabhängige ZB. Dies vereinfacht die Schreibarbeit, die Ergebnisse gelten aber auch im allgemeinen Fall.

Beispiel: Für das starre ebene Pendel (Beispiel (ii) aus Abschnitt 7.1) (Abb. 28) ist die natürliche verallgemeinerte Koordinate der Auslenkungswinkel φ , der mit den kartesischen Koordinaten (x, y, z) des Massenpunkts durch

$$x = \ell \sin \varphi, y = 0, z = z_0 - \ell \cos \varphi \quad (7.17)$$

verknüpft ist.

Durch Ableitung der ZB (7.16) nach einer der verallgemeinerten Koordinaten folgt ¶

$$\frac{dg_\alpha}{dq_k} = \sum_{n=1}^{3N} \frac{\partial g_\alpha}{\partial x_n} \frac{\partial x_n}{\partial q_k} = 0. \quad (7.18)$$

Um die n Bewegungsgleichungen (7.8) für die x_n in f Bewegungsgleichungen für die q_k umzuwandeln, multiplizieren wir nun (7.8) mit $\partial x_n / \partial q_k$ und summieren über n . Dies ergibt

$$\sum_{n=1}^{3N} m_n \ddot{x}_n \frac{\partial x_n}{\partial q_k} = \sum_{n=1}^{3N} F_n \frac{\partial x_n}{\partial q_k} + \sum_{n=1}^{3N} \sum_{\alpha=1}^R \lambda_\alpha \frac{\partial x_n}{\partial q_k} \frac{\partial g_\alpha}{\partial x_n}.$$

Durch Vertauschen der Summationsreihenfolge im letzten Term sehen wir, dass dieser wegen (7.18) verschwindet. Damit sind die ZB in der Tat eliminiert, und wir erhalten die f Bewegungsgleichungen

$$\sum_{n=1}^{3N} m_n \ddot{x}_n \frac{\partial x_n}{\partial q_k} = \sum_{n=1}^{3N} F_n \frac{\partial x_n}{\partial q_k}, \quad k = 1, \dots, f, \quad (7.19)$$

die allerdings die Koordinatenfunktionen (7.15) noch explizit enthalten.

Zur Vereinfachung von (7.19) betrachten wir zunächst die rechte Seite. Wir nehmen an, dass die Kräfte F_n konservativ sind, d.h. es existiert ein Potential $V(x_1, \dots, x_{3N})$ sodass

$$F_n = -\frac{\partial V}{\partial x_n}.$$

Wir drücken nun die potentielle Energie gemäss (7.15) durch die verallgemeinerten Koordinaten aus. Dabei entsteht eigentlich eine neue Funktion (die nun statt von $3N$ von f Variablen abhängt), die wir aber der Einfachheit halber ebenfalls mit V bezeichnen:

$$V(q_1, \dots, q_f) \equiv V(x_1(q_1, \dots, q_f), \dots, x_{3N}(q_1, \dots, q_f)). \quad (7.20)$$

Ableitung nach q_k ergibt

$$\frac{\partial V}{\partial q_k} = \sum_{n=1}^{3N} \frac{\partial V}{\partial x_n} \frac{\partial x_n}{\partial q_k} = -\sum_{n=1}^{3N} F_n \frac{\partial x_n}{\partial q_k}, \quad (7.21)$$

d.h. die rechte Seite von (7.19) ist einfach $-\partial V / \partial q_k$.

Analog können wir die linke Seite von (7.19) durch die kinetische Energie T ausdrücken. Aus der Newton'schen Mechanik kennen wir den Ausdruck [s. (5.25)]

$$T = \sum_{n=1}^{3N} \frac{1}{2} m_n \dot{x}_n^2, \quad (7.22)$$

¶ Hier und im folgenden benutzen wir immer wieder die Kettenregel für Funktionen mehrerer Variablen.

den wir nun auf die q_k und \dot{q}_k umschreiben wollen. Tatsächlich genügt es, die partiellen Ableitungen von T nach den verallgemeinerten Koordinaten q_k und Geschwindigkeiten \dot{q}_k zu bestimmen. Die totale Ableitung von (7.15) nach der Zeit lautet⁺

$$\dot{x}_n = \frac{d}{dt}x_n(q_1(t), \dots, q_f(t)) = \sum_{k=1}^f \frac{\partial x_n}{\partial q_k} \frac{dq_k}{dt} = \sum_{k=1}^f \frac{\partial x_n}{\partial q_k} \dot{q}_k. \quad (7.23)$$

Da die $\partial x_n / \partial q_k$ nur von den q_1, \dots, q_f , nicht aber von den $\dot{q}_1, \dots, \dot{q}_f$ abhängen, ist die Abhängigkeit der \dot{x}_n von den verallgemeinerten Geschwindigkeiten linear, und es gilt die wichtige Beziehung

$$\frac{\partial \dot{x}_n}{\partial \dot{q}_k} = \frac{\partial x_n}{\partial q_k}. \quad (7.24)$$

Aus (7.22) folgt

$$\frac{\partial T}{\partial q_k} = \frac{\partial}{\partial q_k} \sum_{n=1}^{3N} \frac{1}{2} m_n \dot{x}_n^2 = \sum_{n=1}^{3N} m_n \dot{x}_n \frac{\partial \dot{x}_n}{\partial q_k}, \quad (7.25)$$

und

$$\frac{\partial T}{\partial \dot{q}_k} = \frac{\partial}{\partial \dot{q}_k} \sum_{n=1}^{3N} \frac{1}{2} m_n \dot{x}_n^2 = \sum_{n=1}^{3N} m_n \dot{x}_n \frac{\partial \dot{x}_n}{\partial \dot{q}_k} = \sum_{n=1}^{3N} m_n \dot{x}_n \frac{\partial x_n}{\partial q_k}, \quad (7.26)$$

wobei im letzten Schritt (7.24) benutzt wurde. Um die Beschleunigungen \ddot{x}_n ins Spiel zu bringen, leiten wir (7.26) noch einmal nach der Zeit ab:

$$\frac{d}{dt} \left(\frac{\partial T}{\partial \dot{q}_k} \right) = \sum_{n=1}^{3N} m_n \ddot{x}_n \frac{\partial x_n}{\partial q_k} + \sum_{n=1}^{3N} m_n \dot{x}_n \frac{\partial \dot{x}_n}{\partial q_k}. \quad (7.27)$$

Im letzten Term wurde die Vertauschbarkeit der totalen Ableitung von x_n nach t mit der partiellen Ableitung nach q_k ausgenutzt, von der man sich leicht überzeugen kann.

Mit den Beziehungen (7.21), (7.25) und (7.27) können wir die Bewegungsgleichungen (7.19) auf die Form

$$\frac{d}{dt} \left(\frac{\partial T}{\partial \dot{q}_k} \right) - \frac{\partial T}{\partial q_k} = - \frac{\partial V}{\partial q_k} \Leftrightarrow \frac{d}{dt} \left(\frac{\partial T}{\partial \dot{q}_k} \right) = \frac{\partial (T - V)}{\partial q_k} \quad (7.28)$$

bringen. Dies motiviert die Definition der *Lagrange-Funktion*

$$L(q_1, \dots, q_f, \dot{q}_1, \dots, \dot{q}_f) = T(q_1, \dots, q_f, \dot{q}_1, \dots, \dot{q}_f) - V(q_1, \dots, q_f) \quad (7.29)$$

als Differenz von kinetischer und potentieller Energie. Da die potentielle Energie nicht von den verallgemeinerten Geschwindigkeiten abhängt, ist (7.28) äquivalent zu

$$\frac{d}{dt} \left(\frac{\partial L}{\partial \dot{q}_k} \right) = \frac{\partial L}{\partial q_k}, \quad k = 1, \dots, f. \quad (7.30)$$

Das sind die gesuchten *Lagrange-Gleichungen zweiter Art*.

⁺ Da die ZB als zeitunabhängig vorausgesetzt wurden, sind auch die Transformationen (7.15) zeitunabhängig, und die Zeitabhängigkeit der x_n wird nur durch die q_k vermittelt. Im allgemeinen Fall kommen in (7.23) weitere Terme hinzu, die aber an der Form des Ergebnisses (7.30) nichts ändern.

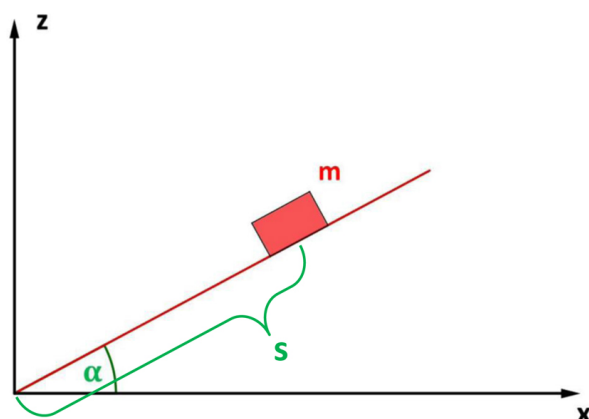


Abbildung 32. Bewegung auf der schiefen Ebene, Definition der verallgemeinerten Koordinate s .

7.3.2. Beispiele

- a.) *N Massenpunkte ohne ZB.* Wir überzeugen uns zunächst davon, dass die Lagrange-Gleichungen (7.30) die Newton'schen Bewegungsgleichungen als Spezialfall enthalten. In diesem Fall sind die verallgemeinerten Koordinaten gleich den kartesischen Koordinaten, $q_k = x_k$, $k = 1, \dots, 3N$. Mit (7.22) und $L = T - V$ folgt

$$\frac{\partial L}{\partial \dot{q}_k} = \frac{\partial T}{\partial \dot{q}_k} = m_n \dot{q}_k = p_k, \quad (7.31)$$

d.h. $\partial L / \partial \dot{q}_k$ ist gerade die k -te Impulskomponente. Da ausserdem $\partial L / \partial q_k = -\partial V / \partial q_k = F_k$, reduziert sich (7.30) in der Tat auf das Newton'sche Bewegungsgesetz $\dot{p}_k = F_k$.

- b.) *Schiefe Ebene.* Diese Beispiel wurde in Abschnitt (7.2) mit Lagrange-Gleichungen erster Art behandelt. Die natürliche verallgemeinerte Koordinate ist die Wegstrecke s , gemessen entlang der schiefen Ebene (Abb. 32). Kinetische und potentielle Energie des Massenpunktes sind

$$T = \frac{1}{2} m \dot{s}^2, \quad V = mgs \sin \alpha,$$

und die Lagrange-Gleichung (7.30) lautet

$$m\ddot{s} = -mg \sin \alpha,$$

wie man auch aus (7.14) ablesen kann; die Behandlung im Rahmen der Lagrange-Gleichungen zweiter Art ist offensichtlich viel einfacher.

- c.) *Starres ebenes Pendel.* Die verallgemeinerte Koordinate ist der Auslenkungswinkel φ [s. (7.17) und Abb. 28]. Das Pendel bewegt sich auf einer Kreisbahn, der Betrag

der Geschwindigkeit ist deshalb $|\vec{v}| = \ell\dot{\varphi}$ und

$$T = \frac{1}{2}m\ell^2\dot{\varphi}^2.$$

Die potentielle Energie ist

$$V = mgz = mg(z_0 - \ell \cos \varphi),$$

und aus (7.30) folgt die Bewegungsgleichung

$$m\ell^2\ddot{\varphi} = -mg\ell \sin \varphi \Leftrightarrow \ddot{\varphi} = -\frac{g}{\ell} \sin \varphi. \quad (7.32)$$

Für kleine Auslenkungen ist $\sin \varphi \approx \varphi$ und (7.32) wird die Gleichung eines harmonischen Oszillators mit Frequenz $\omega = \sqrt{g/\ell}$.

- d.) *Kepler-Problem.* In den bisherigen Beispielen gab es nur eine verallgemeinerte Koordinate. Wir betrachten jetzt das Kepler-Problem aus Kapitel 6. Wir nehmen an, dass die Reduktion auf eine ebene Bewegung bereits geleistet ist (vgl. Abschnitt 6.2.2), sodass wir das System durch ebene Polarkoordinaten $r(t), \varphi(t)$ beschreiben können. Die kinetische Energie ist gemäss (6.17)

$$T = \frac{1}{2}\mu(\dot{r}^2 + r^2\dot{\varphi}^2),$$

und die potentielle Energie ist $V(r) = -\alpha/r$. Damit hängt die Lagrange-Funktion

$$L(r, \dot{r}, \dot{\varphi}) = \frac{1}{2}\mu(\dot{r}^2 + r^2\dot{\varphi}^2) + \frac{\alpha}{r} \quad (7.33)$$

von r, \dot{r} und $\dot{\varphi}$ ab. Die Lagrange-Gleichung für die Azimuthalbewegung lautet

$$\frac{d}{dt} \frac{\partial L}{\partial \dot{\varphi}} = \frac{d}{dt} \mu r^2 \dot{\varphi} = \frac{\partial L}{\partial \varphi} = 0, \quad (7.34)$$

d.h. die Grösse $\mu r^2 \dot{\varphi}$ ist zeitlich konstant, weil (7.33) nicht von φ abhängt. Wir wissen bereits aus Abschnitt 6.2.2, dass $\mu r^2 \dot{\varphi} = l$ gerade der Betrag des Drehimpulses ist, was auf die Azimuthalgleichung (6.16) führte. Mit deren Hilfe nimmt die Lagrange-Gleichung für die Radialbewegung

$$\frac{d}{dt} \frac{\partial L}{\partial \dot{r}} = \mu \ddot{r} = \frac{\partial L}{\partial r} = \mu r \dot{\varphi}^2 - \frac{\alpha}{r^2} = \frac{l^2}{\mu r^3} - \frac{\alpha}{r^2} \quad (7.35)$$

die Form einer eindimensionalen Bewegungsgleichung $\mu \ddot{r} = -\partial U/\partial r$ im effektiven Potential (6.18) an.

Der Azimuthalwinkel φ ist ein Beispiel für eine *zyklische* Variable. Dieser Begriff wird im nächsten Abschnitt näher beleuchtet.

7.3.3. Verallgemeinerte Impulse und Erhaltungsgrössen. Wir beginnen mit zwei Definitionen:

- (i) Der einer verallgemeinerten Koordinate q_n zugeordnete *verallgemeinerte Impuls* p_n ist definiert durch*

$$p_n \equiv \frac{\partial L}{\partial \dot{q}_n}. \quad (7.36)$$

- (ii) Eine verallgemeinerte Koordinate q_n heisst *zyklisch*, wenn die Lagrange-Funktion von q_n nicht abhängt, d.h. wenn $\partial L / \partial q_n = 0$.

Daraus ergibt sich sofort die

Folgerung: Der einer zyklischen Variablen q_n zugeordnete verallgemeinerte Impuls p_n ist erhalten:

$$\frac{d}{dt} p_n = \frac{d}{dt} \frac{\partial L}{\partial \dot{q}_n} = \frac{\partial L}{\partial q_n} = 0.$$

Wir illustrieren diese Aussage anhand von einigen Beispielen.

- a.) *Freies Teilchen* ($N = 1$). Die Lagrange-Funktion ist

$$L = T = \frac{1}{2} m |\dot{\mathbf{r}}|^2 = \frac{1}{2} m (\dot{x}^2 + \dot{y}^2 + \dot{z}^2).$$

Alle drei Komponenten x, y, z des Ortsvektors sind zyklisch, und demzufolge sind alle drei Impulskomponenten p_x, p_y, p_z erhalten.

- b.) *Potential unabhängig von z* . Jetzt bewege sich das Teilchen in einem Potential, das nur von x und y abhängt:

$$L = T - V = \frac{1}{2} m (\dot{x}^2 + \dot{y}^2 + \dot{z}^2) - V(x, y).$$

Dann ist z zyklisch, und wir schliessen, dass der Impuls p_z in z -Richtung erhalten ist.

- c.) *Ebene Bewegung mit allgemeiner Zentralkraft*. Die verallgemeinerten Koordinaten sind $r(t)$ und $\varphi(t)$, die Lagrange-Funktion lautet [vgl.(7.33)]

$$L = \frac{1}{2} \mu (\dot{r}^2 + r^2 \dot{\varphi}^2) - V(r)$$

mit einem allgemeinen Zentralpotential V . Der Azimuthalwinkel φ ist zyklisch, der zugeordnete Impuls

$$p_\varphi = \frac{\partial L}{\partial \dot{\varphi}} = \mu r^2 \dot{\varphi}$$

ist erhalten. Das ist gerade die Drehimpulskomponente senkrecht zur Bahnebene. Durch Betrachtung der vollen dreidimensionalen Bewegung in Kugelkoordinaten kann man so auch die Erhaltung der anderen beiden Komponenten des Drehimpulses beweisen.

* Diese Definition ist offensichtlich motiviert durch den Fall ohne ZB, s. (7.31).

In diesen Beispielen deutet sich der Zusammenhang zwischen Erhaltungsgrößen und der Invarianz der Bewegungsgesetze unter bestimmten Transformationen an, der durch das Noether-Theorem formalisiert wird (Abschnitt 5.5). In der Tat lässt sich dieser Zusammenhang im Rahmen des Lagrange-Formalismus gut verstehen. Wir leiten hier als Beispiel die *Impulserhaltung* aus der *Translationsinvarianz* ab.

Wir betrachten N Massenpunkte in kartesischen Koordinaten. Translationsinvarianz bedeutet, dass sich die Lagrange-Funktion des Systems bei einer Verschiebung aller Massenpunkte um den gleichen Vektor \vec{r}_0 nicht ändert, d.h. für jedes ϵ soll gelten

$$L(\vec{r}_1, \dots, \vec{r}_N, \dot{\vec{r}}_1, \dots, \dot{\vec{r}}_N) = L(\vec{r}_1 + \epsilon \vec{r}_0, \dots, \vec{r}_N + \epsilon \vec{r}_0, \dot{\vec{r}}_1, \dots, \dot{\vec{r}}_N).$$

Die Ableitung der rechten Seite nach ϵ muss 0 ergeben:

$$\begin{aligned} \frac{d}{d\epsilon} L(\vec{r}_1 + \epsilon \vec{r}_0, \dots, \vec{r}_N + \epsilon \vec{r}_0, \dot{\vec{r}}_1, \dots, \dot{\vec{r}}_N) \Big|_{\epsilon=0} &= \sum_{i=1}^N \vec{r}_0 \cdot \nabla_{\vec{r}_i} L = \\ &= \sum_{i=1}^N \vec{r}_0 \cdot \frac{d}{dt} \nabla_{\dot{\vec{r}}_i} L = \frac{d}{dt} \left(\vec{r}_0 \cdot \sum_{i=1}^N \vec{p}_i \right) = \frac{d}{dt} (\vec{r}_0 \cdot \vec{P}) = 0. \end{aligned}$$

Im ersten Schritt wurde die Kettenregel benutzt, im zweiten die Lagrange-Gleichungen zweiter Art. Wir sehen, dass Translationsinvarianz in Richtung von \vec{r}_0 die Erhaltung der entsprechenden Komponente des Gesamtimpulses impliziert; gilt Translationsinvarianz in allen Richtungen, so ist \vec{P} insgesamt erhalten.

7.4. Variationsprinzipien

In diesem Zusammenhang darf gewiss an Leibniz' Theodizee erinnert werden, in welcher der Grundsatz aufgestellt wird, dass die wirkliche Welt unter allen Welten, die hätten geschaffen werden können, diejenige sei, die neben dem unvermeidlichen Übel das Maximum des Guten enthält. Dieser Grundsatz ist nichts anderes als ein Variationsprinzip, und zwar schon ganz von der Form des nachmaligen Prinzips der kleinsten Wirkung.

Max Planck (1914)

7.4.1. Variationsprobleme. Wir beginnen mit einer Erinnerung an die elementare Kurvendiskussion bei Funktionen $f(x)$ von einer Variablen. Die notwendige Bedingung für das Vorliegen eines Extremums einer solchen Funktion an einem Punkt x^* ist bekanntlich

$$\frac{df}{dx}(x^*) = f'(x^*) = 0.$$

Äquivalent dazu ist die Aussage, dass die *Variation* $\delta f = f(x^* + \epsilon) - f(x^*)$ von f um den Punkt x^* zu führender (d.h. linearer) Ordnung in ϵ verschwindet \ddagger ,

$$\delta f(\epsilon) \equiv f(x^* + \epsilon) - f(x^*) = \epsilon f'(x^*) + \frac{1}{2} \epsilon^2 f''(x^*) + \dots = \mathcal{O}(\epsilon^2), \quad (7.37)$$

\ddagger Hier heisst $\mathcal{O}(\epsilon^2)$ “ (höchstens) von der Grössenordnung ϵ^2 ”.

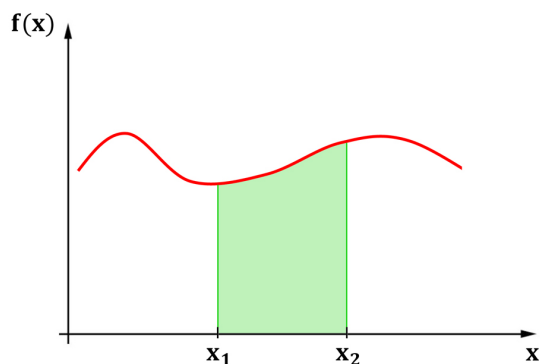


Abbildung 33. Das bestimmte Integral ist ein Funktional, das der Funktion $f(x)$ eine reelle Zahl zuordnet (nämlich die grüne Fläche unter dem Funktionsgraphen).

denn

$$\lim_{\epsilon \rightarrow 0} \frac{\delta f(\epsilon)}{\epsilon} = f'(x^*) = 0. \quad (7.38)$$

Die *Variationsrechnung*, die wir in diesem Abschnitt kennenlernen werden, befasst sich mit Extrema von *Funktionalen*, also von Abbildungen, die einer Funktion $f(x)$ eine (reelle) Zahl zuordnen:

$$\mathcal{F} : f(x) \rightarrow \mathcal{F}[f(\cdot)] \in \mathbb{R}.$$

Die Notation $\mathcal{F}[f(\cdot)]$ soll verdeutlichen, dass das Funktional \mathcal{F} von dem gesamten Verlauf der Funktion f , und nicht nur von ihrem Wert an einem bestimmten Punkt x abhängt. Einfache und wohlbekanntere Beispiele für Funktionale sind die Integrale (Abb. 33)

$$\mathcal{F}[f(\cdot)] = \int_{x_1}^{x_2} dx f(x), \quad \mathcal{F}[f(\cdot)] = \int_{x_1}^{x_2} dx \left(\frac{df}{dx} \right)^2.$$

Funktionale können auch auf mehrkomponentigen Funktionen definiert werden, z.B. auf der Bahnkurve $\vec{r}(t)$ eines Massenpunktes. Als wichtiges Beispiel betrachten wir die in (2.4) eingeführte Bogenlänge der Bahnkurve

$$\mathcal{F}_s[\vec{r}(\cdot)] \equiv \int_{t_1}^{t_2} dt \left| \frac{d\vec{r}}{dt} \right|. \quad (7.39)$$

Zur Vereinfachung nehmen wir an, dass die Bewegung in der (x, y) -Ebene abläuft, und dass entlang der Bahn stets $\dot{x} > 0$. Dann gilt

$$|\dot{\vec{r}}| = \sqrt{\dot{x}^2 + \dot{y}^2} = \dot{x} \sqrt{1 + (\dot{y}/\dot{x})^2} = \dot{x} \sqrt{1 + (dy/dx)^2},$$

da nach der Kettenregel $(dy/dt)(dx/dt)^{-1} = dy/dx$. Damit können wir im Integral (7.39) die Zeit als Integrationsvariable durch die x -Koordinate ersetzen, und erhalten

$$\mathcal{F}_s[y(\cdot)] = \int_{x_1}^{x_2} dx \sqrt{1 + (dy/dx)^2} \quad (7.40)$$

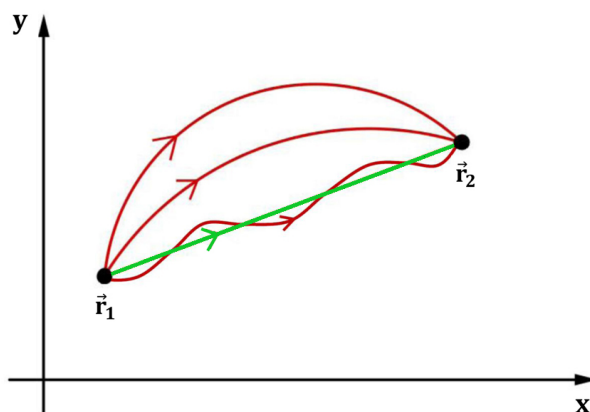


Abbildung 34. Illustration der Variation eines Funktionals am Beispiel der Bogenlänge. Der gerade (grüne) Weg ist die kürzeste Verbindung zwischen den Punkten \vec{r}_1 und \vec{r}_2 , die deformierten (roten) Wege sind alle länger. Um zu zeigen, daß tatsächlich ein Minimum des Funktionals vorliegt, berechnet man die Änderung (= Variation) des Funktionals bei infinitesimaler Deformation des Pfades und fordert, daß die Variation zu linearer Ordnung in der Deformationsamplitude ϵ verschwindet.

als Ausdruck für die Bogenlänge der durch die Funktion $y(x)$ beschriebenen Kurve zwischen den Punkten $x_1 = x(t_1)$ und $x_2 = x(t_2)$.

Wir fragen nun nach einer notwendigen Bedingung dafür, dass eine Funktion $f(x)$ ein Extremum des Funktionals \mathcal{F} ist. Analog zu (7.37) fordern wir dazu das Verschwinden der Variation $\delta\mathcal{F}$. Um diese Variation zu definieren, müssen wir die gesamte Funktion $f(x)$ deformieren, indem wir eine Funktion $\epsilon\eta(x)$ zu f hinzuaddieren (s. Abb. 34):

$$f(x) \rightarrow f(x) + \epsilon\eta(x) \quad (7.41)$$

mit einer beliebigen Funktion $\eta(x)$. Dann ist die Variation von \mathcal{F} definiert durch

$$\delta\mathcal{F}(\epsilon) = \mathcal{F}[f(\cdot) + \epsilon\eta(\cdot)] - \mathcal{F}[f(\cdot)], \quad (7.42)$$

und die notwendige Bedingung für ein Extremum lautet, analog zu (7.38),

$$\lim_{\epsilon \rightarrow 0} \frac{\mathcal{F}[f(\cdot) + \epsilon\eta(\cdot)] - \mathcal{F}[f(\cdot)]}{\epsilon} = 0, \quad (7.43)$$

die für *jede* Funktion $\eta(x)$ erfüllt sein muss. Im nächsten Abschnitt werden wir sehen, wie (7.43) in eine Differentialgleichung für $f(x)$ umgewandelt werden kann.

7.4.2. Euler-Lagrange-Gleichungen. Wir betrachten in diesem Abschnitt Funktionale der Form

$$\mathcal{F}[y(\cdot)] = \int_{x_1}^{x_2} dx \Phi(y, y', x). \quad (7.44)$$

Die Argumentfunktion des Funktionals wird im folgenden mit $y(x)$ bezeichnet, und $y' = dy/dx$. Der Integrand Φ soll eine differenzierbare, aber ansonsten beliebige

Funktion von drei Variablen sein. Das Standardbeispiel ist die Bogenlänge (7.40). Die Variation von $y(x)$ soll bei festen Randwerten $y(x_1) = y_1$ und $y(x_2) = y_2$ durchgeführt werden. Die Funktion $\eta(x)$ in (7.41) muss deshalb die Randbedingungen

$$\eta(x_1) = \eta(x_2) = 0 \quad (7.45)$$

erfüllen.

Wir betrachten die Variation (7.42) zunächst für eine feste Wahl von $\eta(x)$ als Funktion von ϵ . Dann ist (7.43) offensichtlich äquivalent zu

$$\frac{d}{d\epsilon} \mathcal{F}|_{\epsilon=0} = \frac{d}{d\epsilon} \mathcal{F}[y(\cdot) + \epsilon\eta(\cdot)] = 0. \quad (7.46)$$

Im vorliegenden Fall ist

$$\mathcal{F}[y(\cdot) + \epsilon\eta(\cdot)] = \int_{x_1}^{x_2} dx \Phi(y + \epsilon\eta, y' + \epsilon\eta', x).$$

Ableitung nach ϵ ergibt

$$\frac{d}{d\epsilon} \mathcal{F}[y(\cdot) + \epsilon\eta(\cdot)] = \int_{x_1}^{x_2} dx \frac{d}{d\epsilon} \Phi(y + \epsilon\eta, y' + \epsilon\eta', x) = \int_{x_1}^{x_2} dx \left[\eta(x) \frac{\partial \Phi}{\partial y} + \eta'(x) \frac{\partial \Phi}{\partial y'} \right].$$

Der zweite Term kann durch partielle Integration umgeschrieben werden,

$$\int_{x_1}^{x_2} dx \frac{d\eta}{dx} \frac{\partial \Phi}{\partial y'} = \left[\eta(x) \frac{\partial \Phi}{\partial y'} \right]_{x_1}^{x_2} - \int_{x_1}^{x_2} dx \eta(x) \frac{d}{dx} \frac{\partial \Phi}{\partial y'}.$$

Der Randterm verschwindet wegen (7.45) und wir erhalten

$$\frac{d}{d\epsilon} \mathcal{F}[y(\cdot) + \epsilon\eta(\cdot)] = \int_{x_1}^{x_2} dx \eta(x) \left[\frac{\partial \Phi}{\partial y} - \frac{d}{dx} \frac{\partial \Phi}{\partial y'} \right].$$

Damit dieser Ausdruck für jede Wahl von $\eta(x)$ verschwindet, muss offensichtlich die eckige Klammer, die $\eta(x)$ multipliziert, selbst verschwinden. Wir erhalten so die *Euler-Lagrange-Gleichung*

$$\frac{d}{dx} \frac{\partial \Phi}{\partial y'} = \frac{\partial \Phi}{\partial y}, \quad (7.47)$$

die als Differentialgleichung für $y(x)$ zu lesen ist. Die Lösungen dieser Differentialgleichung lösen das Variationsproblem für das Funktional (7.44).

Als Anwendung zeigen wir, dass die kürzeste Verbindung zwischen zwei Punkten eine Gerade ist (Abb. 34). Die Euler-Lagrange-Gleichung für das Funktional (7.40) lautet

$$\frac{d}{dx} \frac{y'}{\sqrt{1 + (y')^2}} = 0,$$

da (7.40) nicht von y abhängt. Daraus folgt, dass $y'/\sqrt{1 + (y')^2}$ konstant sein muss, und damit auch die Steigung y' selbst. Der Wert der Steigung wird durch die Randwerte festgelegt.

Eine weniger triviale Anwendung ist das *Brachistochronenproblem*, das 1696 von Jakob Bernoulli formuliert wurde und den Anstoß zur Entwicklung der Variationsrechnung gegeben hat (Abb. 35). Es geht um die folgenden Frage:

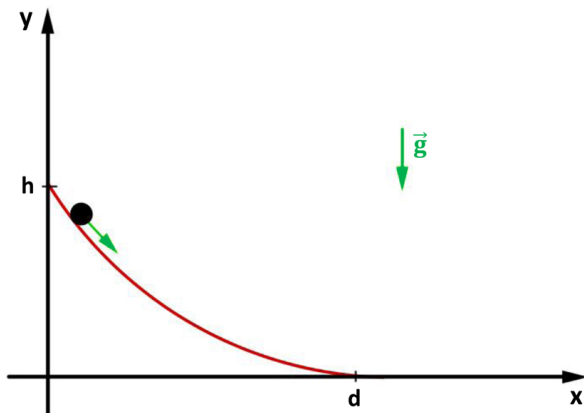


Abbildung 35. Illustration des Brachistochronenproblems: Wie muss die Bahnkurve $y(x)$ gewählt werden, auf der sich der Massenpunkt unter dem Einfluss der Schwerkraft in minimaler Zeit von $(0, h)$ nach $(d, 0)$ bewegt?

Auf welcher Kurve gleitet ein Massenpunkt unter dem Einfluss der Schwerkraft in der kürzesten Zeit zwischen zwei vorgegebenen Punkten?

Die beiden Punkte sollen nicht auf der gleichen Höhe und auch nicht direkt übereinander liegen, und die Anfangsgeschwindigkeit soll verschwinden. Bezeichnet man die Höhendifferenz der beiden Punkte mit h und ihren horizontalen Abstand mit d , so ist das zu variierende Funktional von der Form

$$\mathcal{F}[y(\cdot)] = \int_0^d dx \sqrt{\frac{1 + (y')^2}{h - y(x)}} \quad (7.48)$$

mit Randbedingungen $y(0) = h$, $y(d) = 0$. Die Lösung der entsprechenden Euler-Lagrange-Gleichung zeigt, dass die gesuchte Kurve Teil einer *Zykloide* ist, jener Kurve, die ein Punkt auf dem Umfang eines rollenden Rades beschreibt^{††}.

Wir verallgemeinern noch die Euler-Lagrange-Gleichung (7.47) auf Variationsprobleme, bei denen das Funktional von K Funktionen $y_1(x), \dots, y_K(x)$ abhängt,

$$\mathcal{F}[y_1(\cdot), y_2(\cdot), \dots, y_K(\cdot)] = \int_{x_1}^{x_2} dx \Phi(y_1, \dots, y_K, y'_1, \dots, y'_K, x). \quad (7.49)$$

Man erhält dann einfach K Gleichungen von der Form (7.47),

$$\frac{d}{dx} \frac{\partial \Phi}{\partial y'_n} = \frac{\partial \Phi}{\partial y_n}, \quad n = 1, \dots, K. \quad (7.50)$$

^{††}Eine instructive Animation zum Brachistochronenproblem finden Sie unter <http://home.imm.uran.ru/iagsoft/brach/BrachJ2.html>. Weitere interessante Links enthält der Wikipedia-Beitrag zur Brachistochrone

7.4.3. *Das Hamilton'sche Prinzip.* Mit der Übersetzung

$$x \rightarrow t, \quad y_n \rightarrow q_n, \quad \Phi \rightarrow L$$

sind die Lagrange-Gleichungen zweiter Art (7.30) offensichtlich genau von der Form (7.50). Wir folgern daraus das

Hamilton'sche Prinzip der kleinsten Wirkung: Die Bewegungen eines mechanischen Systems laufen so ab, dass die *Wirkung*

$$S[q_1(\cdot), \dots, q_f(\cdot)] \equiv \int_{t_1}^{t_2} dt L(q_1, \dots, q_f, \dot{q}_1, \dots, \dot{q}_f) \quad (7.51)$$

extremal ist. Dabei ist die Variation von S bei festen Endpunkten $q_n(t_1)$, $q_n(t_2)$, $n = 1, \dots, f$ durchzuführen.

Das Hamilton'sche Prinzip ist von grosser konzeptioneller Bedeutung, aber bisweilen auch praktisch relevant; so wurden die choreographischen Bahnen in Abb. 27 von Carles Simó mit einem numerischen Verfahren gefunden, das die Wirkung minimiert.

Da die Lagrange-Funktion die Dimension einer Energie hat, ist die Dimension der Wirkung Energie \times Zeit. In der Quantentheorie spielt das Planck'sche Wirkungsquantum

$$h \approx 6.626 \times 10^{-34} \text{ Js} \quad (7.52)$$

eine grosse Rolle; wir werden darauf noch zurückkommen.

7.5. *Hamilton-Mechanik*

Die Lagrange-Gleichungen (7.30) sind f Differentialgleichungen zweiter Ordnung für die verallgemeinerten Koordinaten $q_n(t)$. Im Hamilton-Formalismus werden diese durch $2f$ Differentialgleichungen erster Ordnung für die Koordinaten und die zugehörigen verallgemeinerten Impulse ersetzt. Wir werden sehen, dass dies zu einer besonders eleganten und übersichtlichen Darstellung der mechanischen Vorgänge führt.

7.5.1. *Die Hamilton'schen Gleichungen* Wir erinnern zunächst daran, dass sich jede gewöhnliche Differentialgleichung (DGL) 2. Ordnung auf ein System von zwei DGL 1. Ordnung umschreiben lässt. Ausgangspunkt sei die DGL

$$\frac{d^2 y}{dx^2} = F(y, y', x). \quad (7.53)$$

Wir definieren nun $y_1(x) \equiv y(x)$ und $y_2(x) = y' = dy/dx$. Dann ist (7.53) offensichtlich äquivalent zu dem System

$$\frac{dy_1}{dx} = y_2, \quad \frac{dy_2}{dx} = F(x, y_1, y_2). \quad (7.54)$$

Nach diesem Prinzip wollen wir jetzt $2f$ Bewegungsgleichungen für die verallgemeinerten Koordinaten $q_n(t)$ und die zugehörigen Impulse $p_n(t)$ aufstellen. Wir nehmen an, dass die Beziehung (7.36), die die Impulse definiert, umkehrbar ist, d.h. dass sich die

verallgemeinerten Geschwindigkeiten durch die Koordinaten und die Impulse ausdrücken lassen,

$$\dot{q}_n = \dot{q}_n(q_1, \dots, q_f, p_1, \dots, p_f) \equiv \dot{q}_n(q, p)$$

mit der Kurzform $q = (q_1, \dots, q_f)$, $p = (p_1, \dots, p_f)$. Die *Hamilton-Funktion* H ist eine durch†

$$H(q, p) \equiv \sum_{k=1}^f \dot{q}_k(q, p) p_k - L(q, \dot{q}(q, p)) \quad (7.55)$$

definierte Funktion der Koordinaten und Impulse. Wir bilden die partiellen Ableitungen von H :

$$\frac{\partial H}{\partial q_n} = \sum_{k=1}^f \frac{\partial \dot{q}_k}{\partial q_n} p_k - \frac{\partial L}{\partial q_n} - \sum_{k=1}^f \frac{\partial L}{\partial \dot{q}_k} \frac{\partial \dot{q}_k}{\partial q_n} = -\frac{\partial L}{\partial q_n} = -\frac{d}{dt} \frac{\partial L}{\partial \dot{q}_n} = -\dot{p}_n,$$

wobei zweimal die Beziehung (7.36) und einmal die Lagrange-Gleichung (7.30) verwendet wurde. Analog folgt

$$\frac{\partial H}{\partial p_n} = \sum_{k=1}^f \frac{\partial \dot{q}_k}{\partial p_n} p_k + \dot{q}_n - \sum_{k=1}^f \frac{\partial L}{\partial \dot{q}_k} \frac{\partial \dot{q}_k}{\partial p_n} = \dot{q}_n,$$

und wir erhalten die *Hamilton'schen Gleichungen*

$$\dot{q}_n = \frac{\partial H}{\partial p_n}, \quad \dot{p}_n = -\frac{\partial H}{\partial q_n}. \quad (7.56)$$

Um die physikalische Bedeutung von H zu klären, betrachten wir den einfachen Fall eines einzelnen Massenpunkts im Potential $V(\vec{r})$, mit den kartesischen Koordinaten $\vec{r} = (x, y, z)$. Die Lagrange-Funktion ist

$$L = \frac{1}{2} m (\dot{x}^2 + \dot{y}^2 + \dot{z}^2) - V(x, y, z).$$

Die verallgemeinerten Impulse sind dann einfach die Komponenten des Newton'schen Impulses, $p_x = \partial L / \partial \dot{x} = m\dot{x}$ usw., und es folgt

$$H(\vec{r}, \vec{p}) = p_x \dot{x} + p_y \dot{y} + p_z \dot{z} - L = 2T - T + V = T + V,$$

d.h. die Hamilton-Funktion ist gerade die *Gesamtenergie des Systems*.

Tatsächlich ist der Energiesatz schon in der Struktur der Hamilton'schen Gleichungen (7.56) angelegt, denn es gilt

$$\frac{d}{dt} H(q(t), p(t)) = \sum_{k=1}^f \left(\frac{\partial H}{\partial q_k} \dot{q}_k + \frac{\partial H}{\partial p_k} \dot{p}_k \right) = \sum_{k=1}^f \left(\frac{\partial H}{\partial q_k} \frac{\partial H}{\partial p_k} - \frac{\partial H}{\partial p_k} \frac{\partial H}{\partial q_k} \right) = 0.$$

Dabei haben wir vorausgesetzt, dass H und L nicht explizit von der Zeit abhängen (z.B. durch ein zeitabhängiges Potential). Im allgemeinen Fall gilt

$$\frac{dH}{dt} = \frac{\partial H}{\partial t} = -\frac{\partial L}{\partial t}.$$

† Mathematisch ist H die *Legendre-Transformierte* von L .

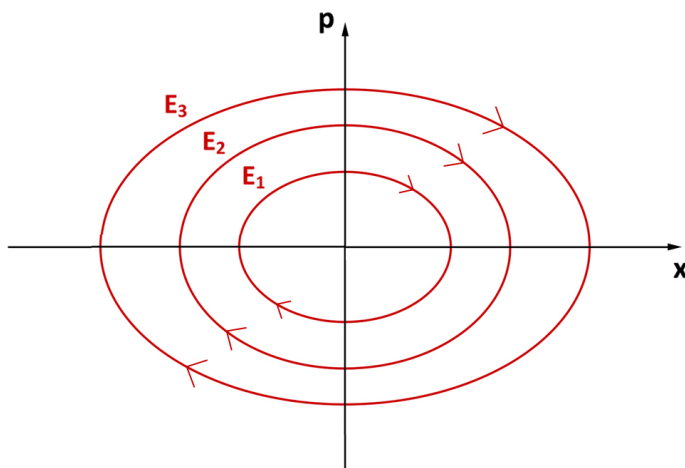


Abbildung 36. Phasenraumportrait des eindimensionalen harmonischen Oszillators.

7.5.2. *Der Phasenraum.* Der Phasenraum ist der durch die verallgemeinerten Koordinaten und die verallgemeinerten Impulse aufgespannte, $2f$ -dimensionale Raum. Die Bewegung des Systems im Phasenraum folgt den Hamilton'schen Gleichungen (7.56). Da diese von 1. Ordnung in der Zeit sind, ist die Bewegung durch die Anfangsbedingungen $q(0), p(0)$ für alle Zeiten festgelegt. Wir folgern:

Durch jeden Punkt des Phasenraums verläuft (maximal) eine mögliche Bahn, Phasenraumbahnen können sich nicht kreuzen.

Das *Phasenraumportrait* eines Systems ist die Gesamtheit aller möglichen Phasenraumbahnen. Wir betrachten zwei Beispiele mit $f = 1$. Der Phasenraum ist dann die (leicht zu veranschaulichende) *Phasenebene*.

a.) *Eindimensionaler harmonischer Oszillator.* Die Lagrange-Funktion ist (vgl. Abschnitt 5.4)

$$L(x, \dot{x}) = \frac{1}{2}m\dot{x}^2 - \frac{1}{2}m\omega^2 x^2,$$

der Impuls ist $p = m\dot{x}$ und die Hamilton-Funktion somit

$$H(x, p) = \frac{p^2}{2m} + \frac{1}{2}m\omega^2 x^2.$$

Die Bewegungen verlaufen bei konstanter Energie E , die Phasenraumbahnen sind also Lösungen der Gleichung

$$H(x, p) = \frac{p^2}{2m} + \frac{1}{2}m\omega^2 x^2 = E. \quad (7.57)$$

Anders gesagt: Die Phasenraumbahnen sind *Höhenlinien* der Funktion H .

Wir unterscheiden zwei Typen von Lösungen von (7.57):

- (i) $E = 0 \Rightarrow x = p = 0$. Das ist die *Ruhelage* des Oszillators.
- (ii) $E > 0$: Dann beschreibt (7.57) eine *Ellipse* im Phasenraum. In der oberen Halbebene ($p > 0$) ist $\dot{x} = p/m > 0$, in der unteren Halbebene $\dot{x} < 0$, die Ellipsen werden also im Uhrzeigersinn durchlaufen (Abb.36). Die Halbachsen der Ellipse‡ zur Energie E sind gemäss (7.57)

$$a = \sqrt{2E/m\omega^2}, \quad b = \sqrt{2mE},$$

die von der Ellipse eingeschlossene Fläche somit

$$A(E) = \pi ab = \frac{2\pi E}{\omega}. \quad (7.58)$$

Die Fläche hat die Dimension einer *Wirkung*, und tatsächlich erlaubt die Beziehung (7.58) einen kleinen Ausblick auf die Quantenmechanik. Nach der zuerst von Niels Bohr formulierten *Quantenbedingung* sind quantenmechanisch erlaubte Bahnen solche, bei denen die eingeschlossene Phasenraumfläche ein ganzzahliges Vielfaches des Planck'schen Wirkungsquantums (7.52) beträgt. Aus (7.58) erhalten wir für den eindimensionalen harmonischen Oszillator so die Bedingung

$$E = E_n = \frac{h\omega}{2\pi}n = \hbar\omega n, \quad n = 1, 2, 3, \dots$$

mit $\hbar = h/2\pi$. Dies stimmt schon fast mit dem Ergebnis der exakten quantenmechanischen Rechnung

$$E_n = \hbar\omega \left(n + \frac{1}{2} \right), \quad n = 0, 1, 2, \dots$$

überein.

- b.) *Starres ebenes Pendel*. Die verallgemeinerte Koordinate ist der Auslenkungswinkel φ , die Lagrange-Funktion ist (vgl. Abschnitt 7.3.2)

$$L = \frac{1}{2}m\ell^2\dot{\varphi}^2 - mg(z_0 - \ell \cos \varphi).$$

Der verallgemeinerte Impuls ist somit $p \equiv p_\varphi = \partial L / \partial \dot{\varphi} = m\ell^2\dot{\varphi}$, und die Hamilton-Funktion ergibt sich zu

$$H(\varphi, p) = \frac{p^2}{2m\ell^2} + mg(z_0 - \ell \cos \varphi). \quad (7.59)$$

Im folgenden wählen wir den Aufhängepunkt $z_0 = -\ell$, sodass

$$V(\varphi) = -mg\ell(1 + \cos \varphi) \leq 0. \quad (7.60)$$

Die Bewegungsgleichung (7.32) hat zwei qualitativ unterschiedliche Typen von Lösungen:

‡ Man beachte, daß x und p , und deshalb auch a und b verschiedene Einheiten haben. Es ist deshalb nicht sinnvoll, von der Exzentrizität dieser Ellipsen zu sprechen.

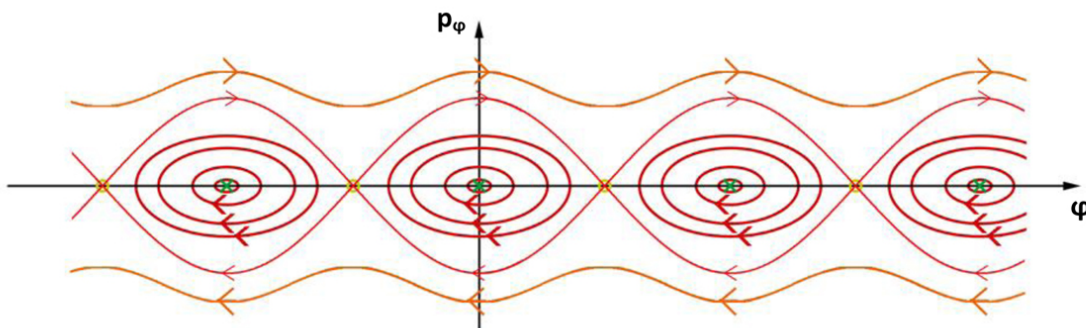


Abbildung 37. Phasenraumportrait des ebenen starren Pendels.

- (i) Für $E < 0$ oszilliert das Pendel um die Ruhelage $\varphi = 0$. An den Umkehrpunkten verschwindet die kinetische Energie und die Winkelgeschwindigkeit $\dot{\varphi}$ ändert ihr Vorzeichen.
- (ii) Für $E > 0$ rotiert das Pendel mit einem festen Umlaufsinn. Die kinetische Energie ist stets von Null verschieden und es gilt entweder $\dot{\varphi} > 0$ oder $\dot{\varphi} < 0$.

Abbildung 37 illustriert die beiden Bewegungstypen im Phasenraumportrait des Pendels. Für diese Darstellung wurde die Winkelvariable φ auf die ganze reelle Achse periodisch fortgesetzt. Die oszillierenden Lösungen [Typ (i)] bilden (für kleine Auslenkungen) Ellipsen um die *stabilen* Ruhelagen $\varphi = 0, \pm 2\pi, \pm 4\pi, \dots$. Sie sind Minima des Potentials (7.60) mit $V''(\varphi) > 0$. Die Bereiche der oszillatorischen Lösungen und der Rotationen [Typ (ii)] werden getrennt durch eine spezielle Bahnkurve, die *Separatrix*, die durch die *instabilen* Ruhelagen $\varphi = \pm\pi, \pm 3\pi, \dots$ verläuft. Diese Ruhelagen sind Maxima von (7.60). Die Separatrix wird durchlaufen, wenn man das Pendel “auf den Kopf” stellt und mit einer infinitesimal kleinen Geschwindigkeit anstößt.

Die Separatrix ist die Höhenlinie der Hamilton-Funktion zur Energie $E = 0$. Aus (7.59) folgt mit (7.60) und unter Benutzung einer trigonometrischen Identität die explizite Darstellung

$$p^2 = 2m^2\ell^3g(1 + \cos\varphi) \Rightarrow p = \pm 2m\sqrt{\ell^3g} \cos(\varphi/2).$$

7.5.3. Ein Beispiel für Hamilton'sches Chaos. In der Nähe der Separatrix hängt die Bewegung des Pendels sehr empfindlich von den Anfangsbedingungen ab: Kleine Abweichungen von der instabilen Ruhelage treiben das Pendel entweder in eine oszillatorische Bewegung, oder in eine Rotation mit festem Umlaufsinn. Wir fragen uns nun, wie sich dieses delicate Verhalten bei kleinen Störungen des Pendels verändert, und betrachten speziell eine zeitliche Modulation des Aufhängepunkts von der Form

$$z_0(t) = -\ell + a(t).$$

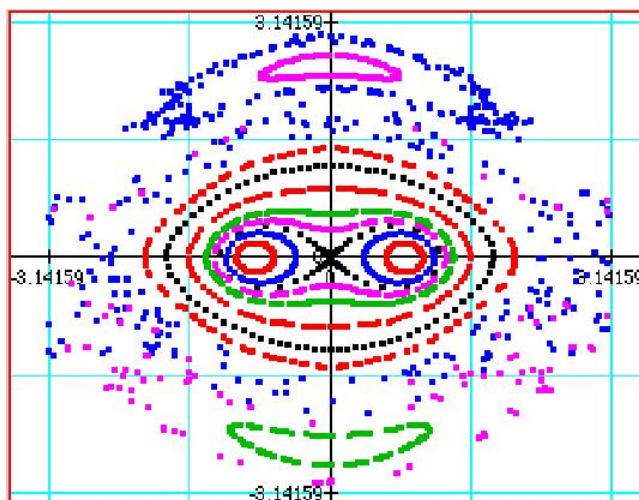


Abbildung 38. Phasenraumbahnen des periodisch getriebenen Pendels (7.63). Das Bild ist der im Text genannten Webseite entnommen.

Zur Herleitung der Bewegungsgleichung benutzen wir den Lagrange-Formalismus. Die verallgemeinerte Koordinate ist wie üblich der Auslenkungswinkel φ , und die Position der Pendels wird in kartesischen Koordinaten beschrieben durch

$$x(t) = \ell \sin \varphi(t), \quad z(t) = z_0(t) - \ell \cos \varphi(t).$$

Die kinetische Energie ist somit

$$T = \frac{1}{2}m[(\dot{x})^2 + (\dot{z})^2] = \frac{1}{2}m\ell^2(\dot{\varphi})^2 + \frac{1}{2}m(\dot{a})^2 + m\dot{a}\dot{\varphi}\ell \sin \varphi,$$

und die potentielle Energie $V = mgz = mg(z_0(t) - \ell \cos \varphi)$. Mit $L = T - V$ folgt

$$\frac{\partial L}{\partial \dot{\varphi}} = m\ell^2\dot{\varphi} + m\dot{a}\ell \sin \varphi, \quad \frac{\partial L}{\partial \varphi} = -mg\ell \sin \varphi + m\dot{a}\dot{\varphi}\ell \cos \varphi.$$

Einsetzen in die Lagrange-Gleichung zweiter Art ergibt

$$m\ell^2\ddot{\varphi} + m\dot{a}\ell \sin \varphi + m\dot{a}\dot{\varphi}\ell \cos \varphi = -mg\ell \sin \varphi + m\dot{a}\dot{\varphi}\ell \cos \varphi,$$

was sich vereinfachen lässt zu

$$\ddot{\varphi} = -\frac{1}{\ell}(g + \ddot{a}) \sin \varphi. \quad (7.61)$$

Der Vergleich mit der Bewegungsgleichung (7.32) des ungestörten Pendels zeigt, wie die Schwerebeschleunigung durch die Beschleunigung \ddot{a} des Aufhängepunkts modifiziert wird. Wir wählen eine periodische Modulation von der Form $a(t) = a_0 \cos(\tilde{\omega}t)$, und führen dimensionslose Variablen

$$\tau = \omega t, \quad \alpha = a_0/\ell, \quad \Omega = \tilde{\omega}/\omega \quad (7.62)$$

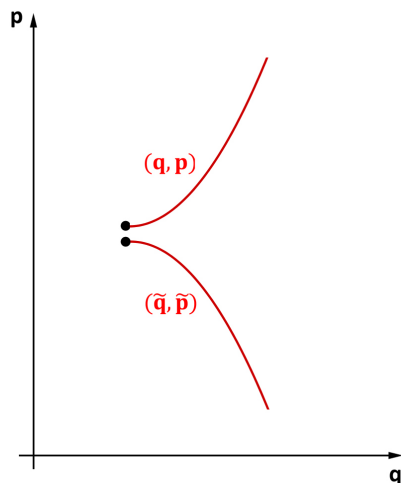


Abbildung 39. Zum Begriff des deterministischen Chaos. In chaotischen Systemen laufen Trajektorien mit benachbarten Anfangsbedingungen (q, p) und (\tilde{q}, \tilde{p}) exponentiell schnell auseinander.

ein, wobei $\omega = \sqrt{g/\ell}$ die Eigenfrequenz des Pendels bei kleinen Auslenkungen ist. In den Variablen (7.62) erhält die Bewegungsgleichung (7.61) die Form

$$\frac{d^2\varphi}{d\tau^2} = -[1 - \alpha\Omega^2 \cos(\Omega\tau)] \sin\varphi. \quad (7.63)$$

Die Lösungen lassen sich unter

<http://www.scar.utoronto.ca/pat/fun/JAVA/pendchao/pendchao.html>

mit einem JAVA-applet generieren und graphisch darstellen§(Abbildung 38). Man findet schon bei kleiner Störungsamplitude ($\alpha \approx 0.01$) in der Nähe der Separatrix ein flächenhaftes Gebiet, in dem die Bewegung irregulär erscheint. Dies ist ein einfaches Beispiel für *deterministisches Chaos* in einem Hamilton'schen System.

Es ist zunächst nicht offensichtlich, wie es in mechanischen Systemen überhaupt zu chaotischem (im Sinne von *unvorhersagbarem*) Verhalten kommen kann, denn die Lösungen der Newton'schen oder Hamilton'schen Bewegungsgleichungen sind durch Angabe der Anfangsbedingungen für Orte und Geschwindigkeiten bzw. Impulse im Prinzip für alle Zeiten determiniert. Chaotische Systeme sind aber in einem *praktischen* Sinne unvorhersagbar. Dies äussert sich in der folgenden

Definition: Ein dynamisches System zeigt deterministisches Chaos, wenn kleine Abweichungen in den Anfangsbedingungen exponentiell mit der Zeit anwachsen.

Bezogen auf das periodisch getriebene Pendel betrachten wir zwei Phasenraumbahnen $(\varphi(t), p(t))$ und $(\tilde{\varphi}(t), \tilde{p}(t))$, deren Anfangsbedingungen dicht beieinander liegen,

$$\delta\varphi(0) = |\varphi(0) - \tilde{\varphi}(0)| \ll 1,$$

§ Das Programm liefert die Lösung von (7.63) zu diskreten Zeiten mit der Periode $2\pi/\tilde{\Omega}$.

und eine analoge Bedingung für die Impulse. Bei chaotischen Bahnen gilt dann

$$\delta\varphi(t) \approx \delta\varphi(0)e^{\lambda t}, \quad \delta p(t) \approx \delta p(0)e^{\lambda t} \quad (7.64)$$

mit einem positiven *Lyapunov-Exponenten* $\lambda > 0$. Dieses Verhalten wird in Abb. 39 schematisch dargestellt.

Die praktische Konsequenz von (7.64) ist, dass eine lineare Verlängerung der Vorhersagezeit (bei festem Anspruch an die Genauigkeit des Ergebnisses) eine exponentielle Zunahme der Rechengenauigkeit erfordert. Dies ist z.B. der Grund dafür, dass der Zeithorizont von Wetterprognosen trotz exponentiell anwachsenden Rechnerressourcen nur langsam zunimmt.