

# ELEKTRODYNAMIK

Thomas Nattermann

gesetzt in TEX von Mariela Boevska

Wintersemester 2002/03



# Inhaltsverzeichnis

<b>1</b>	<b>Physikalische und mathematische Grundlagen der Elektrodynamik</b>	<b>3</b>
1.1	Geschichte des Magnetismus und der Elektrizität . . . . .	3
1.2	Elektromagnetische Kräfte . . . . .	5
1.3	Beschreibung von Feldern . . . . .	12
1.4	Die Maxwellschen Gleichungen . . . . .	18
1.5	Illustration der Maxwell-Gleichungen . . . . .	22
1.5.1	$\operatorname{div} \mathbf{E}(\mathbf{r}, t) = 4\pi\rho(\mathbf{r}, t)$ . . . . .	22
1.5.2	$\operatorname{rot} \mathbf{E}(\mathbf{r}, t) + \frac{1}{c} \frac{\partial}{\partial t} \mathbf{B}(\mathbf{r}, t) = 0$ . . . . .	23
1.5.3	$\operatorname{div} \mathbf{B}(\mathbf{r}, t) = 0$ . . . . .	25
1.5.4	$\operatorname{rot} \mathbf{B} - \frac{1}{c} \frac{\partial}{\partial t} \mathbf{E} = \frac{4\pi}{c} \mathbf{j}(\mathbf{r}, t)$ . . . . .	25
<b>2</b>	<b>Einfache Anwendungen der Maxwell-Gleichungen: Elektro- und Magnetostatik, elektromagnetische Wellen</b>	<b>27</b>
2.1	Elektro- und magnetostatische Grundaufgabe . . . . .	27
2.2	Multipol-Entwicklung . . . . .	28
2.2.1	Elektrostatik . . . . .	28
2.2.2	Magnetostatik . . . . .	31
2.3	Elektrostatische Energie und Kräfte . . . . .	34
2.3.1	Elektrostatische Energie . . . . .	34
2.3.2	Ladungen im äußeren Feld $\mathbf{E}^{\text{ext}}(\mathbf{r}) = -\nabla\phi^{\text{ext}}(\mathbf{r})$ . . . . .	35
2.4	Magnetostatische Energie und Kräfte . . . . .	36
2.4.1	Amperesche Kraftgesetz . . . . .	36
2.4.2	Ströme im äußeren Magnetfeld $\mathbf{B}^{\text{ext}}(\mathbf{r})$ . . . . .	38
2.4.3	Energie stationärer magnetischer Felder . . . . .	39
2.4.4	Induktionskoeffizienten . . . . .	40
2.5	Das Feld geladener Leiter . . . . .	43
2.6	Elektrostatische Randwertaufgaben . . . . .	44
2.7	Kapazitätskoeffizienten . . . . .	49
2.8	Freie elektromagnetische Wellen . . . . .	52
<b>3</b>	<b>Erhaltungssätze und Invarianten</b>	<b>57</b>
3.1	Erhaltungssätze . . . . .	57
3.1.1	Ladungserhaltung . . . . .	57
3.1.2	Energieerhaltung . . . . .	57
3.1.3	Impulserhaltung . . . . .	58
3.1.4	Drehimpulserhaltung . . . . .	59
3.2	Transformationsverhalten elektromagn. Größen bei einfachen Transformationen . . . . .	60
3.2.1	Invarianz gegen zeitliche Verschiebung . . . . .	60
3.2.2	Invarianz gegen räumliche Verschiebung . . . . .	60

3.2.3	Invarianz gegen räumliche Drehung . . . . .	60
3.2.4	Invarianz gegenüber der Spiegelung und Inversion . . . . .	62
3.2.5	Ladungsumkehr (–konjugation) . . . . .	64
3.2.6	Bewegungsumkehr . . . . .	64
3.2.7	Eichinvarianz . . . . .	65
3.2.8	Invarianz gegenüber Lorentztransformationen . . . . .	65
3.3	Lorentzinvarianz oder die Spezielle Relativitätstheorie . . . . .	65
3.3.1	Lorentztransformation . . . . .	65
3.3.2	Anwendung der Lorentztransformation . . . . .	69
3.3.3	Invarianten der Lorentztransformation . . . . .	70
3.3.4	Elektrodynamik in kovarianter Formulierung . . . . .	72
3.4	Das Extremalprinzip der Elektrodynamik . . . . .	73
3.4.1	Die Wirkungsfunktionale . . . . .	74
3.4.2	Die Bewegungsgleichungen . . . . .	75
<b>4</b>	<b>Elektrodynamik in Materie</b>	<b>79</b>
4.1	Die makroskopischen Maxwell–Gleichungen . . . . .	79
4.2	Einfache Anwendungen der makroskopischen Maxwell–Gleichungen . . . . .	85
4.2.1	Die dielektrische Kugel im homogenen statischen Feld $\mathbf{E}_0$ . . . . .	85
4.2.2	Das lokale Feld, die Clausius–Massotti–Formel . . . . .	87
4.2.3	Feldenergie in linearen Medien . . . . .	89
4.3	London–Theorie der Supraleitung (SL) . . . . .	91
4.3.1	Die London-Gleichung und einige ihrer Konsequenzen . . . . .	91
4.3.2	Ableitung der London-Theorie aus der Ginzburg-Landau-Wirkung . . . . .	95
4.4	Elektromagnetische Wellen in Materie . . . . .	96
4.5	Drude-Modell für $\varepsilon(\omega), \sigma_n(\omega)$ . . . . .	98
4.6	Kramers-Kronig Relationen . . . . .	101
4.7	Einige Bemerkungen zum Para- und Diamagnetismus . . . . .	107
<b>5</b>	<b>Elektromagnetische Strahlung</b>	<b>111</b>
5.1	Die Greensche Funktion für die inhomogene Wellengleichung . . . . .	111
5.2	Das elektromagnetische Feld einer Punktladung . . . . .	113
5.3	Felder in der Fernzone . . . . .	119
5.4	Multipolstrahlung . . . . .	121
5.5	Strahlungsdämpfung, die Abraham-Lorentzgleichung . . . . .	123



# Kapitel 1

## Physikalische und mathematische Grundlagen der Elektrodynamik

### 1.1 Geschichte des Magnetismus und der Elektrizität

*Der Magnetismus ist eines der am längsten bekannten aber auch am längsten un-  
verstandenen physikalischen Phänomene.*

26.Jh. v. Chr. (?)	Magnetkompaß in China, schriftlich erwähnt erst im 13.Jh. n. Chr.
800 v. Chr.	Magnetit ( $\text{Fe}_3\text{O}_4$ ): magn. Wirkung auf Eisen. Thales von Milet, Plinius (Hirte Magnes auf dem Berge Ida: Schuhnägel und eiserne Stabspitze blieben haften) Lukrez (Magnesia Fundort von Magnetit)
11.Jh. n. Chr.	Kompaß kommt nach Europa → erste Untersuchungen zum Magnetismus
1269	<i>Petrus Peregrinus</i> : Entdeckt die Existenz von Magnetpolen
1600	<i>William Gilbert</i> : "De Magnete" (i) es gibt keine magn. Ladungen ( $\text{div } \mathbf{B} = 0$ ), d.h. man kann Magnetpole nicht isolieren, d.h. (ii) Reibungselektrizität; (iii) Elektroskop beschrieben
16./17.Jh.	<i>G. Galilei (1564-1642)</i> , <i>J. Kepler (1571-1630)</i> , <i>I. Newton (1643-1727)</i> : Mechanik im 16./17. Jahrh. entwickelt; Keplers Gravitationsgesetz 1666/83
1629	<i>Nicolo Cabeo</i> : elektr. geladene Körper können sich auch abstoßen
1729	<i>Stephen Gray</i> : Unterschied zwischen Leitern und Isolatoren
1734	<i>Charles Francois de Cisternay du Fay</i> : es gibt 2 Arten von Ladungen
1747	<i>Benjamin Franklin</i> : (i) es gibt positive und negative Ladungen; (ii) Erhaltungssatz für Ladungen; (iii) es gibt <b>keine</b> elektrostatischen Kräfte im geladenen Leiter
1767	<i>Joseph Prislej</i> : aus (iii) folgt $F \sim 1/r^2$

1785	<i>Charles-Augustin Coulomb</i> : Nachmessen dieses Gesetzes → (1736-1806) Beginn der quantitativen Erfassung der Elektrizität
1791	<i>Luigi Galvani</i> : Froschschenkel-Versuche <i>Georg Simon Ohm (1787-1854)</i> : Ohmsches Gesetz
1799	<i>Alessandro Volta</i> : Voltasche Batterie
1819	<i>Christian Oersted (1777-1851)</i> : elektrische Ströme sind die Wirbel der Magnete (“Der Geist der Natur”, 1850) <i>Heinrich Friedrich Lenz (1804-1851)</i> : Induktionsstrom, $T$ -abhängiger Widerstand (Petersburg, Rom)
1821	<i>André Marie Ampere (1775-1836)</i> : Amperesches Gesetz
1824	Hypothese: alle magnetischen Ströme sind elektrischen Ursprungs (A.–“Kreisströme”)
1830	<i>Joseph Henry</i> und
1831	<i>Michael Faraday (1791-1867)</i> : Induktionsgesetz (1823: Verflüssigung von Chlor, 24: Benzol, 34: Elektrolyse, 44: Diamagnetismus, 45: Drehung der Polarisationssebene des Lichts im $\mathbf{B}$ -Feld, Magnetismus + Elektrizität + Licht als Einheit betrachtet; Faradayscher Käfig; “Die Naturgeschichte der Kerze”)
1846	<i>Wilhelm E. Weber (1804-91)</i> : Versuche magnetische Phänomene durch Kräfte zwischen Ladungen, die geschwindigkeitsabhängig sind zu beschreiben (mit Gauß Messung des Erdmagnetfeldes; Halle, Göttingen)
um 1850	<i>Faraday</i> : Es gibt Elektrisches und magn. <b>Feld</b> Entdeckung von Dia- und Paramagnetismus
1865	<i>James Clark Maxwell (1831-79)</i> : Maxwellsche Theorie Verknüpfung von Elektrizität und Magnetismus, elektromagnetische Lichttheorie (Maxwell-Verteilung)
1887	<i>Heinrich R. Hertz (1857-94)</i> : Experimentelle Verifizierung der elektromagnetischen Wellen (besitzen alle Eigenschaften des Lichts; lichtelektrischer Effekt; “Prinzipien der Mechanik”; Karlsruhe, Bonn)
ab 1895	<i>Hendrik Anton Lorentz (1853-1928)</i> : Ausdehnung der Maxwellschen Theorie auf Materie (Elektronentheorie, Deutung des Michelson-Versuchs, Lorentzkraft, Nobelpreis 1902, Leiden Vorsitzender der Völkerbundskommission für geistige Zusammenarbeit)
1905	<i>Albert Einstein (1879-1955)</i> : Konstanz der Lichtgeschwindigkeit, Spezielle Relativitätstheorie (lichtelektrischer Effekt, spezifische Wärme der Festkörper, Brownsche Bewegung, Elektronenspin als Ursache für Ferromagnetismus (+ de Haas), Allgemeine Relativitätstheorie) <i>Wander Johannes de Haas (1878-1960)</i> : Leiden, zeigte experimentell Molekularströme
.....	<i>Paul Langevin</i> <i>Paul A. M. Dirac (1902-1984)</i> Elektronenspin <i>Werner Heisenberg (1901-1976)</i> Austausch Ww <i>Bloch, Weiss, Curie, van Veek, Neel</i> etc.

## 1.2 Elektromagnetische Kräfte

*oder was ist der Gegenstand der Vorlesung?*

Im Folgenden wollen wir den Gegenstand der Vorlesung näher bestimmen.

Die in dieser Vorlesung betrachteten **elektromagnetische Kräfte** gehören zu den **4. fundamentalen Wechselwirkungen (Ww)**.

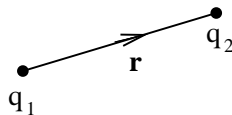
Wechselwirkung (betroffene Teilchen)	Beispiel	Reichweite	relative Stärke	Austausch Boson
Gravitation (alle Teilchen)	Planetenbew. Schwerkraft	$\propto (1/r^2)$	$\gamma_G m_p^2 / \hbar c \approx 6 \cdot 10^{-39}$	Graviton (?) ( $S = 2$ )
schwache Ww (Hadronen: Baryonen, Mesonen) (Leptonen: $(\nu, e, \mu)$ )	radioaktiver $\beta$ -Zerfall der Atomkerne	$10^{-16} \text{cm}$	$G_F m_p^2 / \hbar c \approx 10^{-5}$	W und Z- Bosonen ( $S = 1$ )
elektromagn. Ww (geladene Teilchen)	Atomkräfte, chem. Bindung, Optik/Eletriz.	$\propto (1/r^2)$	$e^2 / (\hbar c) \approx 1/137$	Photon $\gamma$ ( $S = 1$ )
starke Ww (Hadronen (Quarks))	Zusammenhalt der Kerne	$10^{-13} \text{cm}$	1	Gluon $G$ ( $S = 1$ )

Aus dem Wechselspiel dieser 4 Wechselwirkungen resultiert der Aufbau des Universums, Leben auf der Erde usw..

Die elektromagnetische Wechselwirkung liegt der chemischen Bindung, der Festigkeit von Festkörpern, der "Kernenergie" etc. zugrunde.

**Erfahrung:** Teilchen haben neben ihrer Masse  $m$  auch eine Ladung  $q$ , welche eine additive Erhaltungsgröße ist. Für ruhende Ladungen gilt das Coulombsche Gesetz (für die Kraft auf Ladung  $q_2$  durch Ladung  $q_1$ , im Vakuum  $\mathbf{r} = \mathbf{r}_2 - \mathbf{r}_1$ ):

$$\mathbf{F}^{(2,1)} = \gamma_c \frac{q_1 q_2}{r^2} \cdot \frac{\mathbf{r}}{r}$$



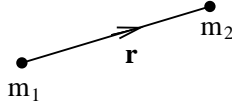
$\gamma_c$  hängt vom Maßsystem ab: im Gaußsches System  $\gamma_c = 1 \rightarrow$  dann kann man Coulombgesetz zur Ladungsdefinition benutzen. Ladungen treten nur als Vielfaches der Elementarladung  $e_0$  auf:

$$\begin{aligned} e_0 &= 4.8032 \cdot 10^{-10} \text{ es cgs } [g^{1/2} \text{cm}^{3/2} \text{sec}^{-1} = \text{cm dyn}^{1/2}] \\ &= 1.6021 \cdot 10^{-19} \text{ Coulomb} \end{aligned}$$

Vergleich mit der Gravitationskraft (Kraft auf Masse 2 durch Masse 1,  $\mathbf{r} = (\mathbf{r}_2 - \mathbf{r}_1)$ )

$$\begin{aligned}\mathbf{F}_G^{(2,1)} &= -\gamma_G \frac{m_1 m_2}{r^2} \frac{\mathbf{r}}{r} \\ \gamma_G &= 6.66 \cdot 10^{-8} \text{ g}^{-1} \text{ cm}^3 \text{ sec}^{-2}\end{aligned}$$

Wechselwirkung zwischen zwei Protonen,  $M_p = 1.67 \cdot 10^{-24} \text{ g}$ ,  $q = e_0$ :

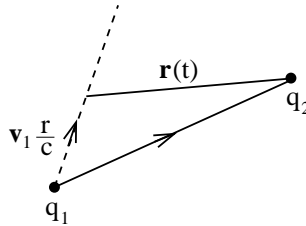


$$\begin{aligned}\frac{F_c}{F_G} &= \frac{e_0^2}{\gamma_G M_p^2} = \frac{(4.8)^2 10^{-20+48+8}}{6.66(1.67)^2} \left[ \frac{\text{g cm}^3 \text{ g sec}^2}{\text{sec}^2 \text{ g}^2 \text{ cm}^3} \right] \\ &\sim \left( \frac{1}{137} / 6 \cdot 10^{-39} \right) \approx 1.24 \cdot 10^{36},\end{aligned}$$

d.h. die Coulomb-Wechselwirkung ist 36(!) Größenordnungen stärker. Damit die Gravitation überhaupt wichtig (gleiche Reichweite!) ist, muß die Natur unglaublich neutral sein: wäre nur jedes  $10^{18}$ -te Atom nicht neutral, dann würde die Gravitation von der Coulomb-Wechselwirkung überdeckt – mit fundamentalen Konsequenzen für das Universum.

Bei **ruhenden Ladungen** kann man die Wechselwirkung als **Fernwirkungskraft** verstehen: die Wechselwirkung tritt instantan über beliebige Entfernungen und ohne eine die Kraft vermittelndes Medium ein.

Bei bewegten Ladungen ist dies nicht mehr der Fall: bewegt sich z.B. die Ladung  $q_1$  mit der Geschwindigkeit  $\mathbf{v}_1 = d\mathbf{r}_1(t)/dt$  während  $q_2$  weiter ruht, so gilt (Liénard-Wiechert)

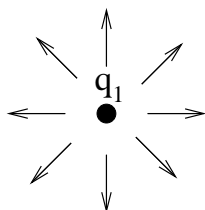


$$\mathbf{F}^{(2,1)}(t) = q_1 q_2 \left\{ \frac{1}{(1 - \frac{\mathbf{v}_1}{c} \cdot \mathbf{r}_0)} \left[ \frac{\mathbf{r}_0}{r^2} + \frac{1}{c} \frac{d}{dt'} \frac{\mathbf{r}_0 - \frac{1}{c} \mathbf{v}_1}{r(1 - \mathbf{r}_0 \cdot \frac{\mathbf{v}_1}{c})} \right] \right\}_{\text{ret}}.$$

Dieses ist ein quasistatisches Beschleunigungsfeld,  $\mathbf{r}_0 = \mathbf{r}/r$  und alle Größen, die von  $t$  abhängen sind zur Zeit  $t' = t - r(t)/c$  auszuwerten ( $\{ \}_{\text{ret}}$ ), d.h. zwischen Ursache und Wirkung besteht eine Zeitdifferenz. Für  $c \rightarrow \infty$ , d.h. im nichtrelativistischen Grenzfall erhält man wieder das zeitunabhängige Coulombsche Gesetz.

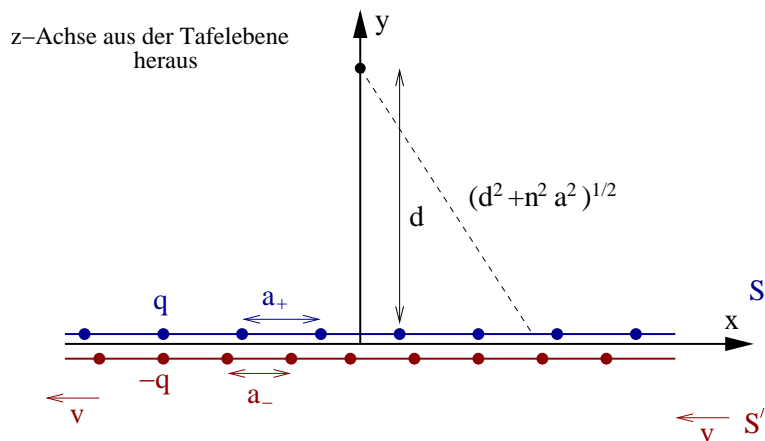
Das Ergebnis ist also eine direkte Folge der Endlichkeit der Ausbreitungsgeschwindigkeit der Wirkung (maximal  $c \approx 3 \cdot 10^{10}$  cm/sec) oder allgemeiner des Einsteinschen Relativitätsprinzips. Während man in der Mechanik bei kleinen Geschwindigkeiten  $v \ll c$  das Galileische Relativitätsprinzip verwenden kann (mit instanter Ausbreitung der Wirkung), ist das in der Elektrodynamik nicht mehr der Fall: viele elektromagnetische Effekte sind relativistischer Natur (z.B. alle magnetischen Phänomene) und nur deshalb leicht beobachtbar, weil der nicht-relativistische Grenzfall auf Grund der Neutralität selbst keinen Effekt gibt, (Bsp.: Feld einer Ladungskette). Die Formulierung der Elektrodynamik muß also von Anfang an das Einsteinsche Relativitätsprinzip berücksichtigen (was auch schon vor Einstein geschehen ist). Wir kommen später hierauf zurück.

Wir können die endliche Wirkungsausbreitung berücksichtigen, wenn wir  $\mathbf{F}^{(2,1)}(t) = q_2 \mathbf{E}_1(\mathbf{r}_2, t)$  setzen, wobei  $\mathbf{E}_2(\mathbf{r}, t)$  das von der Ladung  $q_1$  ( $q_1 > 0$ ) am Ort  $\mathbf{r}_2$  der Ladung  $q_2$  zum Zeitpunkt  $t$  erzeugte elektrische Feld ist. D.h. die Ladung  $q_1$  versetzt den Raum in einen elektromagnetischen Erregungszustand, den wir **elektromagnetisches Feld** nennen. Neben dem elektrischen muß ein zweites Feld existieren



(siehe Ladungskette), das wir das magnetische Feld  $\mathbf{B}(\mathbf{r}, t)$  nennen.

**Ein Gedankenexperiment:**



$$1. E_y = q \sum_{n=-\infty}^{\infty} \frac{d}{(d^2 + n^2 a^2)^{3/2}} \stackrel{d \gg a}{\approx} \frac{qd}{a} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{dx}{(d^2 + x^2)^{3/2}} = \frac{q}{ad} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{dx'}{(1+x'^2)^{3/2}}$$

Genauer mit der Poissonschen Summen-Formel  $\sum_n f(n) = \int dn f(n) (1 + 2 \sum_{k=1}^{\infty} \cos 2\pi kn)$ .

Kraft auf Ladung  $Q$  im Punkt  $(0, d, 0)$   $F_y = QE_y$ .

- Bei 2 Ketten mit Ladungen  $\pm q$  im Abstand  $a_{+/-}$ :  $E_y = \frac{2q}{d} \left( \frac{1}{a_+} - \frac{1}{a_-} \right)$ .
- Betrachte jetzt Bewegung der  $(-q)$ -Kette mit Geschwindigkeit  $-v$  relativ zu  $Q$  und  $+q$ -Kette (Bewegung nach links). Dann fließt Strom  $I = qv/a_-$  ( $a_-$  Abstand der Ladungen) **“System S”**

Neutralität:  $a_+ = a_- \rightarrow$  Kraft auf  $Q$   $F_y = QE_y = 0$ .

- “System S'”**:  $-q$ -Kette ruht,  $q, Q$  mit  $v$  nach rechts  $I' = qv/a'_+$

$$\left. \begin{aligned} a'_+ &= a_+ \left( 1 - \frac{v^2}{c^2} \right)^{1/2} \\ a'_- &= a_- \left( 1 - \frac{v^2}{c^2} \right)^{-1/2} \\ &= a'_+ \left( 1 - \frac{v^2}{c^2} \right)^{-1} \end{aligned} \right\} \text{Lorentzkontraktion: keine Trf. der Ladung}$$

$$E'_y = \frac{2q}{d} \left( \frac{1}{a'_+} - \frac{1}{a'_-} \right) = \frac{2q}{da'_+} \left( 1 - \left( 1 - \frac{v^2}{c^2} \right) \right) = \frac{2q}{da'_+} \frac{v^2}{c^2} \quad \text{Kraft auf } Q?$$

Resultat kann nicht vom Bezugssystem abhängen  $\rightarrow$  es gibt eine weitere “magnetische Kraft”, die auf die sich bewegende Ladung wirkt (falls diese auf ruhende Ladung wirkte, dann auch in S)

$$\begin{aligned} F'_{\text{tot}} &= QE'_y + Q \frac{v}{c} B'_z = 0 \\ B'_z &= \frac{2qv}{da'_+ c} = \frac{2I}{cd} \quad \text{Spezialfall des Biot-Savartschen Gesetzes} \\ \mathbf{B}(\mathbf{r}, -t) &= -\mathbf{B}(\mathbf{r}, t) \end{aligned}$$

### Fazit:

- Magnetismus relativistischer Effekt: magnetische Kraft von der Ordnung  $O(v^2/c^2)$ .
- Feldlinien nicht zuviel Realität beimessen (die  $\mathbf{E}$ -Linien im  $S'$  verschwinden in S).
- $\mathbf{F}_{\text{Lorentz}} = q \left[ \mathbf{E} + \frac{v}{c} \times \mathbf{B} \right]$

Elektronen in Cu:  $v \approx 10^{-2} \text{ cm sec}^{-1}$ ,  $c = 3 \cdot 10^{10} \text{ cm sec}^{-1} \rightarrow v^2/c^2 \approx 10^{-25}$ .

nur im Falle einer Abweichung von der Neutralität  $< 10^{-25}$  wichtig!

Bedeutung von  $\mathbf{E}$  und  $\mathbf{B}$ -Linien relativ.

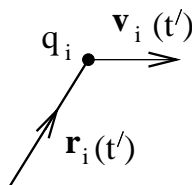
(Gravitation  $\leftrightarrow$  Coulomb Ww  $10^{-18}$ )

Früher glaubte man ein Medium als Träger des elektrischen Feldes bemühen zu müssen (Äther), dieses konnte jedoch niemals nachgewiesen werden.

**Konsequenz:**

1. Eine allgemeine elektromagnetische Kraft muß als Nahwirkungskraft verstanden werden (endliche Ausbreitungsgeschwindigkeit).
2. Die Beschreibung durch Kräfte ist kompliziert, sie wird ersetzt durch die Beschreibung mit Hilfe von zeit- und ortsabhängigen elektromagnetischen Feldern  $\mathbf{E}(\mathbf{r}, t)$ ,  $\mathbf{B}(\mathbf{r}, t)$ , die aus Feldgeschwindigkeiten bestimmt werden (existieren auch, wenn keine Probeladungen vorhanden sind).

In der **klassischen Elektrodynamik** gilt ferner das **Superpositionsprinzip** für Ladungen und Felder im Vakuum (in Medien können nichtlineare Effekte auftreten)



Wird von jeder Ladung  $q_i$  ( $i = 1, 2$ ) mit den Koordinaten  $\mathbf{r}_i(t')$ ,  $\mathbf{v}_i(t')$  am Ort  $\mathbf{r}$  zum späteren Zeitpunkt  $t$  ein elektromagnetisches Feld  $\mathbf{E}^{(i)}(\mathbf{r}, t)$ ,  $\mathbf{B}^{(i)}(\mathbf{r}, t)$  erzeugt, so produzieren beide Ladungen zusammen das Feld  $\mathbf{E} = \mathbf{E}_1 + \mathbf{E}_2$  und  $\mathbf{B} = \mathbf{B}_1 + \mathbf{B}_2$ . Wir haben dieses Prinzip schon in unserem Gedankenexperiment benutzt! In einem Medium (z.B. Festkörper oder Flüssigkeit) gilt das Hooksche Gesetz nur annähernd, nicht so in der **klassischen Elektrodynamik** (spricht gegen die Existenz eines Äthers mit inneren Eigenschaften).

Es gibt eine große Zahl von Phänomenen, die das Superpositionsprinzip belegen, selbst auf atomarer (Berechnung der Elektronenorbitale) und Kernebene (Berechnung der Coulombenergie des Kerns, die im wesentlichen die bei der Kernspaltung frei werdende Energie bestimmt) – obwohl die Feldstärken  $10^9$ - $10^{15}$  Volt  $\text{cm}^{-1}$  bzw.  $10^{19}$  Volt  $\text{cm}^{-1}$  (auf Oberfläche eines schweren Kerns) erreichen.

Es existiert aber eine **quantenmechanische Nichtlinearität** (elektromagnetisches Feld wird quantisiert), quantenmechanische Unschärferelation macht Verletzung von Energie- und Impulsrelation möglich ( $E^2 = c^2 p^2 + m^2 c^4$ ). Dies macht die Entstehung **virtueller** Teilchen möglich, die die Wechselwirkung transportieren, aber auch Prozesse wie

d.h. die Produktion eines virtuellen Elektron-Positron-Paares, das zur Polarisation des Vakuums führt.

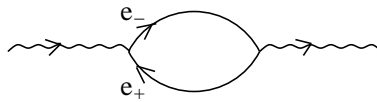
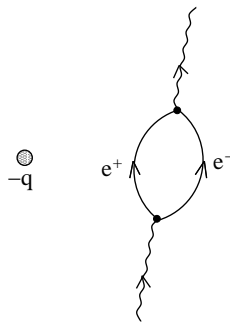


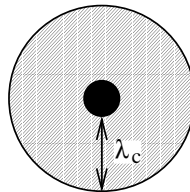
Abbildung 1.1:

→ tatsächlich gemessene Ladung (z.B. Elementarladung) ist eine effektive Ladung auf der Skala  $\lambda_{\text{Compton}} \sim \frac{\hbar}{mc} \approx 3.86 \cdot 10^{-11} \text{ cm}$ . Die “nackte” Ladung ist größer und divergiert sogar auf extrem kleinen Skalen (laut QED).

Wenn der Abstand zweier Ladungen kleiner als  $\lambda_C$  ist, dann ist die elektromagnetische Wechselwirkung größer als durch  $q_{\text{eff}} = q(\lambda_C)$  gegeben



$|q(\lambda < \lambda_C)| > q(\lambda_C) \rightarrow$  stärkere Bindung im Atom  $\rightarrow$  Verschiebung der atomaren Energieniveaus hin zu größerer Bindungsenergie (*Lamb-Shifts*)



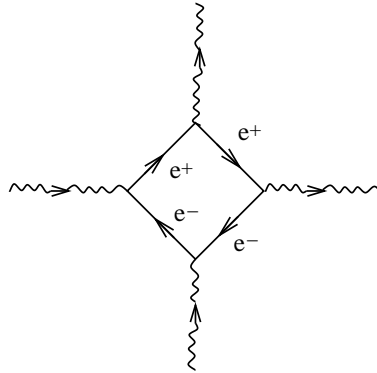
$$e^2(\lambda) = \frac{e_0^2}{1 - \frac{2}{3\pi} \frac{e_0^2}{\hbar c} \ln \frac{\lambda_e}{\lambda}}$$

Analog zu dem im Bild 1.1 dargestellten Prozess gibt es weitere (kompliziertere) Prozesse, z.B. die vier-Photonen-Streuung, welche obiges Ergebnis weiter modifiziert.

Streuamplitude  $\sim \left(\frac{e_0}{mc^2}\right)^4 \hbar c (E^2 - B^2)$ .

Qualitative Korrektur zum linearen Verhalten am Beispiel einer ruhenden Ladung  $q$  (es existieren auch lineare Korrekturen) im Koordinatenursprung

$$\begin{aligned} \mathbf{E}(\mathbf{r}) &\approx \frac{q}{r^2} \left( 1 - \frac{2}{45\pi} \frac{e_0^4 \hbar}{m^4 c^7} \frac{q^2}{r^4} \right) \\ &\approx \frac{q}{r^2} \left( 1 - \frac{2}{45\pi} \frac{\hbar c}{e_0^2} \frac{r^4}{r^4} \frac{q^2}{e_0^2} \right) \end{aligned}$$



(gilt nur, wenn die Korrektur klein ist, s. Landau & Lifschitz Bd. IV, S. 549)  
 $\hbar c/e_0^2 = 137 = 1/\alpha$ ,  $r_0 = e_0^2/(mc^2)$  klass. Elektronenradius  $r_0 \approx 2.8 \cdot 10^{-13}$  cm  
 ( $\alpha$  Feinstrukturkonstante)

- (i)  $\hbar \rightarrow 0$ : QM Effekt.
- (ii) Oberflächenfeld auf klassischem Elektron:  $q = e_0$ ,  $r = r_0$

$$\frac{e^2}{r_0} \approx 1.8 \times 10^{18} \text{ Volt/cm} \quad \text{Korrektur } O(1)$$

- (iii)  $r \approx \lambda_c = \frac{\hbar}{mc} \approx 3.86 \cdot 10^{-11}$  cm,  $q = e_0$

$$\frac{2}{45\pi} \frac{\hbar c}{e^2} \frac{e^8}{m^4 c^8} \frac{m^4 c^4}{\hbar^4} = 0.014 \left( \frac{e^2}{\hbar c} \right)^3 \sim 6 \cdot 10^{-9}$$

**Fazit:** Bei klassischen Feldstärken ( $E < 10^{18}$  Volt/cm) und Längenskalen ( $> 10^{-11}$  cm) kann man das *Superpositionsprinzip* als gültig annehmen.

→ Die Beschreibung eines Systems geladener Teilchen folgt mittels folgenden Gleichungssystems:

Beschleunigung eines Teilchens der Masse  $m$ , auf das die Kraft  $\mathbf{F}$  wirkt:

- (a)  $\frac{d}{dt}(m\mathbf{v}) = \mathbf{F} = \mathbf{F}_{\text{Lorentz}} + \mathbf{F}_{\text{Rest}}$ ,  $\mathbf{F}_{\text{Rest}}$  z.B. Gravitation. In relativistischer Mechanik:  $m = m_0(1 - v^2/c^2)^{-1/2}$ .

- (b)  $\mathbf{F}_{\text{Lorentz}} = \dot{q}(\mathbf{E} + \frac{\mathbf{v}}{c} \times \mathbf{B})$  **Lorentzkraft** (hier Erfahrungssatz).

(a), (b) sind durch einen Satz von Gleichungen zu ergänzen, die  $\mathbf{E}$  und  $\mathbf{B}$  aus der Lage und Geschwindigkeit der Teilchen und zu erfüllenden Randbedingungen zu ermitteln gestatten:

- (c) **Feldgleichungen:**  $\{q_i, \mathbf{v}_i\} \rightarrow \mathbf{E}, \mathbf{B}$  (Maxwellgleichungen).

(a), (c) folgen aus **Prinzip der minimalen Wirkung**, wir kommen später darauf zurück (Lagrangefunktion, die Teilchen und Felder beschreibt). In die-

sem Kapitel werden wir die Maxwellgleichungen aus einigen allgemeinen Eigenschaften von Vektorfeldern sowie experimentellen Erfahrungen rekonstruieren.

Feldtheorie auf verschiedenen Ebenen

- A) **klassisch-phänomenologisches Modell:** Materie durch klassisch-mechanische Punktteilchen oder Medien, elektrische Eigenschaften der Teilchen bewirken Wechselwirkung mit elektromagnetischem Feld.
- B) **Quantenelektrodynamik:** Modell A) wird quantisiert, enthält im klass. Grenzfall auch A).
- C) **einheitliche Quantenfeldtheorie:** Alle Teilchen und Felder, sowie deren Wechselwirkung als Lösungen einer einheitlichen nichtlinearen relativistischen Feldtheorie.

### 1.3 Beschreibung von Feldern

Im Ausdruck für Lorentzkraft  $\mathbf{F}(\mathbf{r}, t) = q(\mathbf{E}(\mathbf{r}, t) + \frac{\mathbf{v}}{c} \times \mathbf{B}(\mathbf{r}, t))$  sind  $\mathbf{E}$  und  $\mathbf{B}$  die von allen anderen (bewegten) Ladungen hervorgerufenen Felder.

Aus dem Superpositionsprinzip folgt als allgemeine Form der Feldgleichung

$$\hat{L}_E^i \mathbf{E} + \hat{L}_B^i \mathbf{B} = \hat{L}_q^i \{q\} + \hat{L}_{qv}^i \{q\mathbf{v}\}$$

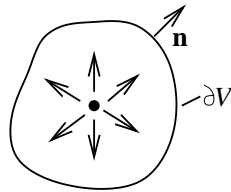
$i = 1, \dots, 6$ , je drei Komponenten von  $\mathbf{E}$ ,  $\mathbf{B}$ ,  $\hat{L}^i$  sind **lineare Operatoren**  $\rightarrow$  daher sind Operatoren auszuschließen, die auf  $\mathbf{E} \cdot \mathbf{B}$  wirken etc..

**Beispiel:** eine ruhende Ladung im Ursprung  $\mathbf{E}(\mathbf{r}, t) = \frac{q}{r^2} \frac{\mathbf{r}}{r}$ .

Man kann versuchen, aus den Transformationseigenschaften die  $\hat{L}^i$  weiter zu bestimmen. Zu allgemein. Statt dessen heuristischer Zugang: auf hinreichend kleinen Raum- und Zeitskalen ändern sich Felder langsam  $\rightarrow$  **suche Differentialgleichungen**. Zuvor jedoch betrachten wir einige **Eigenschaften von Vektorfeldern**. Betrachte Vektorfeld  $\mathbf{A}(\mathbf{r}, t)$  (steht für  $\mathbf{E}$ ,  $\mathbf{B}$ , Geschwindigkeitsfeld  $\mathbf{v}$ ).

**Quelle (oder Senke) eines Feldes: Fluß**  $\phi > 0$  ( $< 0$ ) (denke an Geschwindigkeitsfeld eines Flußes):

$$\phi_{\partial V} = \oiint_{\partial V} \mathbf{A} \cdot \mathbf{n} da$$

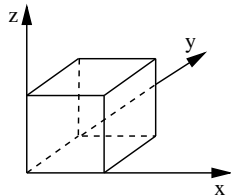


Volumen  $V$  mit  
Oberfläche  $\partial V$

$da$  Flächenelement,  $da = \mathbf{n} da$ ,  $\mathbf{n}$  Normaleneinheitsvektor, immer nach **außen** gerichtet.

$\phi$ : Mittelwert von  $\mathbf{A}\mathbf{n}$  auf Oberfläche  $\times$  Oberfläche.

Läßt man  $V$  sehr klein werden  $V \rightarrow \delta V$ , so erhält man die **Ergiebigkeit** oder **Divergenz** eines Vektorfelds im Raumpunkt  $\mathbf{r}$  (koordinaten-unabhängig).



$$\text{div } \mathbf{A}(\mathbf{r}) = \lim_{V \rightarrow 0} \frac{1}{V} \oint_{\partial V} \mathbf{A}(\mathbf{r}) \cdot \mathbf{n} da$$

Wählt man  $\Delta V = \Delta x \Delta y \Delta z \rightarrow$

$$\begin{aligned} \text{div } \mathbf{A}(\mathbf{r}) &= \frac{\partial}{\partial x} A_x + \frac{\partial}{\partial y} A_y + \frac{\partial}{\partial z} A_z = \partial^i A_i = \partial^x A_x + \partial^y A_y + \partial^z A_z \\ &= \nabla \cdot \mathbf{A}(\mathbf{r}) \end{aligned}$$

$\mathbf{r} = (x, y, z)$ , Nabla-Operator  $\nabla = (\partial^x, \partial^y, \partial^z) = \mathbf{e}_i \partial^i$ ,  $i = 1, 2, 3$ , Einsteinsummen-Konvention.

Divergenz ist linear:

$$\nabla(\mathbf{A}_1 + \mathbf{A}_2) = \nabla \mathbf{A}_1 + \nabla \mathbf{A}_2$$

$$\nabla(\alpha \mathbf{A}) = \alpha \nabla \mathbf{A}$$

$\alpha$  konstant.

**Satz von Gauß:**

$$\oint_{\partial V} \mathbf{A}\mathbf{n} da = \int_V (\nabla \cdot \mathbf{A}) dV$$

Beweis durch Summation über alle Subvolumina  $\Delta V$  von  $V$

**Gradient eines Skalarfeldes:**  $\varphi(\mathbf{r}) = \varphi(x, y, z)$ . Taylorentwicklung:

$$\begin{aligned} \text{grad } \varphi &= (\partial^z \varphi(\mathbf{r}))_{\mathbf{r}=\mathbf{r}_1} (z - z_1) + \dots \\ &= \varphi(\mathbf{r}_1) + (\mathbf{r} - \mathbf{r}_1) [\nabla \varphi(\mathbf{r})]_{\mathbf{r}=\mathbf{r}_1} + \dots \end{aligned}$$

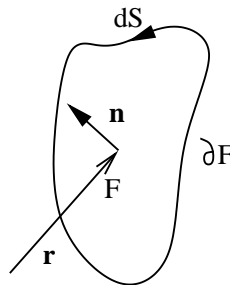
$\nabla \varphi$  steht senkrecht zur Fläche  $\varphi = \text{const}$ , in Richtung des steilsten Anstiegs von  $\varphi$

$$\varphi(\mathbf{r}_2) - \varphi(\mathbf{r}_1) = \int_{\mathbf{r}_1}^{\mathbf{r}_2} (\nabla \varphi(\mathbf{r})) d\mathbf{r}$$

entlang **jeden** Weges.  $\delta \varphi = (\nabla \varphi) \delta \mathbf{r}$ ,  $\mathbf{r}_2 - \mathbf{r}_1 = \delta \mathbf{r}$  infinitesimal,  $\delta \varphi = 0$  wenn  $\delta \mathbf{r}$  in Fläche  $\rightarrow \nabla \varphi$  senkrecht auf  $\rightarrow \varphi = \text{const}$ .

Vektorfeld kann auch Wirbel haben (denke wieder an Flüssigkeit).

**Wirbelstärke** oder **Zirkulation**  $\Gamma = \oint_{\partial F} \mathbf{A}(\mathbf{r}) ds$



Wenn Fläche  $F \rightarrow \Delta F$  gegen Null geht, erhält man die Rotation (auch lineare Operation)

$$\mathbf{n} \cdot \text{rot } \mathbf{A}(\mathbf{r}) = \lim_{F \rightarrow 0} \frac{1}{F} \oint_{\partial F} \mathbf{A}(\mathbf{r}) ds$$

$$\text{rot } \mathbf{A}(\mathbf{r}) = \lim_{V \rightarrow 0} \frac{1}{V} \iiint_{\partial V} \mathbf{n} \times \mathbf{A} da$$

$$(\text{rot } \mathbf{A})_z = \frac{1}{\Delta x \Delta y \Delta z} \left\{ n_x (A_y(\Delta x) - A_y(0)) \Delta y \Delta z - n_y (A_x(\Delta y) - A_x(0)) \Delta x \Delta z \right\}$$

Kartesische Koordinaten:  $(\text{rot } \mathbf{A})_i = (\nabla \times \mathbf{A})_i = \varepsilon_{ijk} \partial^j A_k$

$\varepsilon_{ijk}$  total antisymmetrischer Einheitstensor  $\varepsilon_{123} = 1$

$$\varepsilon_{ijk} \varepsilon_{ilm} = \delta_{jl} \delta_{km} - \delta_{jm} \delta_{kl}$$

Stokescher Satz:  $\oint_{\partial F} \mathbf{A}(\mathbf{r}) ds = \int_F (\nabla \times \mathbf{A}) da$ .

Laplace-Operator:  $\text{div grad } \varphi = \Delta \varphi$ .

Jedes quellenfreie Feld  $\nabla \cdot \mathbf{A}_z = 0$  läßt sich als  $\mathbf{A}_z = \nabla \times \boldsymbol{\beta}$  und jedes wirbelfreie Feld  $\nabla \times \mathbf{A}_l = 0$  läßt sich als  $\mathbf{A}_l = \nabla \varphi$  darstellen.

**Fundamentalsatz der Vektoranalysis:** (Helmholtz 1859, Stokes 1849)

$V$  sei ein **endliches Gebiet** mit einer einfach zusammenhängenden Berandung  $\partial V$ .  
Dann ist das Vektorfeld  $\mathbf{A}(\mathbf{r})$  durch die Gleichungen

$$\begin{aligned}\nabla \times \mathbf{A}(\mathbf{r}) &= \boldsymbol{\omega}(\mathbf{r}) & \mathbf{r} \in V \\ \nabla \mathbf{A}(\mathbf{r}) &= g(\mathbf{r}) \\ \mathbf{n} \cdot \mathbf{A}(\mathbf{r}) &= f(\mathbf{r}) & \mathbf{r} \in \partial V\end{aligned}$$

( $\mathbf{n}$  Normale auf  $\partial V$ ) eindeutig festgelegt, wobei  $\boldsymbol{\omega}(\mathbf{r})$ ,  $g(\mathbf{r})$  und deren Ableitungen in  $V$ ,  $f(\mathbf{r})$  auf  $\partial V$  stetig seien ( $\nabla \boldsymbol{\omega} = 0$ ,  $\int_V g(\mathbf{r}) dV = \oint_{\partial V} f(\mathbf{r}) da$  sind Nebenbedingungen). Im Falle eines **unendlichen Gebiets** ist  $\mathbf{A}(\mathbf{r})$  durch  $\boldsymbol{\omega}(\mathbf{r})$ ,  $g(\mathbf{r})$  eindeutig festgelegt, wenn  $\mathbf{A}(\mathbf{r})$  mindestens wie  $1/r^2$  für  $r \rightarrow \infty$  verschwindet.

$\mathbf{A}(\mathbf{r})$  ist dann zerlegbar in  $\mathbf{A}(\mathbf{r}) = \mathbf{A}_l(\mathbf{r}) + \mathbf{A}_t(\mathbf{r})$  mit  $\nabla \times \mathbf{A}_l = \nabla \mathbf{A}_t = 0$  (eindeutige Zerlegung bei Randbedingungen im Unendlichen).

**Beweis der Eindeutigkeit:** Nehme an, es gäbe zweite Lösung  $\mathbf{A}_1$ ,  $\mathbf{A}_2$  mit

$$\begin{aligned}\operatorname{div} \mathbf{A}_i &= g(\mathbf{r}) \\ \operatorname{rot} \mathbf{A}_i &= \boldsymbol{\omega}(\mathbf{r})\end{aligned}$$

$i = 1, 2$ . Sei  $\mathbf{a}(\mathbf{r}) = \mathbf{A}_1(\mathbf{r}) - \mathbf{A}_2(\mathbf{r}) \neq 0$ ;  $\mathbf{a}(\mathbf{r}) = O(\frac{1}{r^2})$  für  $r \rightarrow \infty$ , bzw.  $\mathbf{n} \mathbf{a} = 0$  auf dem Rand, dann

$$\begin{aligned}\operatorname{div} \mathbf{a}(\mathbf{r}) &= 0, \quad \operatorname{rot} \mathbf{a}(\mathbf{r}) = 0 \\ \rightarrow \mathbf{a}(\mathbf{r}) &= \nabla \varphi, \quad \varphi = O(\frac{1}{r}) \text{ für } r \rightarrow \infty\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}\operatorname{rot} \nabla \varphi &= \varepsilon_{ijk} \partial_j \partial_k \varphi = 0 \\ \operatorname{div} = \nabla \cdot \nabla \varphi &= \Delta \varphi = 0 \quad (\text{Laplace-Gleichung})\end{aligned}$$

Benutze jetzt 1. Greensche Formel (Beweis aus Gaußschen Satz als Übung)

$$\int_V [(\nabla \varphi)(\nabla \psi) + \varphi \Delta \psi] dV = \oint_{\partial V} \varphi (\mathbf{n} \cdot \nabla \psi) da$$

mit  $\varphi = \psi$ :

$$\int_V [(\nabla \varphi)^2 + 0] dV = \oint_{\partial V} \varphi (\mathbf{n} \cdot \nabla \varphi) da \approx O(\frac{1}{r^3} r^2 = \frac{1}{r})$$

i.e.

$$\int_V \mathbf{a}^2(\mathbf{r}) dV = 0 \rightarrow \mathbf{a}^2 = 0,$$

also  $\mathbf{a} = 0$ . Widerspruch.

**2. Nebenprodukte:**

1. Eine Lösung  $\varphi$  der Laplace-Gleichung, die sich wie  $O(\frac{1}{r})$  für  $r \rightarrow \infty$  verhält, ist identisch Null.

Beweis: da  $\nabla\varphi = 0$  überall  $\rightarrow \varphi = \text{const}$ , aber  $\varphi = O(\frac{1}{r}) \rightarrow \varphi \equiv 0$ .

2. **Dirichletsches** Randwertproblem: sei  $\varphi$  auf geschlossener Fläche  $\partial V$  vorgegeben.  $\Delta\varphi \equiv 0$  ist dann eindeutig lösbar.

Beweis: Seien  $\varphi_1, \varphi_2$  Lösung. Auf  $\phi = \varphi_1 - \varphi_2$  Greensche Formel anwenden:  
 $\rightarrow \int_V (\nabla\phi)^2 dV = 0 \rightarrow \nabla\phi = 0 \rightarrow \phi = \text{const} = 0$ , da  $\phi = 0$  auf  $\partial V$ .

Da wir die linearen Beziehungen zwischen den Ladungen und ihren Geschwindigkeiten und  $\mathbf{E}$  und  $\mathbf{B}$  aus Differentialgleichungen bestimmen wollen, ist es zweckmäßig, auch bei den Ladungen zu Feldern überzugehen.

Wir betrachten eines Systems von  $N$  **Punktladungen**  $q_i$  an den Orten  $\mathbf{r}_i(t)$  (das sind die elementaren Teilchen unserer Theorie). (Die Einführung punktförmiger Teilchen ist in der klassischen relativistischen Theorie zwingend: wäre die Ladung ausgedehnt, aber kein innerer Freiheitsgrad vorhanden, dann führt deren Drehung zum Widerspruch mit der Relativitätstheorie.) Sei die Gesamtladung im Volumen  $V$   $Q$ , so gilt

$$Q = \sum_{i \in V} q_i = \int_V \rho(\mathbf{r}) dV$$

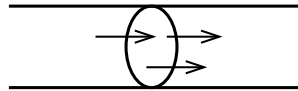
Mikroskopische **Ladungsdichte**:

$$\rho_{\text{mikr}}(\mathbf{r}, t) = \sum_{i=1}^N q_i \delta^{(3)}(\mathbf{r} - \mathbf{r}_i(t)),$$

wobei  $\delta^{(3)}(\mathbf{r} - \mathbf{r}_i) = \delta(x - x_i)\delta(y - y_i)\delta(z - z_i)$  ist

$$\int_V dV \delta^{(3)}(\mathbf{r} - \mathbf{r}_i) = 1$$

Analog ist die mikroskopische **Stromdichte** einzuführen



$$\mathbf{j}_{\text{mikr}}(\mathbf{r}, t) = \sum_{i=1}^N q_i \mathbf{v}_i \delta(\mathbf{r} - \mathbf{r}(t))$$

$$\mathbf{j}(\mathbf{r}, t) = \frac{\text{Ladung}}{\text{Zeit} \cdot \text{Fläche} \perp \text{Stromrichtung}}.$$

Gesamtstrom

$$I = \int_F \mathbf{j} \cdot \mathbf{n} da$$

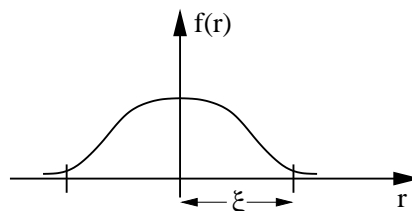
Ist die Teilchendichte groß, so daß nur das Verhalten auf Skalen sehr viel größer als der Teilchenabstand interessiert, so kann man eine **vergrößerte Ladungsdichte**  $\rho(\mathbf{r}, t)$  (coarse graining)

$$\rho(\mathbf{r}, t) = \int dV' f(\mathbf{r} - \mathbf{r}') \rho_{\text{mikr}}(\mathbf{r}', t)$$

und **Stromdichte**

$$\mathbf{j}(\mathbf{r}, t) = \int dV' f(\mathbf{r} - \mathbf{r}') \mathbf{j}_{\text{mikr}}(\mathbf{r}', t), \quad \int dV f(\mathbf{r}) = 1$$

Spezialfälle:  $f(\mathbf{r}) = \delta^{(3)}(\mathbf{r})$ , d.h. mikroskopischer Fall ist enthalten, oder  $f(\mathbf{r}) = (\pi\xi^2)^{-3/2} \exp(-r^2/\xi^2)$  (normiert).



Ladungserhaltung

$$\begin{aligned} \rho(\mathbf{r}, t) &= \sum_{i=1}^N q_i f(\mathbf{r} - \mathbf{r}_i(t)) \\ \mathbf{j}(\mathbf{r}, t) &= \sum_{i=1}^N q_i \mathbf{v}_i f(\mathbf{r} - \mathbf{r}_i(t)) \\ \frac{\partial}{\partial t} \rho(\mathbf{r}, t) &= \sum_{i=1}^N q_i \left[ (-\nabla) f(\mathbf{r} - \mathbf{r}_i(t)) \right] \frac{\partial}{\partial t} \mathbf{r}_i(t) \\ &= - \sum_{i=1}^N q_i \mathbf{v}_i(t) \nabla f(\mathbf{r} - \mathbf{r}_i(t)) = -\nabla \mathbf{j}(\mathbf{r}, t) \end{aligned}$$

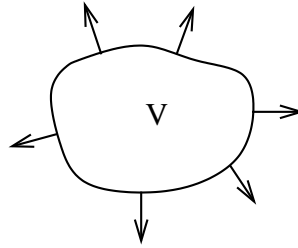
d.h.

$$\boxed{\frac{\partial \rho}{\partial t} + \nabla \mathbf{j}(\mathbf{r}, t) = 0}$$

Ladungserhaltung gilt immer, eines der fundamentalen Gesetzen der Physik! In integraler Form  $\int_V dV$  + Gaußscher Satz

$$\frac{\partial Q}{\partial t} = - \int_{\partial V} \mathbf{j}(\mathbf{r}, t) \mathbf{n} da$$

dieses ist größer als Null, wenn  $\mathbf{j}$  nach außen zeigt, d.h. wenn Ladung abfließt. Das betrachtete Volumen bleibt fest!



## 1.4 Die Maxwell'schen Gleichungen

Wir kommen nun zur Aufstellung der Feldgleichungen.

Folgende Eigenschaften sind bekannt:

1. sie müssen linear sein (Superposition);
2. sie müssen die Ladung erhalten;
3.  $\mathbf{E}(\mathbf{r}, t)$  und  $\mathbf{B}(\mathbf{r}, t)$  sind durch ihre Quelle und Wirbel bestimmt.

Maxwells Antwort

(I)	$\operatorname{div} \mathbf{E}(\mathbf{r}, t) =$	?	$= 4\pi\rho(\mathbf{r}, t)$	Ladungen sind Quellen des Feldes
(II)	$\operatorname{rot} \mathbf{E}(\mathbf{r}, t) =$		$= -\frac{1}{c} \frac{\partial}{\partial t} \mathbf{B}(\mathbf{r}, t)$	Induktionsgesetz
(III)	$\operatorname{div} \mathbf{B}(\mathbf{r}, t) =$		$= 0$	es gibt keine magn. Ladungen
(IV)	$\operatorname{rot} \mathbf{B}(\mathbf{r}, t) =$		$= \frac{4\pi}{c} \mathbf{j}(\mathbf{r}, t) + \frac{1}{c} \frac{\partial}{\partial t} \mathbf{E}(\mathbf{r}, t)$	Maxwell's Verschiebungsstrom

Maxwellsche Gleichungen  $\sim$  Axiome der Elektrodynamik (lassen sich aus dem Prinzip der minimalen Wirkung ableiten, ebenso die Lorentzkraftgleichung, dann treten dieses Prinzip sowie die Form der Lagrange-Dichte als Axiom auf). Als physikalische Axiome sind die Maxwell-Gleichungen an die physikalische Realität gebunden  $\rightarrow$  müssen aber immer wieder an physikalischer Realität getestet werden. Diese Tests sind heute abgeschlossen – die Maxwell-Gleichungen gelten für alle makroskopischen Phänomene.

- 1.) Linearität erfüllt.
- 2.) Ladungserhaltung:

$$\frac{1}{c} \frac{\partial}{\partial t} (\text{I}) + \nabla \cdot (\text{IV}) = \frac{1}{c} \frac{\partial}{\partial t} \nabla \cdot \mathbf{E} + \nabla \cdot (\nabla \times \mathbf{B}) = \frac{4\pi}{c} \left[ \frac{\partial}{\partial t} \rho + \nabla \cdot \mathbf{j} \right] + \frac{1}{c} \nabla \cdot \frac{\partial}{\partial t} \mathbf{E}$$

$$\varepsilon_{ijk} \partial^i \partial^j B_k = 0 \rightarrow \frac{\partial}{\partial t} \rho + \nabla \cdot \mathbf{j} = 0 \quad \text{q.e.d}$$

d.h. wir können mit willkürlichen Funktionen  $\rho(\mathbf{r}, t)$ ,  $\mathbf{j}(\mathbf{r}, t)$  die Maxwell-Gleichungen betrachten, d.h. wir sind **nicht** an ein Materiemodell gebunden.

Wir können den Maxwell'schen Gleichungen noch eine etwas andere Form geben.

Aus der Vektoranalysis wissen wir, daß sich **jedes** quellenfreie Feld ( $\operatorname{div} \mathbf{B} = 0$ )

$\mathbf{B} = \operatorname{rot} \mathbf{A}$  schreiben läßt.

$$(III) + (II) \quad \operatorname{rot} \mathbf{E} + \frac{1}{c} \frac{\partial}{\partial t} \mathbf{B} = \operatorname{rot} \left( \mathbf{E} + \frac{1}{c} \frac{\partial}{\partial t} \mathbf{A} \right) = 0$$

$\mathbf{E} + \frac{1}{c} \frac{\partial}{\partial t} \mathbf{A} = -\nabla \phi$ . Wir benutzen ferner, daß sich **jedes** wirbelfreie Feld als Gradient eines skalaren Potentials  $\phi$  schreiben läßt

$$\mathbf{E} + \frac{1}{c} \frac{\partial}{\partial t} \mathbf{A} = -\nabla \phi$$

$\mathbf{A}(\mathbf{r}, t)$  ist Vektorpotential,  $\phi(\mathbf{r}, t)$  ist skalares Potential. Bei Vorgabe von  $\mathbf{E}$  und  $\mathbf{B}$  sind  $\phi$  und  $\mathbf{A}$  nur bis auf eine lokale **Eichtransformation** bestimmt ( $\mathbf{B}' = \nabla \times \mathbf{A}' = \nabla \times \mathbf{A} + \nabla \times (\nabla \chi) = \nabla \times \mathbf{A} = \mathbf{B}$ ,  $\mathbf{E}' = \mathbf{E} + \frac{1}{c} \frac{\partial}{\partial t} \nabla \chi - \frac{1}{c} \frac{\partial}{\partial t} \nabla \chi = \mathbf{E}$ )

$$\begin{aligned} \phi &\rightarrow \phi' = \phi - \frac{1}{c} \frac{\partial}{\partial t} \chi \\ \mathbf{A} &\rightarrow \mathbf{A}' = \mathbf{A} + \nabla \chi \end{aligned}$$

Mit dem Übergang zu  $\mathbf{A}$  und  $\phi$  sind die homogenen Maxwellgleichungen **automatisch** erfüllt. Aus den inhomogenen Gleichungen (I) und (IV) folgt:

$$(I) \quad \nabla \cdot \mathbf{E} = -\nabla \cdot \frac{1}{c} \frac{\partial}{\partial t} \mathbf{A} - \Delta \phi + \left( \frac{1}{c^2} \frac{\partial^2}{\partial t^2} - \frac{1}{c^2} \frac{\partial^2}{\partial t^2} \right) \phi = 4\pi \rho$$

d'Alembert Operator (Wellenoperator)  $\square = \Delta - \frac{1}{c^2} \frac{\partial^2}{\partial t^2} = \partial_x^2 + \partial_y^2 + \partial_z^2 - \frac{1}{c^2} \frac{\partial^2}{\partial t^2}$

$$\Lambda := \frac{1}{c} \frac{\partial}{\partial t} \phi + \nabla \cdot \mathbf{A}$$

$$(IV) \quad \nabla \times (\nabla \times \mathbf{A}) = \frac{4\pi}{c} \mathbf{j} + \frac{1}{c} \frac{\partial}{\partial t} \left( -\frac{1}{c} \frac{\partial}{\partial t} \mathbf{A} - \nabla \phi \right)$$

$$\begin{aligned} (I) \quad \square \phi &= -4\pi \rho(\mathbf{r}, t) - \frac{1}{c} \frac{\partial}{\partial t} \Lambda & (II) \quad \mathbf{E} &= -\nabla \phi - \frac{1}{c} \frac{\partial}{\partial t} \mathbf{A} \\ (IV) \quad \square \mathbf{A} &= -\frac{4\pi}{c} \mathbf{j}(\mathbf{r}, t) + \nabla \Lambda & (III) \quad \mathbf{B} &= \nabla \times \mathbf{A} \end{aligned}$$

Bei Eichtransformationen geht

$$\Lambda \rightarrow \Lambda' = \frac{1}{c} \frac{\partial}{\partial t} \phi' + \nabla \cdot \mathbf{A}' = \Lambda + \square \chi$$

über.

Zur Entkopplung der Gleichungen (I) und (II) benutzen wir eine spezielle Eichung  $\Lambda' = 0$ , die sogenannte **Lorentz-Eichung**. In dieser gilt

$$\begin{aligned} \square\phi' &= -4\pi\rho(\mathbf{r}, t) \\ \square\mathbf{A}' &= -\frac{4\pi}{c}\mathbf{j}(\mathbf{r}, t) \end{aligned} \tag{1.1}$$

Damit sind aber  $\mathbf{A}'$  und  $\phi'$  noch nicht eindeutig festgelegt. Jede weitere Eichtransformation mit  $\square\chi' = 0$  erfüllt die Lorentzgleichung.

Lösung von (1.1) für Ladungen und Ströme im Vakuum durch Erraten (retardierte Lösung):

$$\begin{aligned} \phi'(\mathbf{r}, t) &= \int d^3r' \frac{1}{|\mathbf{r} - \mathbf{r}'|} \rho(\mathbf{r}', t - \frac{|\mathbf{r} - \mathbf{r}'|}{c}) \\ \mathbf{A}'(\mathbf{r}, t) &= \frac{1}{c} \int d^3r' \frac{1}{|\mathbf{r} - \mathbf{r}'|} \mathbf{j}(\mathbf{r}', t - \frac{|\mathbf{r} - \mathbf{r}'|}{c}) \end{aligned}$$

Lorentzbedingung ist hierdurch auch erfüllt.

→  $\mathbf{E}, \mathbf{B}$  als Funktionen von  $\rho$  und  $\mathbf{j}$  und damit  $\mathbf{r}_i, \mathbf{v}_i$  → effektiv existiert nur mechanisches Problem.

Es gibt ein Problem, wenn wir diese Lösung in die Gleichung

$$\frac{d}{dt} m_i \mathbf{v}_i = \mathbf{F}_{L,i}$$

einsetzen, wenn alle Punkte  $i$  zu **einem ausgedehnten starren Körper**, z.B. einer geladenen Kugel gehören  $\forall \mathbf{v}_i = \mathbf{v} = \dot{\mathbf{r}}(t)$ ,  $\sum_i m_i = M$

$$M \frac{d^2}{dt^2} \mathbf{r}(t) = \sum_i \mathbf{F}_{L,i}.$$

Die rechte Seite enthält dann Selbstkräfte, die  $\ddot{\mathbf{r}}$  enthalten → Akausalität.

Eine andere Eichung ist die **Coulomb-Eichung**  $\nabla \cdot \mathbf{A}(\mathbf{r}, t) = 0$ , die auf die Gleichungen

$$\begin{aligned} \Delta\phi &= -4\pi\rho(\mathbf{r}, t) \\ \square\mathbf{A} &= -\frac{4\pi}{c}\mathbf{j}_t(\mathbf{r}, t) \end{aligned}$$

mit  $\mathbf{j} = \mathbf{j}_t + \mathbf{j}_l$ ,  $\nabla \cdot \mathbf{j}_t = \nabla \times \mathbf{j}_l = 0$  führt. Wenn diese eine Eichtransformation ist, dann muß sie

$$\Delta \frac{\partial}{\partial t} \chi = 0, \quad (\Delta - \frac{1}{c^2} \frac{\partial^2}{\partial t^2}) \nabla \chi = 0$$

erfüllen.

Schliesslich sei die Landau-Eichung  $\phi \equiv 0$  erwähnt.

In der **klassischen** Physik haben wegen der Willkür der Eichung die Potentiale keine unmittelbare physikalische Bedeutung. In der **Quantenmechanik** ist das anders: bei einer Eichtransformation verändert sich die Phase der Wellenfunktion, mehr noch: aus Invarianzforderung der Schrödingergleichung unter lokaler Phasentransformation  $\psi(\mathbf{r}, t) \rightarrow \psi(\mathbf{r}, t) \exp(-iq\chi(\mathbf{r}, t))$  schlußfolgert man die Existenz eines Eichfelds  $(\mathbf{A}(\mathbf{r}, t), \phi(\mathbf{r}, t)) \rightarrow$  Aharonov–Bohm–Effekt.

**Beispiel 1: Lagrangefunktion eines geladenen Teilchens im Feld (nicht-relativistisch)**

*Behauptung:* Die Lagrangefunktion sei:

$$L = \frac{m}{2} \mathbf{v}^2 + \frac{q}{c} \mathbf{A} \mathbf{v} - q\phi - U_{\text{rest}}(\mathbf{r}),$$

die Wirkung ist dann

$$S = \int_0^t dt L(\mathbf{r}, \mathbf{v}, t).$$

Aus  $\text{Min}(S)$  folgen die Euler–Lagrange–Gleichungen

$$\frac{d}{dt} \frac{\partial L}{\partial \mathbf{v}} - \frac{\partial L}{\partial \mathbf{r}} = 0.$$

$$\begin{aligned} \frac{\partial L}{\partial \mathbf{r}} &= \nabla L = \frac{q}{c} \nabla(\mathbf{A} \mathbf{v}) - q \nabla \phi - \nabla U_{\text{rest}} \\ \nabla(\mathbf{A} \mathbf{v}) &= \underbrace{(\mathbf{A} \nabla) \mathbf{v}}_0 + (\mathbf{v} \nabla) \mathbf{A} + \underbrace{\mathbf{A} \times (\nabla \times \mathbf{v})}_0 + \mathbf{v} \times (\nabla \times \mathbf{A}) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \frac{\partial L}{\partial \mathbf{r}} &= \frac{q}{c} (\mathbf{v} \nabla) \mathbf{A} + \frac{q}{c} \mathbf{v} \times (\nabla \times \mathbf{A}) - q \nabla \phi - \nabla U_{\text{rest}} \\ \frac{d}{dt} \frac{\partial L}{\partial \mathbf{v}} &= \frac{d}{dt} \left( m \mathbf{v} + \frac{q}{c} \mathbf{A} \right) = m \dot{\mathbf{v}} + \frac{q}{c} \left( \frac{\partial \mathbf{A}}{\partial t} + (\partial^i \mathbf{A}) v_i \right) \end{aligned}$$

Da  $\frac{d\mathbf{A}}{dt} = \frac{\partial}{\partial t} dt + (d\mathbf{r} \cdot \nabla) \mathbf{A}$  ( $\frac{d}{dt} = \frac{\partial}{\partial t} + \mathbf{v} \nabla$  konvektive Ableitung)  $d\mathbf{A}$  vollständiges Differential.

$$\frac{d}{dt} (m \mathbf{v}) = -\frac{q}{c} \dot{\mathbf{A}} + \frac{q}{c} \mathbf{v} \times (\nabla \times \mathbf{A}) - q \nabla \phi = q \left( \mathbf{E} + \frac{1}{c} \mathbf{v} \times \mathbf{B} \right) + \mathbf{F}_{\text{rest}}$$

**Fazit:** in die Lagrange–Funktion gehen  $\phi$  und  $\mathbf{A}$  ein, eine Ersetzung durch  $\mathbf{B}$  und  $\mathbf{E}$  wäre umständlich.

Ein **homogenes B–Feld** hat ein Vektorpotential  $\mathbf{A} = (1/2) \mathbf{B} \times \mathbf{r}$ . Für ein **zylindersymmetrisches B–Feld**,  $\mathbf{B} = (0, 0, B_z)$ ,  $B_z = B$  für  $\rho < R$  und  $B_z = 0$  für  $\rho \geq R$  läßt sich das Vektorpotential in Zylinderkoordinaten  $\mathbf{A} = (A_\rho, A_\varphi, A_z) = (0, A, 0)$ ,  $A = (1/2) B \rho$  für  $\rho < R$  und  $A(\rho) = (1/2) B R^2 / \rho$ ,  $\rho \geq R$ , schreiben ( $\nabla \mathbf{A} = (1/\rho) \partial A / \partial \varphi = 0$ ).

**Beweis:**

$$\oint d\mathbf{r} \mathbf{A} = 2\pi \rho A(\rho) = B\pi \begin{cases} \rho^2, & \rho < R \\ R^2, & \rho \geq R \end{cases}$$

Ergänzung zu Beispiel 2:

Der Zusammenhang zwischen dem **Propagator**  $K$  und der **Wellenfunktion**  $\psi$  in drei Dimensionen ist

$$\psi(\mathbf{r}, t) = \iiint_{-\infty}^{+\infty} dx_1 dy_1 dz_1 K(\mathbf{r}, t; \mathbf{r}_1, t_1) \psi(\mathbf{r}_1, t_1)$$

Aus der Pfadintegraldarstellung für  $K$  läßt sich zeigen, daß  $\psi(\mathbf{r}, t)$  der Schrödingergleichung

$$\left[ \frac{1}{2m} \left( \frac{\hbar}{i} \nabla - \frac{q}{c} \mathbf{A} \right)^2 + q\phi + U_{\text{rest}}(\mathbf{r}, t) \right] \psi(\mathbf{r}, t) = i\hbar \frac{\partial \psi}{\partial t}$$

genügt. Eine Eichtransformation für die Potentiale

$$\begin{aligned} \mathbf{A} &\rightarrow \mathbf{A} + \nabla \chi(\mathbf{r}, t) \\ \phi &\rightarrow \phi - \frac{1}{c} \frac{\partial}{\partial t} \chi(\mathbf{r}, t) \end{aligned}$$

läßt die Schrödingergleichung invariant, wenn man gleichzeitig die Wellenfunktion transformiert (Übungsaufgabe):

$$\psi \rightarrow \psi e^{iq\chi(\mathbf{r}, t)/\hbar c}.$$

Eichinvarianz als dynamisches Prinzip: Kennt man die Schrödingergleichung für ein freies Teilchen (keine Felder), dann kann man aus der Forderung der Invarianz der Schrödingergleichung unter einer lokalen Phasentransformation der Wellenfunktion die Existenz der Felder  $\mathbf{A}$  und  $\phi$  und die Kopplung zu ihnen schließen ( $\frac{\hbar}{i} \nabla \rightarrow \frac{\hbar}{i} \nabla - \frac{q}{c} \mathbf{A} = \frac{\hbar}{i} \mathbf{D}$ ) (s. z.B. Ebert: "Eichtheorien" VCH).

## 1.5 Illustration der Maxwell-Gleichungen

### 1.5.1 div $\mathbf{E}(\mathbf{r}, t) = 4\pi\rho(\mathbf{r}, t)$

oder  $\oint_{\partial V} \mathbf{E} \mathbf{n} da = 4\pi Q$ ,  $Q = \int_V dV \rho(\mathbf{r}, t)$

Für ruhende Ladungen  $q_i$ :  $\rho(\mathbf{r}, t) = \sum_{i=1}^N q_i \delta(\mathbf{r} - \mathbf{r}_i)$

$$\mathbf{E}(\mathbf{r}) = \sum_i q_i \frac{\mathbf{r} - \mathbf{r}_i}{|\mathbf{r} - \mathbf{r}_i|^3} = \int dV' \rho(\mathbf{r}') \frac{\mathbf{r} - \mathbf{r}'}{|\mathbf{r} - \mathbf{r}'|^3}$$

$$\rightarrow \nabla \mathbf{E}(\mathbf{r}) = \int dV' \rho(\mathbf{r}') \nabla \frac{\mathbf{r} - \mathbf{r}'}{|\mathbf{r} - \mathbf{r}'|^3}$$

$$\nabla \frac{\mathbf{r} - \mathbf{r}'}{|\mathbf{r} - \mathbf{r}'|^3} = \frac{\partial}{\partial x} \frac{x - x'}{|\mathbf{r} - \mathbf{r}'|^3} + \frac{\partial}{\partial y} \frac{y - y'}{|\mathbf{r} - \mathbf{r}'|^3} + \frac{\partial}{\partial z} \frac{z - z'}{|\mathbf{r} - \mathbf{r}'|^3} = \frac{3}{|\mathbf{r} - \mathbf{r}'|^3} - \frac{3}{|\mathbf{r} - \mathbf{r}'|^3} = 0$$

da

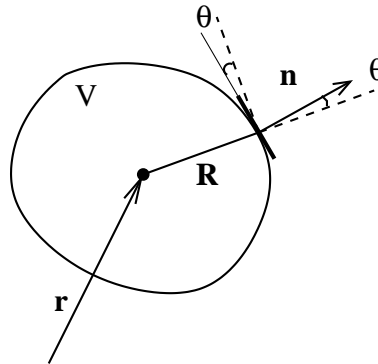
$$\frac{\partial}{\partial x} \frac{x - x'}{|\mathbf{r} - \mathbf{r}'|^3} = \frac{1}{|\mathbf{r} - \mathbf{r}'|^3} - (x - x') \frac{1}{|\mathbf{r} - \mathbf{r}'|^5} \frac{3}{2} 2(x - x') = \frac{1}{|\mathbf{r} - \mathbf{r}'|^3} \left( 1 - 3 \frac{(x - x')^2}{|\mathbf{r} - \mathbf{r}'|^2} \right)$$

für  $\mathbf{r} \neq \mathbf{r}'$ .

$\mathbf{r} = \mathbf{r}'$ ?

$$\int_V dV' (-\nabla') \left( \frac{\mathbf{r} - \mathbf{r}'}{|\mathbf{r} - \mathbf{r}'|^3} \right) \stackrel{\text{Gauß}}{=} \oint_{\partial V} -\frac{(\mathbf{r} - \mathbf{r}')\mathbf{n}}{|\mathbf{r} - \mathbf{r}'|^3} da' = \oint_{\partial V} \frac{\mathbf{R}\mathbf{n}}{R^3} da = 4\pi$$

$\mathbf{R} = \mathbf{r}' - \mathbf{r}$  unabhängig von  $V$ .



$$(da)\mathbf{R} \cdot \mathbf{n} = R \cos \theta da = R \cdot R^2 d\Omega$$

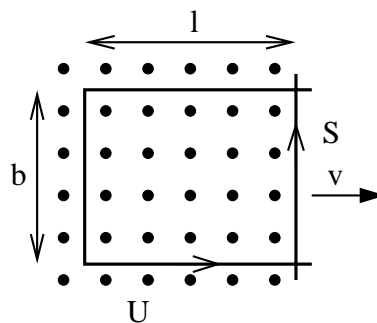
$$\rightarrow \nabla \frac{\mathbf{r} - \mathbf{r}'}{|\mathbf{r} - \mathbf{r}'|^3} = 4\pi\delta(\mathbf{r} - \mathbf{r}')$$

und damit  $\nabla \mathbf{E}(\mathbf{r}) = 4\pi\rho(\mathbf{r})$ .

### 1.5.2 $\text{rot } \mathbf{E}(\mathbf{r}, t) + \frac{1}{c} \frac{\partial}{\partial t} \mathbf{B}(\mathbf{r}, t) = 0$

Faradaysches Induktionsgesetz

Betrachte  $U$ -förmigen Drahtbügel mit beweglichem Schieber, senkrecht dazu Magnetfeld.



Im (Ruhe) System  $K$  ist  $\mathbf{E} = 0$  per Annahme  $\int_U \mathbf{E} d\mathbf{r} = 0$ . Der Schieber werde mit der Geschwindigkeit  $\mathbf{v}$  relativ zu  $K$  bewegt ( $\mathbf{v} = \text{const}$ ). Dann ist auf dem Schieber  $E_S \neq 0$ .

Beweis: Wir denken uns den Schieber geladen (es gibt freie Elektronen), dann trägt die Kraft  $\mathbf{F}$  auf den Schieber

$$\mathbf{F} = q(\mathbf{E} + \frac{\mathbf{v}}{c} \times \mathbf{B}) = q \frac{\mathbf{v}}{c} \times \mathbf{B},$$

da  $\mathbf{E} = 0$ . Im Koordinatensystem  $K_S$ , in dem der Schieber ruht, gilt

$$\mathbf{F}_S = q(\mathbf{E}_S + \frac{1}{c} \mathbf{v}_S \times \mathbf{B}_S) = q\mathbf{E}_S,$$

da  $\mathbf{v}_S = 0$  in  $K_S$ . Wegen der für  $|\mathbf{v}| \ll c$  auf jeden Fall gültigen Galilei-Invarianz folgt  $\mathbf{F} = \mathbf{F}_S$  und damit  $\mathbf{E}_S = \frac{\mathbf{v}}{c} \times \mathbf{B}$ . Bezeichnen wir mit  $\mathbf{E}'$  das Feld, das man in jeweiligen Ruhesystem von  $d\mathbf{r}$  mißt, so gilt

$$\oint_{\text{Ganz}} \mathbf{E} d\mathbf{r} = \int_{\text{Drahtbügel}} \mathbf{E} d\mathbf{r} + \int_{\text{Schieber}} \mathbf{E}_S d\mathbf{r} = \frac{1}{c} \int_{\text{Schieber}} (\mathbf{v} \times \mathbf{B}) d\mathbf{r} = -\frac{1}{c} v B b.$$

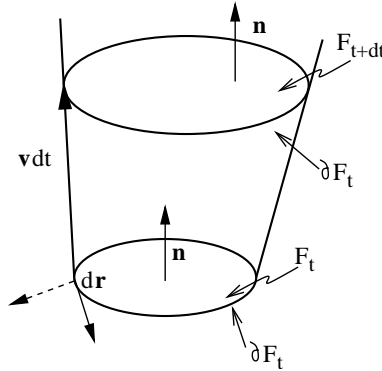
Andererseits ist der magn. Fluß durch die Fläche  $bl$ , deren Normale parallel und in Richtung von  $\mathbf{B}$  liegt,

$$\phi = \int \mathbf{B} \cdot d\mathbf{a} = Bbl \quad \rightarrow \quad \frac{d\phi}{dt} Bbl = Bbv$$

dann ist die elektromagnetische Kraft

$$\varepsilon = \int_{\partial F} \mathbf{E}' d\mathbf{r} = -\frac{1}{c} \dot{\phi} = -\frac{1}{c} \frac{d}{dt} \int_F \mathbf{B} d\mathbf{a}.$$

Beweis der **Hilfsformel** für ein beliebiges Vektorfeld  $\tilde{\mathbf{A}}(\mathbf{r}, t)$  (nicht zu verwechseln mit dem Vektorpotential)



$\phi_{\tilde{\mathbf{A}}} = \int_F \tilde{\mathbf{A}} d\mathbf{a}$  sei der Fluß des Feldes  $\tilde{\mathbf{A}}$  durch die Fläche  $F$  (z.Z.  $t$ ). Dann gilt:

$$\frac{d\phi_{\tilde{\mathbf{A}}}}{dt} = \frac{d}{dt} \int_F \tilde{\mathbf{A}} d\mathbf{a} \stackrel{dt \rightarrow 0}{=} \frac{1}{dt} \left[ \int_{F_{t+dt}} d\mathbf{a} \tilde{\mathbf{A}}(\mathbf{r}, t+dt) - \int_{F_t} \tilde{\mathbf{A}}(\mathbf{r}, t) d\mathbf{a} \right]$$

**Beweis:**

$$\begin{aligned} \frac{d\phi_{\tilde{\mathbf{A}}}}{dt} &= \frac{d}{dt} \int_F \tilde{\mathbf{A}} d\mathbf{a} \stackrel{dt \rightarrow 0}{=} \frac{1}{dt} \left[ \int_{F_{t+dt}} d\mathbf{a} \tilde{\mathbf{A}}(\mathbf{r}, t+dt) - \int_{F_t} \tilde{\mathbf{A}}(\mathbf{r}, t) d\mathbf{a} \right] \\ &= \lim_{dt \rightarrow 0} \frac{1}{dt} \int_{F_{t+dt}} d\mathbf{a} \left( \tilde{\mathbf{A}}(\mathbf{r}, t) + dt \dot{\tilde{\mathbf{A}}}(\mathbf{r}, t) + \mathbf{O}(dt^2) \right) - \int_{F_t} \tilde{\mathbf{A}}(\mathbf{r}, t) d\mathbf{a} \end{aligned}$$

$$\int_{\delta V} \operatorname{div} \tilde{\mathbf{A}} d^3 r = \int_{F_{t+dt}} \tilde{\mathbf{A}}(\mathbf{r}, t) d\mathbf{a} - \int_{F_t} \tilde{\mathbf{A}}(\mathbf{r}, t) d\mathbf{a} + \int_{\text{Mantel}} \tilde{\mathbf{A}}(\mathbf{r}, t) d\mathbf{a}$$

Gaußscher Satz für obiges Volumen.

$$\begin{aligned} \int_{\text{Mantel}} \tilde{\mathbf{A}} d\mathbf{a} &= \int_{\partial F_t} \tilde{\mathbf{A}} \cdot (d\mathbf{r} \times \mathbf{v}) dt = \int_{\partial F_t} d\mathbf{r} (\mathbf{v} \times \tilde{\mathbf{A}}) dt = \int_{F_t} d\mathbf{a} \operatorname{rot}(\mathbf{v} \times \tilde{\mathbf{A}}) dt \\ \frac{d\phi_{\tilde{\mathbf{A}}}}{dt} &= \int_{F_t} d\mathbf{a} \mathbf{v} \operatorname{div} \tilde{\mathbf{A}} - \int_{F_t} d\mathbf{a} \operatorname{rot}(\mathbf{v} \times \tilde{\mathbf{A}}) + \int_{F_t} \frac{\partial \tilde{\mathbf{A}}}{\partial t} \quad \text{q.e.d.} \end{aligned}$$

mit  $\mathbf{E}' = \mathbf{E} + \frac{1}{c} \mathbf{v} \times \mathbf{B}$  ( $\mathbf{E}$  und  $\mathbf{B}$  im  $K$ -System)

$$\int_{\partial F} \left( \mathbf{E} + \frac{1}{c} \mathbf{v} \times \mathbf{B} \right) d\mathbf{r} = -\frac{1}{c} \frac{d}{dt} \int_F \mathbf{B} \cdot d\mathbf{a}$$

Tatsächlich gilt das Faradaysche Induktionsgesetz allgemeiner: die Randkurve  $\partial F$  muß keine materielle Kurve sein,  $\mathbf{B}$  und  $\mathbf{v}$  können explizit von der Zeit abhängen (und nämlich auch vom Ort).

Benutze jetzt die Hilfsformel:

$$\frac{d}{dt} \int_F \mathbf{B} \cdot d\mathbf{a} = \int_F \left( \frac{\partial \mathbf{B}}{\partial t} + \mathbf{v} \cdot \operatorname{div} \mathbf{B} - \operatorname{rot}(\mathbf{v} \times \mathbf{B}) \right) d\mathbf{a}$$

Mit  $\operatorname{div} \mathbf{B} = 0$  folgt

$$\begin{aligned} \int_{\partial F} \left( \mathbf{E} + \frac{1}{c} (\mathbf{v} \times \mathbf{B}) \right) d\mathbf{r} &= -\frac{1}{c} \int_F \left( \frac{\partial \mathbf{B}}{\partial t} - \operatorname{rot}(\mathbf{v} \times \mathbf{B}) \right) d\mathbf{a} \\ \int_{\partial F} \left( \operatorname{rot} \mathbf{E} + \frac{1}{c} \operatorname{rot}(\mathbf{v} \times \mathbf{B}) \right) d\mathbf{a} &= -\frac{1}{c} \int_F \left( \frac{\partial \mathbf{B}}{\partial t} - \operatorname{rot}(\mathbf{v} \times \mathbf{B}) \right) d\mathbf{a}, \end{aligned}$$

also

$$\operatorname{rot} \mathbf{E} + \frac{1}{c} \dot{\mathbf{B}} = 0$$

### 1.5.3 $\operatorname{div} \mathbf{B}(\mathbf{r}, t) = 0$

Magnetfeld hat keine Quellen: es gibt keine magnetische Monopole (Dirac, t'Hooft, Polyakov)

$$\oint_{\partial V} d\mathbf{a} \mathbf{B}(\mathbf{r}, t) = 0$$

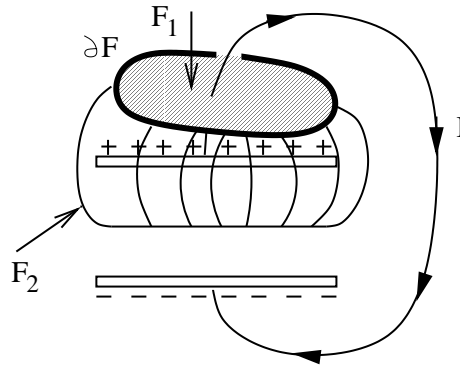
### 1.5.4 $\operatorname{rot} \mathbf{B} - \frac{1}{c} \frac{\partial \mathbf{E}}{\partial t} = \frac{4\pi}{c} \mathbf{j}(\mathbf{r}, t)$

Die letzte der Maxwell-Gleichungen zeigt, wie Magnetfelder entstehen.

Betrachten wir zunächst den Fall **konstanter** Ströme. Für diesen gilt das **Oerstedtsche Gesetz**

$$\oint_{\partial F} \mathbf{B} d\mathbf{r} = \frac{4\pi}{c} \int_F \mathbf{j} d\mathbf{a} = \frac{4\pi}{c} I$$

$I$  ist der Gesamtstrom durch  $F$ . Mit dem Stokeschen Satz folgt dann  $\text{rot } \mathbf{B} = \frac{4\pi}{c} \mathbf{j}$ . Für **zeitabhängige** Ströme gilt diese Gleichung nicht. Ein klassisches Beispiel ist die Kondensatorentladung.



Betrachte zwei Flächen,  $F_1$  und  $F_2$ , die beide von der Randkurve  $\partial F$  aufgespannt werden:  $F_1$  verläuft oberhalb der beiden Kondensatorplatten,  $F_2$  zwischen diesen.

$$\oint_{\partial F} \mathbf{B} d\mathbf{r} = \frac{4\pi}{c} \int_{F_1} \mathbf{j} d\mathbf{a} = \frac{4\pi}{c} I(t) = \frac{4\pi}{c} \int_{F_2} \mathbf{j} d\mathbf{a} = 0$$

( $F_1$  wird von der Leitung, die die Kondensatorplatten verbindet, durchgestoßen).

Widerspruch!

Vergessen wurde die starke Änderung des elektrischen Feldes zwischen den Kondensatorplatten. Maxwells Spekulation:

$$\text{rot } \mathbf{B} = \frac{4\pi}{c} \mathbf{j} + k \frac{\partial}{\partial t} \mathbf{E},$$

dieser Term ist additiv, da für schwache  $\frac{\partial F}{\partial t}$  ja wieder Oerstedt's Gesetz gelten muß.

Die Konstante  $k$  kann man sich aus der Kontinuitätsgleichung verschaffen

$$\begin{aligned} \text{div rot } \mathbf{B} = 0 &= \frac{4\pi}{c} \nabla \cdot \mathbf{j} + k \frac{\partial}{\partial t} \nabla \cdot \mathbf{E} \\ &= \frac{4\pi}{c} \nabla \cdot \mathbf{j} + k 4\pi \dot{\rho} = 0 \end{aligned}$$

$\rightarrow k = 1/c$ .

## Kapitel 2

# Einfache Anwendungen der Maxwell–Gleichungen: Elektro– und Magnetostatik, elektromagnetische Wellen

### 2.1 Elektro– und magnetostatische Grundaufgabe

Betrachte Maxwell–Gleichungen für stationäre (d.h. zeitunabhängige) Ladungs– und Stromverteilungen sowie Felder

$$\begin{aligned} \operatorname{div} \mathbf{E}(\mathbf{r}) &= 4\pi\rho(\mathbf{r}) && \text{Elektrostatik} \\ \operatorname{rot} \mathbf{E}(\mathbf{r}) &= 0 \\ \operatorname{div} \mathbf{B}(\mathbf{r}) &= 0 && \text{Magnetostatik} \\ \operatorname{rot} \mathbf{B}(\mathbf{r}) &= \frac{4\pi}{c}\mathbf{j}(\mathbf{r}) \end{aligned} \tag{2.1}$$

Man erhält  $\operatorname{div} \mathbf{j} = 0$  aus Kontinuitätsgleichung.

Beobachtung: elektrische und magnetische Felder sind **entkoppelt**, Poisson–Gleichung

$$\begin{aligned} \Delta\phi &= -4\pi\rho(\mathbf{r}) \\ \Delta\mathbf{A} &= -\frac{4\pi}{c}\mathbf{j}(\mathbf{r}). \end{aligned} \tag{2.2}$$

Eine spezielle Lösung für die Potentiale ist bekannt ( $\mathbf{A}, \phi$  verschwinden wie  $1/r$  für  $r \rightarrow \infty$ )

$$\begin{aligned} \mathbf{A}(\mathbf{r}) &= \frac{1}{c} \int d^3r' \mathbf{j}(\mathbf{r}') \frac{1}{|\mathbf{r} - \mathbf{r}'|} \\ \phi(\mathbf{r}) &= \int d^3r' \rho(\mathbf{r}') \frac{1}{|\mathbf{r} - \mathbf{r}'|} \end{aligned} \tag{2.3}$$

Allgemeine Lösung der Poisson–Gleichung: spezielle Lösung der inhomogenen Gleichungen plus allgemeine Lösung der homogenen (Laplace–Gleichung). Wir wissen

aber bereits, daß  $\phi \equiv 0$  falls  $\phi$  wie  $1/r$  für  $r \rightarrow \infty$  verschwindet, d.h. (2.3) ist Lösung. Ferner wurde gezeigt, daß die Lösung eindeutig ist.

Im Prinzip ist damit die Elektro- und Magnetostatik gelöst, wenn  $\rho$  und  $\mathbf{j}$  vorgegeben sind. In der Praxis ist das nicht immer der Fall. Z.B. gibt es Leiter, die **Randbedingungen an  $\phi$**  stellen. Bevor wir zur Lösung der Gleichungen (2.1), (2.2) mit Randbedingungen kommen, betrachten wir einige einfache Anwendungen von (2.3).

Aus Differentiation von (2.3) folgt

$$\mathbf{E}(\mathbf{r}) = \int_{\mathbb{R}^3} d^3 r' \rho(\mathbf{r}') \frac{\mathbf{r} - \mathbf{r}'}{|\mathbf{r} - \mathbf{r}'|^3} = -\nabla \phi \quad (2.4)$$

$$\mathbf{B}(\mathbf{r}) = \frac{1}{c} \int_{\mathbb{R}^3} d^3 r' \mathbf{j}(\mathbf{r}') \times \frac{\mathbf{r} - \mathbf{r}'}{|\mathbf{r} - \mathbf{r}'|^3} = \nabla \times \mathbf{A} \quad (2.5)$$

Ist  $\mathbf{j}(\mathbf{r}')$  nur in einem dünnen Stromfaden mit dem Querschnitt da von Null verschieden, so folgt  $\mathbf{j}(\mathbf{r}') d^3 \mathbf{r}' = |\mathbf{j}| dadr' = I d\mathbf{r}'$ , so folgt das **Biot-Savartsche Gesetz**:

$$\mathbf{B}(\mathbf{r}) = \frac{I}{c} \int \frac{d\mathbf{r}' \times (\mathbf{r} - \mathbf{r}')}{|\mathbf{r} - \mathbf{r}'|^3}.$$

Spezialfall: gerader unendlich langer Stromfaden im Abstand  $d \rightarrow$

$$|B(d)| = \frac{I}{c} d \int_{-\infty}^{\infty} \frac{dx}{(x^2 + d^2)^{3/2}} = \frac{2I}{dc}$$

wurde bei Gedankenexperiment in 1.3 benutzt (Integrale gleich!).

**Ergänzung zum Fundamentalsatz:**

$$\nabla \times \tilde{\mathbf{A}} = \boldsymbol{\omega}(\mathbf{r})$$

$$\nabla \mathbf{A} = g(\mathbf{r})$$

$\tilde{\mathbf{A}}$  ist eindeutig zerlegbar in  $\tilde{\mathbf{A}} = \tilde{\mathbf{A}}_t + \tilde{\mathbf{A}}_l$  mit

$$\nabla \tilde{\mathbf{A}}_l = g(\mathbf{r}) \quad \nabla \tilde{\mathbf{A}}_t = 0$$

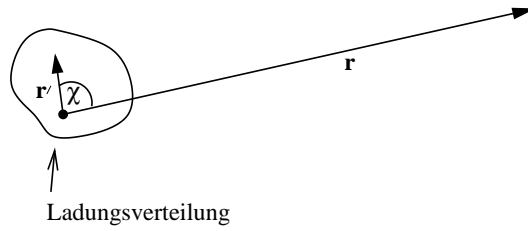
$$\nabla \times \tilde{\mathbf{A}}_l = 0 \quad \nabla \times \tilde{\mathbf{A}}_t = \boldsymbol{\omega}(\mathbf{r})$$

$$\tilde{\mathbf{A}}(\mathbf{r}) = -\frac{1}{4\pi} \nabla \int g(\mathbf{r}') \frac{1}{|\mathbf{r} - \mathbf{r}'|} d^3 r' + \frac{1}{4\pi} \nabla \times \int \boldsymbol{\omega}(\mathbf{r}') \frac{1}{|\mathbf{r} - \mathbf{r}'|} d^3 r'$$

## 2.2 Multipol-Entwicklung

### 2.2.1 Elektrostatik

$$\frac{1}{|\mathbf{r} - \mathbf{r}'|} = \frac{1}{|\mathbf{r}|} - x'_i \partial_i \frac{1}{|\mathbf{r}|} + \frac{1}{2} x'_i x'_j \partial_i \partial_j \frac{1}{|\mathbf{r}|} - \frac{1}{3!} x'_i x'_j x'_k \partial_i \partial_j \partial_k \frac{1}{|\mathbf{r}|} + \dots$$



$$\partial_i \frac{1}{|\mathbf{r}|} = -\frac{x_i}{|\mathbf{r}|^3}; \quad \partial_i \partial_j \frac{1}{|\mathbf{r}|} = 3 \frac{x_i x_j}{|\mathbf{r}|^5} - \frac{\delta_{ij}}{|\mathbf{r}|}$$

Identität:

$$3(\mathbf{r} \cdot \mathbf{r}')^2 - \mathbf{r}^2 \mathbf{r}'^2 = \frac{1}{3}(3x'_i x'_j - x'^2_k \delta_{ij})(3x_i x_j - x^2_k \delta_{ij})$$

$$\phi(\mathbf{r}) = \int d^3 r' \frac{\rho(\mathbf{r}')}{|\mathbf{r} - \mathbf{r}'|} = \sum_{l=0}^{\infty} \phi_l(\mathbf{r})$$

$$\phi_0(\mathbf{r}) = \frac{q}{|\mathbf{r}|}, \quad q = \int d^3 r' \rho(\mathbf{r}') \quad \text{Monopol-Moment}$$

$$\phi_1(\mathbf{r}) = \frac{\mathbf{p} \cdot \mathbf{r}}{|\mathbf{r}|^3}, \quad \mathbf{p} = \int d^3 r' \rho(\mathbf{r}') \mathbf{r}' \quad \text{Dipol-Moment}$$

$$\phi_2(\mathbf{r}) = \frac{1}{2} \frac{Q_{ij} x_i x_j}{|\mathbf{r}|^5} = \frac{1}{6} Q_{ij} \frac{3x_i x_j - \mathbf{r}^2 \delta_{ij}}{|\mathbf{r}|^5} \quad \text{Quadrupol-Moment}$$

$\phi_l \rightarrow 2^l$  Pol,  $Q_{ij} = \int d^3 r' \rho(\mathbf{r}') (3x'_i x'_j - \mathbf{r}'^2 \delta_{ij})$ ,  $Q_{ii} = 0$ ,  $Q_{ij} = Q_{ji} \rightarrow$  fünf unabhängige Komponenten.

Die Potentialbeiträge  $\phi_l(\mathbf{r})$  verschwinden wie  $1/|\mathbf{r}|^{l+1}$  im Unendlichen, d.h. bei Entfernung von der Ladungsverteilung gehen immer mehr strukturelle Details, die in den höheren Momenten enthalten sind, verloren. Kennt man  $\rho(\mathbf{r}')$  **nicht**, so kann man sich aus der Messung der  $2^l$ -Pol-Momente eine Vorstellung von  $\rho$  verschaffen (Kernphysik). Andere Formen der Multipolentwicklung sind für praktische Zwecke oft geeigneter:

$$\frac{1}{|\mathbf{r} - \mathbf{r}'|} = \frac{1}{(\mathbf{r}^2 + \mathbf{r}'^2 - 2r r' \cos \chi)^{1/2}} = \sum_{l=0}^{\infty} \frac{|\mathbf{r}'|^l}{|\mathbf{r}|^{l+1}} P_l(\cos \chi)$$

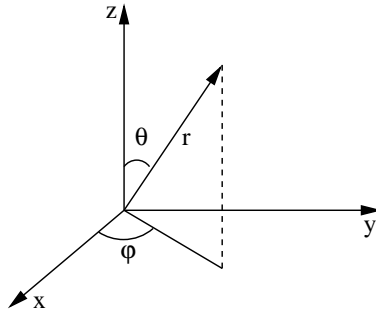
$r' \ll r$ .  $P_l(\cos \theta)$  sind die **Legendreschen Polynome**

$$P_l(z) \frac{1}{2^l l!} \frac{d^l}{dz^l} (z^2 - 1) \quad (\text{Formel von Rodrigues})$$

$$P_0 = 1, \quad P_1 = z, \quad P_2 = \frac{1}{2}(3z^2 - 1), \quad P_3 = \frac{1}{2}(5z^2 - 3z)$$

Die  $P_l(z)$  sind ein Beispiel für ein orthogonales Funktionensystem

$$\int_{-1}^1 dz P_l^*(z) P_l(z) = \frac{2}{2l+1} \delta_{ll'}$$



(vollständiges Orthogonalsystem im Intervall  $[-1, 1]$ ).  $\chi$  war Winkel zwischen  $\mathbf{r}'$  und  $\mathbf{r}$ . Gibt man  $\mathbf{r}'$  und  $\mathbf{r}$  in Polarkoordinaten an:  $x = r \sin \theta \cos \varphi$ ,  $y = r \sin \theta \sin \varphi$ ,  $z = r \cos \theta$ ,

so wird  $\mathbf{r} \cdot \mathbf{r}' = rr' \cos \chi = rr'(\sin \theta \sin \theta' \cos(\varphi - \varphi') + \cos \theta \cos \theta')$ . Man kann jetzt  $P_l(\cos \chi)$  zerlegen

$$P_l(\cos \chi) = \frac{4\pi}{2l+1} \sum_{m=-l}^l Y_{l,m}(\theta, \varphi) Y_{l,m}^*(\theta', \varphi').$$

$Y_{l,m}(\theta, \varphi)$  sind Kugel(Flächen)funktionen (spherical harmonics). Sie bilden ein vollständiges orthonormiertes Funktionensystem

$$\int_0^{2\pi} d\varphi \int_0^\pi \sin \theta d\theta Y_{l',m'}^*(\theta, \varphi) Y_{l,m}(\theta, \varphi) = \delta_{ll'} \delta_{mm'}$$

Nach einsetzen

$$\phi(\mathbf{r}) = \sum_{l=0}^{\infty} \sum_{m=-l}^l \frac{4\pi}{2l+1} \frac{1}{|\mathbf{r}|^{l+1}} Y_{l,m}(\theta, \varphi) \int d^3r' \rho(r') Y_{l,m}^*(\theta', \varphi') r'^l$$

$\int d^3r' \rho(r') Y_{l,m}^*(\theta', \varphi') r'^l =: q_{lm} = (-1)^m q_{l,-m}$  Multipolmomente.

Da es zu jedem  $l$   $2l+1$   $m$  gibt  $\rightarrow 2l+1$  unabhängige Komponenten von  $q_{lm}$  (Dipol 3, Quadrupol 5,...)

$l = 0$  Monopol

$l = 1$  Dipol

$\vdots$

$l = k$   $2^k$ -Pol

**Zugeordnete Legendresche Polynome:**

$$Y_{l,m}(\theta, \varphi) = \left(\frac{2l+1}{4\pi}\right)^{1/2} \left(\frac{(l-m)!}{(l+m)!}\right)^{1/2} e^{im\varphi} P_l^m(\cos \theta)$$

$$Y_{l,-m}(\theta, \varphi) = Y_{l,m}^*(\theta, \varphi)$$

$l = 0, \dots, \infty, -l \leq m \leq l$ .

$$\begin{aligned} P_l^m &= (-1)^m (1-z^2)^{m/2} \frac{d^m}{dz^m} P_l(z) \\ P_l^m &= \frac{(-1)^m}{2^l l!} (1-z^2)^{m/2} \frac{d^{l+m}}{dz^{l+m}} (z^2-1)^l \end{aligned}$$

**Beispiel:**  $l = 0, Y_{00} = 1/\sqrt{4\pi}$

$$l = 1 \begin{cases} Y_{11} = -\frac{1}{2} \sqrt{3/2\pi} \sin \theta e^{i\varphi} \\ Y_{10} = \frac{1}{2} \sqrt{3/\pi} \cos \theta \end{cases}$$

Folgt:

$$\begin{aligned} q_{00} &= \frac{1}{\sqrt{4\pi}} q \\ q_{11} &= -q_{1,-1}^* = -\frac{1}{2} \sqrt{\frac{3}{2\pi}} (p_x - ip_y) \\ q_{10} &= \frac{1}{2} \sqrt{\frac{3}{\pi}} p_z \end{aligned}$$

d.h. die Multipolmomente in kartesischen Koordinaten sind Linearkombinationen der Multipolmomente in Kugelkoordinaten (vergl. Stumpf & Schuler, Jackson, etc.).

## 2.2.2 Magnetostatik

$$\begin{aligned} \mathbf{A}(\mathbf{r}) &= \frac{1}{c} \int d^3 \mathbf{r}' \mathbf{j}(\mathbf{r}') \left\{ \frac{|\mathbf{r}| x'_i x_i}{r^3} + \frac{1}{6r^5} (3x'_i x'_j - x'_k \delta_{ik}) (3x_i x_j - x_k^2 \delta_{ij}) + \dots \right\} \\ &= \sum_{l=0}^{\infty} \mathbf{A}_l(\mathbf{r}) \\ \mathbf{A}_0(\mathbf{r}) &= \frac{1}{c|\mathbf{r}|} \int d^3 r' \mathbf{j}(\mathbf{r}') \equiv 0 \end{aligned}$$

Das Monopol-Moment verschwindet (vergleiche Diracschen Monopol).

Hilfsformel für beliebige Funktion  $g$ :

$$\int_V d^3 r \nabla(g\mathbf{j}) = \int_{\partial V} d\mathbf{a}(g\mathbf{j}) = 0$$

$\mathbf{j}(\mathbf{r})$  muß für  $r \rightarrow \infty$  hinreichend schnell abklingen!

$$\int_V d^3 r \nabla(g\mathbf{j}) = \int_V d^3 r (\mathbf{j} \nabla g + \underbrace{g \nabla \mathbf{j}}_{=0}) = \int_V d^3 r \mathbf{j} \nabla g$$

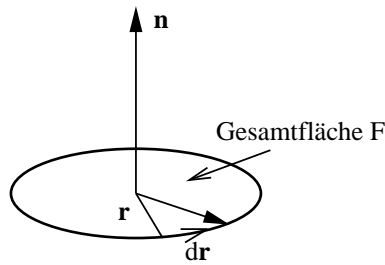
$g = x_i \rightarrow \int j_i d^3 r = 0 \forall i$ .

$$\mathbf{A}_1(\mathbf{r}) = \frac{1}{c|\mathbf{r}|^3} \int d^3 r' \mathbf{j}(\mathbf{r}') (\mathbf{r} \cdot \mathbf{r}') = \frac{\mathbf{m} \times \mathbf{r}}{|\mathbf{r}|^3}$$

$$\mathbf{m} = \frac{1}{2c} \int d^3r' \mathbf{r}' \times \mathbf{j}(\mathbf{r}') \quad \text{Dipolmoment}$$

Hilfsformel  $g = x_i x_j \rightarrow \int d^3r' (x'_i j'_j + x'_j j'_i) = 0$ . Unter dem Integral  $x_i x'_i j_j(\mathbf{r}') = \frac{1}{2}(x_i x'_i j'_j - x_i j'_j x'_i) = \frac{1}{2}(\mathbf{r} \times (j' \times \mathbf{r}'))_j + 2$  Vertauschungen in Kreuzprodukten  
 $\varepsilon_{ijk} x_k \varepsilon_{lmn} j'_m x'_n = j'_j x'_k x_k - x'_j x_k j'_k$

**1.Beispiel:** Ebener Stromring



$$d^3r \mathbf{j} = I d\mathbf{r}$$

$$\frac{1}{2} \mathbf{r} \times d\mathbf{r} = \frac{1}{2} r dr \sin \varphi = da \quad \rightarrow \quad \mathbf{m} = \frac{I}{c} \mathbf{n} \int da = \frac{I}{c} \mathbf{n} F,$$

d.h. das magnetische Dipolmoment ist **unabhängig** von der Form der  $F$  begrenzenden Kontur  $\partial F$ .

**2.Beispiel:** Mit  $\mathbf{j} = \sum_{i=1}^N q_i \mathbf{v}_i \delta(\mathbf{r} - \mathbf{r}_i) \rightarrow \mathbf{m} = \frac{1}{2c} \sum_{i=1}^N q_i \mathbf{r}_i \times \mathbf{v}_i = \frac{q}{2cM} \sum_{i=1}^N \mathbf{r}_i \times M_i \mathbf{v}_i$ . Annahme  $q_i/M_i = q/M$ .  $\mathbf{L} = \sum_{i=1}^N \mathbf{r}_i \times M_i \mathbf{v}_i$  ist Gesamtdrehimpuls,  $M_i$ : Massen.

$$\mathbf{m} = \frac{q}{2Mc} \mathbf{L}$$

“magneto-mechanische Analogie”, diese Relation ist für den Spin falsch!

**Ergänzung: Diracscher Monopol**

1931 Versuch Diracs, die Maxwell-Gleichungen zu symmetrisieren:

$$\begin{aligned} (\tilde{\text{II}}) \quad \text{rot } \mathbf{E} &= -\frac{1}{c} \frac{\partial}{\partial t} \mathbf{B} - \frac{4\pi}{c} \tilde{\mathbf{j}}(\mathbf{r}, t) \\ (\tilde{\text{III}}) \quad \text{div } \mathbf{B} &= 4\pi \tilde{\rho}(\mathbf{r}, t) \end{aligned}$$

$\tilde{\rho}$ ,  $\tilde{\mathbf{j}}$  magnetische Ladungs- und Stromdichte. Monopol als Ende einer unendlich langen und unendlich dünnen Spule:

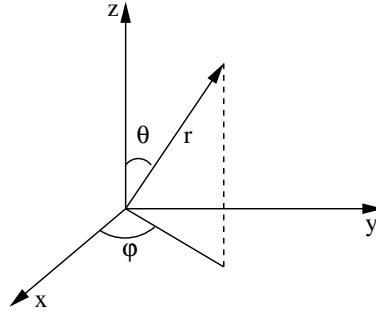
$$\mathbf{A} = -\tilde{q} \int d\mathbf{l} \times \nabla \frac{1}{|\mathbf{r} - \mathbf{r}'|}$$

$d\mathbf{l}$  parallel zur Längsachse der Spule,  $\mathbf{B}_{\text{Monopol}} = \nabla \times \mathbf{A} - \mathbf{B}^{\text{int}}$  (in Spule).

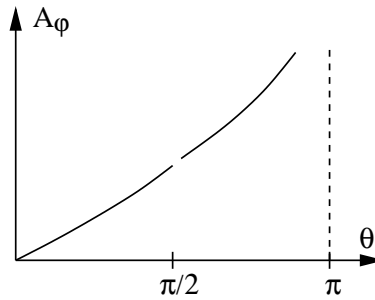
(III) magnetische Punktladung  $\tilde{q}$  im Ursprung hat Feld (es gibt Theorien, die solche Lösungen haben).

$$\mathbf{B}(\mathbf{r}) = \frac{\tilde{q}}{|\mathbf{r}^2|} \cdot \frac{\mathbf{r}}{|\mathbf{r}|}.$$

Dazu "Vektorpotential" in Kugelkoordinaten (muß Singularitäten enthalten)



$$\begin{aligned} \mathbf{A} &= (A_r, A_\theta, A_\varphi) = \left(0, 0, \frac{\tilde{q}}{r} \frac{(1 - \cos \theta)}{\sin \theta}\right) \\ B_r &= \frac{1}{r \sin \theta} \left[ \frac{\partial}{\partial \theta} (\sin \theta A_\varphi) - \frac{\partial A_\theta}{\partial \varphi} \right] = \frac{\tilde{q}}{r^2} \\ B_\theta &= \left[ \frac{1}{r \sin \theta} \frac{\partial A_r}{\partial \varphi} - \frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r} (r A_\varphi) \right] = 0 - 0 = 0 \\ B_\varphi &= \frac{1}{r} \left[ \frac{\partial}{\partial r} (r A_\theta) - \frac{\partial A_r}{\partial \theta} \right] = 0 \end{aligned}$$



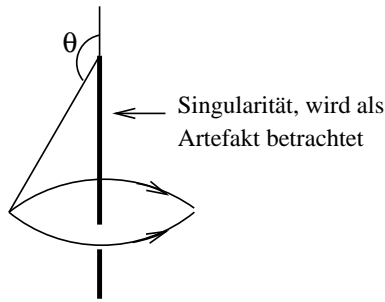
$A_\varphi \rightarrow \infty$  auf negative  $z$ -Achse,  $\tilde{q} = \frac{n \hbar c}{2} \cdot \frac{e_0^2}{q}$ .

→ keine Phasenverschiebung bei Aharonov-Bohm-Effekt, Phase

$$\frac{1}{\hbar c} \oint ds \mathbf{A} = 2\pi n = \frac{q}{\hbar c} 2\pi r \sin \theta \frac{\tilde{q}}{r} \frac{(1 - \cos \theta)}{\sin \theta} \Big|_{\theta \rightarrow -\pi} = \frac{4\pi q \tilde{q}}{\hbar c}$$

→ (i)  $q = e_0 \rightarrow \tilde{q}_0 = \frac{n}{2} 137 e_0$  Quanten der magnetischen Ladung

→ (ii) aus der Annahme der Existenz eines Monopols mit Ladung  $\tilde{q}$ ,  $q = \frac{n \hbar c}{2} \frac{\tilde{q}}{q} \rightarrow$  Quantisierung der Ladung.



## 2.3 Elektrostatische Energie und Kräfte

### 2.3.1 Elektrostatische Energie

Die Arbeit im elektrostatischen Feld, die man verrichten muß um die Ladung  $q$  von  $\mathbf{r}_A$  nach  $\mathbf{r}_B$  zu bringen, beträgt

$$\begin{aligned}
 W &= - \int_{\mathbf{r}_A}^{\mathbf{r}_B} \mathbf{F} d\mathbf{r} = - \int_{\mathbf{r}_A}^{\mathbf{r}_B} q\mathbf{E} d\mathbf{r} = q \int_{\mathbf{r}_A}^{\mathbf{r}_B} \nabla\phi(\mathbf{r}) d\mathbf{r} \\
 &= q(\phi(\mathbf{r}_B) - \phi(\mathbf{r}_A))
 \end{aligned}$$

$\mathbf{F}$  ist die Kraft des Feldes auf das Teilchen, d.h. gleich der negativen Kraft die man aufwenden muß.

Sei speziell  $\phi(\mathbf{r}_i) = \sum_{j=1}^{N-1} \frac{q_j}{|\mathbf{r}_j - \mathbf{r}_i|}$ , dann ist die Arbeit  $W_i$  erforderlich, um die Ladung  $q_i$  aus dem Unendlichen nach  $\mathbf{r}_i$  zu bringen

$$W_i = q_i\phi(\mathbf{r}_i).$$

Dies ist die Potenzielle Energie der Ladung  $q_i$  im Feld der anderen Ladungen. Die gesamte potentielle Energie aller Ladungen beträgt dann

$$W_{\text{Coul}} = \sum_{i=1}^N \sum_{j<i} \frac{q_i q_j}{|\mathbf{r}_i - \mathbf{r}_j|} = \frac{1}{2} \sum_{i \neq j} \frac{q_i q_j}{|\mathbf{r}_i - \mathbf{r}_j|},$$

oder allgemeiner geschrieben (unter Einschluß der Selbstenergie  $i = j$ )

$$W_{\text{el}} = \frac{1}{2} \iint d^3r d^3r' \frac{\rho(\mathbf{r})\rho(\mathbf{r}')}{|\mathbf{r} - \mathbf{r}'|}$$

oder auch

$$W_{\text{el}} = \frac{1}{2} \int d^3r \rho(\mathbf{r}) \phi(\mathbf{r})$$

Und schließlich mit  $\rho = -(1/4\pi)\Delta\phi$

$$W_{\text{el}} = -\frac{1}{8\pi} \int d^3r \phi(\mathbf{r}) \Delta \phi(\mathbf{r}) = \frac{1}{8\pi} \int d^3r \mathbf{E}^2(\mathbf{r}) \quad \underbrace{-\frac{1}{8\pi} \int_{\partial F} \phi(\nabla \phi \, d\mathbf{a})}_0$$

Energiedichte  $w = (1/8\pi)\mathbf{E}^2$ .

“Selbstenergie” einer fast punktförmigen Ladung  $\rho(\mathbf{r}) = q\pi^{-3/2}r_0^{-3} \exp(-r^2/r_0^2)$  mit Gesamtladung  $q = \int \rho(\mathbf{r})d^3r$  und Radius  $r_0$

$$\begin{aligned} W_{\text{el}} &= \frac{1}{2} \int d^3r d^3r' \frac{1}{|\mathbf{r} - \mathbf{r}'|} q^2 \pi^{-3} r_0^{-6} e^{-\frac{1}{r_0^2}(\mathbf{r}^2 + \mathbf{r}'^2)} \\ &= \frac{1}{16} q^2 \pi^{-3} r_0^{-6} \int d^3R d^3R' \frac{1}{|R|} e^{-\frac{1}{2}(\mathbf{R}^2 + \mathbf{R}'^2)/r_0^2} \\ &= \frac{1}{16} q^2 \pi^{-3} r_0^{-6} \pi^{3/2} 2^{3/2} r_0^3 \int d^3R \frac{1}{R} e^{-R^2/(2r_0^2)} \end{aligned}$$

$$\text{Dimensionsüberlegung} = \frac{1}{(2\pi)^{1/2}} \frac{q^2}{r_0} \rightarrow \infty \text{ für } r_0 \rightarrow 0$$

( $\mathbf{r} - \mathbf{r}' = \mathbf{R}$ ,  $\mathbf{r} + \mathbf{r}' = \mathbf{R}'$ ,  $\frac{\partial(\mathbf{r}, \mathbf{r}')}{\partial(\mathbf{R}, \mathbf{R}')} = 1/8$ .) Klassischer Radius des Elektrons  $r_0 = m_e c^2 / e_0^2$ .

### 2.3.2 Ladungen im äußeren Feld $\mathbf{E}^{\text{ext}}(\mathbf{r}) = -\nabla \phi^{\text{ext}}(\mathbf{r})$

Annahme, daß sich  $\mathbf{E}^{\text{ext}}(\mathbf{r})$  nur schwach im Bereich der lokalisierten Ladungsverteilung  $\rho(\mathbf{r})$  verändert (die  $\mathbf{E}^{\text{ext}}$  hervorrufenden Ladungen sind weit entfernt, dann gilt  $\text{div } \mathbf{E}^{\text{ext}} = 0$  in dem Gebiet, in dem  $\rho(\mathbf{r}) \neq 0$ ).

Die **potenzielle Energie** einer Ladungsverteilung im äußeren Feld beträgt

$$W = \int_V \rho(\mathbf{r}) \phi^{\text{ext}}(\mathbf{r}) d^3r.$$

Lege den Koordinatenursprung in das Gebiet, wo  $\rho \neq 0$  (i.a. hängen die Multipolmomente von der Wahl des Koordinatensystems ab!).

$$W = \int_V \rho(\mathbf{r}) \left\{ \phi^{\text{ext}}(0) + \mathbf{r} \cdot \nabla \phi^{\text{ext}}(\mathbf{r}) \Big|_{\mathbf{r}=0} + \frac{1}{2} x_i x_j \partial_i \partial_j \phi^{\text{ext}}(\mathbf{r}) \Big|_{\mathbf{r}=0} + \dots \right\}$$

Verwende hier die Definition von  $Q_{ij}$  und  $\text{div } \mathbf{E}^{\text{ext}}(\mathbf{r}) \Big|_{\mathbf{r}=0} = 0$

$$W_{\text{el}} = q\phi^{\text{ext}}(0) - \mathbf{p} \cdot \mathbf{E}^{\text{ext}}(0) - \frac{1}{6} Q_{ij} \partial_i \partial_j \phi^{\text{ext}}(0) + \dots$$

**Beispiel:** Wechselwirkung zweier Dipole

$$W_{\text{el}} = \frac{1}{r^3} \left[ \mathbf{p}_1 \mathbf{p}_2 - \frac{3}{r^2} (\mathbf{p}_1 \mathbf{r})(\mathbf{p}_2 \mathbf{r}) \right]$$

**Kräfte auf eine Ladungsverteilung im äußeren Feld:**

Alle Kräfte wirken immer in Richtung von  $\mathbf{E}^{\text{ext}}$ . Lorentzkraft  $\mathbf{F} = \int d^3r \rho(\mathbf{r}) \mathbf{E}^{\text{ext}}(\mathbf{r})$ .  
Entwicklung von  $\mathbf{E}^{\text{ext}}(\mathbf{r})$  um  $\mathbf{r} = 0$  ergibt:

$$\mathbf{F}_{\text{el}} = q\mathbf{E}^{\text{ext}}(0) + (\mathbf{p} \cdot \nabla)\mathbf{E}^{\text{ext}}(0) + \frac{1}{6}Q_{ij}\partial_i\partial_j\mathbf{E}^{\text{ext}}(0) + \dots$$

(Ladung koppelt an Feld, Dipolmoment an Feldgradient, etc.) Hierbei wird angenommen, daß im Bereich  $\rho(\mathbf{r}) \neq 0$  keine Quellen der **äußeren** Felder vorhanden sind ( $\nabla\mathbf{E}^{\text{ext}} = \nabla \times \mathbf{E}^{\text{ext}} = 0$ ).

**Drehmomente**, die auf eine Ladungsverteilung im äußeren Feld wirken:

$$\begin{aligned} \mathbf{N}_{\text{el}} &= \int d^3r (\mathbf{r} \times \rho(\mathbf{r}) \cdot \mathbf{E}^{\text{ext}}(\mathbf{r})) \\ &= \mathbf{p} \times \mathbf{E}^{\text{ext}}(0) + \frac{1}{3}\varepsilon_{ijk}\mathbf{e}_i Q_{jl}\partial_l E_k^{\text{ext}}(0) + \dots \end{aligned}$$

Nebenrechnung:

$$\begin{aligned} \varepsilon_{ijk}x_j E_k^{\text{ext}} \rho(\mathbf{x}) &= \varepsilon_{ijk}x_j \rho(\mathbf{x}) (E_k^{\text{ext}}(0) + x_l \partial_l E_k^{\text{ext}}(0) + \dots) \\ &\Rightarrow \mathbf{p} \times \mathbf{E}^{\text{ext}}(0) + \frac{1}{3}\varepsilon_{ijk}Q_{jl}\partial_l E_k^{\text{ext}}(0) \end{aligned}$$

wegen  $\int d^3r \varepsilon_{ilk} \mathbf{r}^2 \delta_{jl} \underbrace{\partial_l E_k^{\text{ext}}(0)}_{\nabla \times \mathbf{E}^{\text{ext}}} = 0$ .

Anmerkung:  $\partial_l E_k(0)$  etc. steht für  $\left. \frac{\partial}{\partial x_l} E_k(\mathbf{r}) \right|_{r=0}$  usw.

Nebenrechnung:

$$\mathbf{E}^{\text{ext}}(\mathbf{r}) = \mathbf{E}^{\text{ext}}(0) + x_i \partial_i \mathbf{E}^{\text{ext}} + \frac{1}{2}x_i x_j \partial_i \partial_j \mathbf{E}^{\text{ext}} + \dots$$

mit  $\nabla\mathbf{E}^{\text{ext}}(0) = \nabla \times \mathbf{E}^{\text{ext}}(0) = 0$  folgt

$$\partial_i \partial_j E_j^{\text{ext}} - \varepsilon_{ikl} \partial_k \varepsilon_{lmn} \partial_m E_n^{\text{ext}} = \partial_i \partial_j E_j^{\text{ext}} - \partial_i \partial_k E_k^{\text{ext}} + \Delta E_i^{\text{ext}} = 0$$

$$3x_i x_j \partial_i \partial_j \mathbf{E}^{\text{ext}}(0) = (3x_i x_j - \mathbf{r}^2 \delta_{ij}) \partial_i \partial_j \mathbf{E}^{\text{ext}}(0) \rightarrow \mathbf{F}_{\text{el}}$$

## 2.4 Magnetostatische Energie und Kräfte

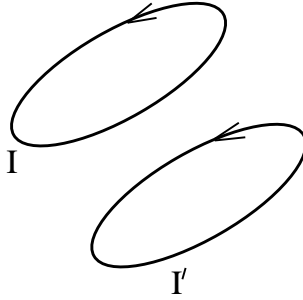
### 2.4.1 Amperesche Kraftgesetz

Die Lorentzkraft von einem Stromelement  $\mathbf{j}(\mathbf{r}')d^3r'$  auf ein Stromfadenelement liefern  $I d\mathbf{r} = \mathbf{j} \cdot d\mathbf{a} d\mathbf{r}$  + Biot-Savartsches Gesetz

$$d\mathbf{F}(\mathbf{r}) = \frac{1}{c} \mathbf{j} d^3r \times \mathbf{B}(\mathbf{r}) = \frac{1}{c^2} I I' \frac{d\mathbf{r} \times (d\mathbf{r}' \times (\mathbf{r} - \mathbf{r}'))}{|\mathbf{r} - \mathbf{r}'|^3}$$

Gehören beide Stromfadenelemente zu zwei verschiedenen geschlossenen Stromschleifen, dann folgt das **Amperesche Kraftgesetz**

$$\mathbf{F}(\mathbf{r} - \mathbf{r}') = \frac{II'}{c^2} \oint \oint \frac{d\mathbf{r} \times (d\mathbf{r}' \times (\mathbf{r} - \mathbf{r}'))}{|\mathbf{r} - \mathbf{r}'|^3} = -\frac{II'}{c^2} \oint \oint \frac{(d\mathbf{r} \cdot d\mathbf{r}')(\mathbf{r} - \mathbf{r}')}{|\mathbf{r} - \mathbf{r}'|^3}$$



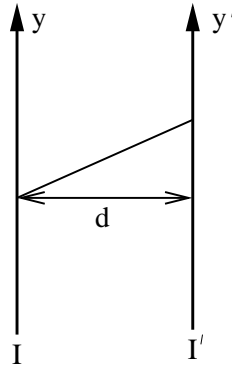
Nebenrechnung:  $\varepsilon_{ijk} dx_j \varepsilon_{klm} dx'_l (x_m - x'_m) = dx'_i dx_j (x_j - x'_j) - (x_i - x'_i) dx_j dx'_j$

$$\mathbf{F}(\mathbf{r} - \mathbf{r}') = \frac{1}{c^2} II' \oint \oint \frac{1}{|\mathbf{r} - \mathbf{r}'|^3} \{ -d\mathbf{r} \cdot d\mathbf{r}' (\mathbf{r} - \mathbf{r}') + d\mathbf{r}' (d\mathbf{r} \cdot (\mathbf{r} - \mathbf{r}')) \}$$

$$2. \text{ Integral } \oint d\mathbf{r} \frac{(\mathbf{r} - \mathbf{r}')}{|\mathbf{r} - \mathbf{r}'|^3} = - \oint d\mathbf{r} \cdot \nabla \left( \frac{1}{|\mathbf{r} - \mathbf{r}'|} \right) = 0$$

**Fazit:** Parallele Ströme ziehen sich an, antiparallele stoßen sich ab (vergleiche Gedankenexperiment von kap. 1.3).

**Beispiel:** Zwei unendlich ausgedehnte parallele Leiter im Abstand  $d$



$$\mathbf{F} = -\frac{1}{c^2} II' \int_{-\infty}^{\infty} dy \int_{-\infty}^{\infty} dy' \frac{\mathbf{r} - \mathbf{r}'}{|\mathbf{r} - \mathbf{r}'|^3}$$

$$F_y = -\frac{1}{c^2} II' \int_{-\infty}^{\infty} dy \int_{-\infty}^{\infty} dy' \frac{y - y'}{|\mathbf{r} - \mathbf{r}'|^3} = 0, \quad y' = y - \tilde{y}$$

$$F_x = -\frac{1}{c^2} II' \int_{-\infty}^{\infty} dy \int_{-\infty}^{\infty} d\tilde{y} \frac{d}{(d^2 + \tilde{y}^2)^{3/2}} = -\frac{II' 2}{c^2 d} \int_{-\infty}^{\infty} dy,$$

d.h. Kraft/Länge  $F_x/L = -(2/c^2 d) II'$  (so kann Ampere definiert werden).

## 2.4.2 Ströme im äußeren Magnetfeld $\mathbf{B}^{\text{ext}}(\mathbf{r})$

Betrachte wieder eine lokalisierte Stromdichte  $\mathbf{j}(\mathbf{r})$ , konzentriert um  $\mathbf{r} = 0$ , welche durch Multipole beschreibbar ist. Die Kraft auf die Stromverteilung durch das äußere Feld ist:

$$\begin{aligned}\mathbf{F}_{\text{magn}} &= \int d^3r \frac{1}{c} \mathbf{j}(\mathbf{r}) \times \mathbf{B}^{\text{ext}}(\mathbf{r}) \\ \mathbf{B}^{\text{ext}}(\mathbf{r}) &= \mathbf{B}^{\text{ext}}(0) + x_i (\partial_i \mathbf{B}^{\text{ext}}(\mathbf{r}))_{\mathbf{r}=0} + \frac{1}{2} x_i x_j (\partial_i \partial_j \mathbf{B}^{\text{ext}}(\mathbf{r}))_{\mathbf{r}=0} + \dots\end{aligned}$$

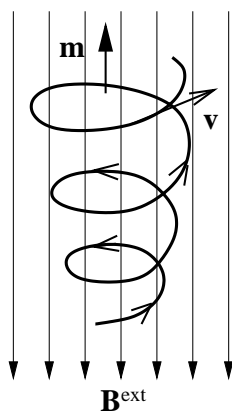
Im Bereich der Stromverteilung  $\mathbf{j}(\mathbf{r})$  seien keine Quellen der äußeren Felder i.e.  $\nabla \times \mathbf{B}^{\text{ext}} = 0$  ( $\partial_i B_j^{\text{ext}} = \partial_j B_i^{\text{ext}}$ ).  $\rightarrow$

$$\begin{aligned}\int d^3r \mathbf{j} \times (\mathbf{r} \cdot \nabla) \mathbf{B}^{\text{ext}} &= \frac{1}{2} \int d^3r [\mathbf{j}(\mathbf{r} \cdot \nabla) - \mathbf{r}(\mathbf{j} \cdot \nabla)] \times \mathbf{B}^{\text{ext}} \\ &= \frac{1}{2} \int d^3r [(\mathbf{r} \times \mathbf{j}) \times \nabla] \times \mathbf{B}^{\text{ext}} \\ &= c(\mathbf{m} \times \nabla) \times \mathbf{B}^{\text{ext}} = c[\nabla(\mathbf{m} \cdot \mathbf{B}^{\text{ext}}) - \underbrace{\mathbf{m}(\nabla \cdot \mathbf{B}^{\text{ext}})}_{=0}]\end{aligned}$$

Außerdem wurde schon gezeigt, daß  $\int d^3r \mathbf{j}(\mathbf{r}) = 0$ . Damit

$$\mathbf{F}_{\text{magn}} = (\mathbf{m} \cdot \nabla) \mathbf{B}^{\text{ext}}(\mathbf{r}) \Big|_{\mathbf{r}=0} + \dots$$

**Beispiel:** Spiralbewegung eines geladenen Teilchens in einem homogenen Magnetfeld (Lorentzkraft führt zur Kreisbewegung). Im Zeitmittel ist mit der Bahn des Teilchens ein magnetisches Moment verknüpft. Bei einer kleinen Inhomogenität im Feld  $\mathbf{B}^{\text{ext}}$  wirkt die obige Kraft in die Richtung schwächerer Flußdichte (unabhängig vom Vorzeichen der Ladung des Teilchens.)



Analog kann das **Drehmoment** bestimmt werden

$$\begin{aligned}
\mathbf{N}_{\text{magn}} &= \frac{1}{c} \int d^3r \mathbf{r} \times [\mathbf{j} \times \mathbf{B}^{\text{ext}}(\mathbf{r})] \\
&= \frac{1}{c} \int d^3r \left[ \mathbf{j}(\mathbf{r} \mathbf{B}^{\text{ext}}(0)) - \underbrace{(\mathbf{r} \cdot \mathbf{j})}_{=0} \mathbf{B}^{\text{ext}}(0) + O(\partial_i \mathbf{B}^{\text{ext}}) \right] \\
&= \frac{1}{2c} \int d^3r [\mathbf{j}(\mathbf{r} \cdot \mathbf{B}^{\text{ext}}) - \mathbf{r}(\mathbf{j} \cdot \mathbf{B}^{\text{ext}})] \\
&= \frac{1}{2} \int d^3r (\mathbf{r} \times \mathbf{j}) \times \mathbf{B}^{\text{ext}}(0)
\end{aligned}$$

$$\mathbf{N}_{\text{magn}} = \mathbf{m} \times \mathbf{B}^{\text{ext}}(0) + \dots$$

Wir sind jetzt in der Lage, die Energie über die gegen die Kräfte  $\mathbf{F}_{\text{magn}}$  und Drehmomente  $\mathbf{N}_{\text{magn}}$  zu leistenden Arbeit auszurechnen. Dabei nehmen wir  $\mathbf{B}^{\text{ext}}$  als zeitlich konstant an.

$$-\delta W = \mathbf{F} \delta \mathbf{r} + \mathbf{N} \delta \varphi$$

(Translation + Rotation des Dipols). Mit  $\nabla \times \mathbf{B}^{\text{ext}} = 0$  und  $\delta \mathbf{m} = \delta \varphi \times \mathbf{m}$  folgt

$$\begin{aligned}
-\delta W &= \nabla(\mathbf{m} \cdot \mathbf{B}^{\text{ext}}(0)) \delta \mathbf{r} + (\mathbf{m} \times \mathbf{B}^{\text{ext}}(0)) \delta \varphi \\
&= \delta(\mathbf{m} \times \mathbf{B}^{\text{ext}}(0)) + \delta \mathbf{m} \cdot \mathbf{B}^{\text{ext}}(0)
\end{aligned}$$

$$W_{\text{magn}} = -\mathbf{m} \mathbf{B}^{\text{ext}}(0) + \dots O(\partial_i \mathbf{B}^{\text{ext}}(0))$$

Dieser Ausdruck ist aber **nicht** die Gesamtenergie des magn. Moments im äußeren Feld. Um den Dipol  $\mathbf{m}$  in seine Endposition zu bringen muß gleichzeitig Arbeit geleistet werden, um den Strom  $\mathbf{j}(\mathbf{r})$ , der  $\mathbf{m}$  produziert, konstant zu halten. Obwohl der Endzustand stationär ist, gibt es eine Übergangsperiode, in der zeitabhängige Felder betrachtet werden müssen.

### 2.4.3 Energie stationärer magnetischer Felder

Idee analog zu 2.3.1 in Elektrostatik: betrachte Arbeit an Punktladungen  $q_i$  bei Bewegung  $\delta \mathbf{r}_i = \mathbf{v}_i \delta t$  in der Zeit  $\delta t$  gegen die Felder  $\mathbf{E}$  und  $\mathbf{B}$ . Aber: Magnetfeld verrichtet keine Arbeit an den Ladungen:

$$\begin{aligned}
\delta W_{\text{magn}} &= - \sum_{i=1}^N \delta \mathbf{r}_i q_i \left[ \mathbf{E}(\mathbf{r}_i) + \frac{1}{c} \mathbf{v}_i \times \mathbf{B}(\mathbf{r}_i) \right], \quad \delta \mathbf{r}_i \parallel \delta \mathbf{v}_i \\
&= -\delta t \sum_{i=1}^N q_i \mathbf{v}_i \mathbf{E}(\mathbf{r}_i) \\
&= -\delta t \int_V d^3r \mathbf{j}(\mathbf{r}, t) \mathbf{E}(\mathbf{r}, t) \quad \text{mit } \mathbf{j} = \sum_{i=1}^N q_i \mathbf{v}_i \delta(\mathbf{r} - \mathbf{r}_i)
\end{aligned}$$

→ magnetische Feldenergie wird lediglich über das Induktionsgesetz über  $\dot{\mathbf{B}}$  aufgebaut. Bei langsamer Veränderung induziertes  $\mathbf{E}$ -Feld ( $\dot{\mathbf{E}} = 0$  angenommen)  $\nabla \times \mathbf{E} = -\frac{1}{c} \frac{\partial}{\partial t} \mathbf{B}$ ,  $\nabla \times \mathbf{B} = \frac{4\pi}{c} \mathbf{j} + \left(\frac{1}{c} \frac{\partial}{\partial t} E\right)$

$$\begin{aligned} \delta W_{\text{magn}} &= -\delta t \frac{c}{4\pi} \int_V d^3r \mathbf{E}(\nabla \times \mathbf{B}) = -\frac{c}{4\pi} \delta t \int_V d^3r \{ \mathbf{B} \cdot (\nabla \times \mathbf{E}) + \nabla \cdot (\mathbf{B} \times \mathbf{E}) \} \\ &= -\frac{c}{4\pi} \delta t \int_V d^3r \left( -\mathbf{B} \frac{1}{c} \frac{\partial}{\partial t} \mathbf{B} \right) - \frac{c}{4\pi} \delta t \oint_{\partial V} \underbrace{d\mathbf{a} (\mathbf{B} \times \mathbf{E})}_{\sim R^2(1/R^2)(1/R^2) \sim 1/R^2} \end{aligned}$$

d.h. Einschaltvorgänge sind wesentlich! Damit gilt im Limes  $V \sim R^3 \rightarrow \infty$ :

$$W_{\text{magn}} = \int \delta W_{\text{magn}} = \frac{1}{8\pi} \int_{-\infty}^t \delta t \frac{\partial}{\partial t} \int_V d^3r \mathbf{B}^2 \quad \rightarrow \quad \boxed{W_{\text{magn}} = \frac{1}{8\pi} \int d^3r \mathbf{B}^2(\mathbf{r})}$$

magnetische Energiedichte  $w_{\text{magn}} = \frac{1}{8\pi} \mathbf{B}^2$  analog zur Elektrostatik. Weitere Formeln für  $W_{\text{magn}}$  folgen mit  $\mathbf{B} = \nabla \times \mathbf{A}$  und der Darstellung von  $\mathbf{A}$  über  $\mathbf{j}$

$$\boxed{W_{\text{magn}} = \frac{1}{2c} \int d^3r \mathbf{j}(\mathbf{r}) \mathbf{A}(\mathbf{r}) = \frac{1}{2c^2} \int d^3r d^3r' \frac{\mathbf{j}(\mathbf{r}) \cdot \mathbf{j}(\mathbf{r}')}{|\mathbf{r} - \mathbf{r}'|}}$$

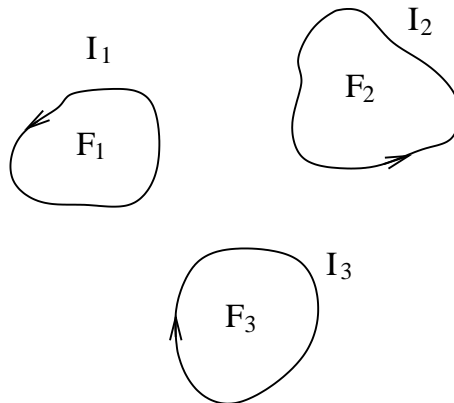
benutze dabei

$$\begin{aligned} \int_V \mathbf{B}(\nabla \times \mathbf{A}) d^3r &= \int_V [\mathbf{A}(\nabla \times \mathbf{B}) + \nabla(\mathbf{A} \times \mathbf{B})] d^3r \\ &= \frac{4\pi}{c} \int d^3r \mathbf{A} \mathbf{j} + O\left(\frac{1}{R}\right) \end{aligned}$$

Die Schreibweise  $w_{\text{magn}} \sim \mathbf{B}^2$  ist vorzuziehen, da sie am besten ausdrückt, daß die Energie über den gesamten Raum verteilt ist, und nicht nur dort, wo  $\mathbf{j} \neq 0$ .

#### 2.4.4 Induktionskoeffizienten

Betrachte Kreisströme  $I_1, I_2, \dots$  durch die Ränder  $\partial F_1, \partial F_2, \dots$  der Flächen.



Die Stromdichteverteilung in den Leitern sei fest vorgegeben

$$\mathbf{A}(\mathbf{r}) = \frac{1}{c} \int d^3r' \frac{\mathbf{j}(\mathbf{r}')}{|\mathbf{r} - \mathbf{r}'|} = \frac{1}{c} \sum_{i=1}^N \int_{\partial F_i} d\mathbf{r}_i \frac{I_i}{|\mathbf{r} - \mathbf{r}_i|}$$

Betrachte **magnetische Flüsse**

$$\begin{aligned}\phi_{\text{magn}}^{(i)} &= \int_{F_i} d\mathbf{a} \mathbf{B}(\mathbf{r}) = \int_{F_i} d\mathbf{a} (\nabla \times \mathbf{A}) \\ &= \oint_{\partial F_i} d\mathbf{r}_i A(\mathbf{r}_i) = \frac{1}{c} \sum_j \oint_{\partial F_i} \oint_{\partial F_j} d\mathbf{r}_i \mathbf{r}_j \frac{I_j}{|\mathbf{r}_i - \mathbf{r}_j|}\end{aligned}$$

$L_{ii}$  Selbstinduktivität,  $L_{ij}$  Gegeninduktivität

$$\begin{aligned}\Phi_{\text{magn}}^{(i)} &=: c \sum_j L_{ij} I_j \\ L_{ij} &= \frac{1}{c^2} \oint_{\partial F_i} \oint_{\partial F_j} d\mathbf{r}_i \mathbf{r}_j \frac{1}{|\mathbf{r}_i - \mathbf{r}_j|}\end{aligned}$$

**Induktionskoeffizienten**  $L_{ij}$ . Für  $L_{ii}$  müssen die Stromverteilungen im Leiter berücksichtigt werden! Der Leiter ist dann nicht mehr als unendlich dünn zu betrachten.

$$\begin{aligned}[L_{ij}] &= \frac{\text{Länge}}{c^2} = 1 \text{ Henry für } L \\ 1 \text{ Henry} &= \frac{\text{Vs}}{\text{A}} = \frac{1}{9} \cdot 10^{-11} \frac{\text{sec}^2}{\text{cm}}\end{aligned}$$

Charakteristische Länge für 1 Henry:  $c^2 \cdot \frac{1}{9} \cdot 10^{-11} \frac{\text{sec}^2}{\text{cm}} = 9 \cdot 10^{20} \cdot \frac{1}{9} \cdot 10^{-11} \text{cm} = 10^4 \text{km!}$

Mit den Induktionskoeffizienten  $L_{ij}$  läßt sich die magnetische Energie nach einfachen Umformungen in folgender Form schreiben:

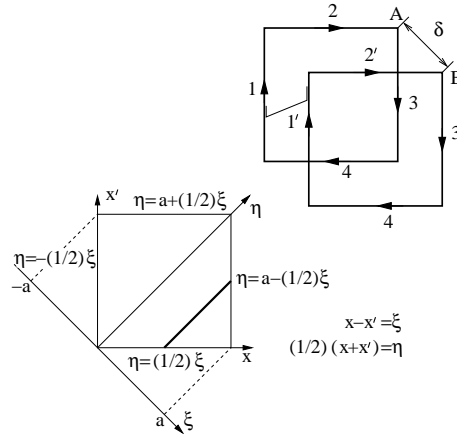
$$W_{\text{magn}} = \frac{1}{2c} \int d^3r \mathbf{j}(\mathbf{r}) \mathbf{A}(\mathbf{r}) = \frac{1}{2c} \sum_{i=1}^N \oint_{\partial F_i} d\mathbf{r}_i \mathbf{A}(\mathbf{r}_i) I_i$$

$$W_{\text{magn}} = \frac{1}{2c} \sum_{i=1}^N I_i \Phi_{\text{magn}}^{(i)} = \frac{1}{2} \sum_{i,j=1}^N L_{ij} I_i I_j$$

Da  $W_{\text{magn}} \geq 0 \rightarrow$  Matrix  $L_{ij}$  ist positiv definit, symmetrisch. Bei der Berechnung der Selbstinduktivität müssen wir den Leiterquerschnitt als endlich annehmen!

$$L_{ij} = \frac{1}{c^2} \frac{1}{I_i I_j} \int_{V_i} \int_{V_j} d^3r_i d^3r'_j \frac{\mathbf{j}(\mathbf{r}_i) \mathbf{j}(\mathbf{r}'_j)}{|\mathbf{r}_i - \mathbf{r}'_j|}$$

**Beispiel 1:** Betrachte zwei quadratische Drahtbügel mit Kantenlänge  $a$  im Abstand  $\delta$ .



Nur parallel (oder antiparallel) gerichtete Drahtstücke geben einen Beitrag

$$\begin{aligned}
 L_{AB} &= 4L_{11'} - 4L_{13'} \\
 c^2 L_{11'} &= \int_0^a dx \int_0^a dx' ((x-x')^2 + \delta^2)^{1/2} \\
 &= 2 \int_0^a d\xi \frac{1}{(\xi^2 + \delta^2)^{1/2}} \int_{(1/2)\xi}^{a-(1/2)\xi} d\eta \\
 &= 2a \ln \left[ \frac{(a^2 + \delta^2)^{1/2} + a}{\delta} \right] - 2(a^2 + \delta^2)^{1/2} + 2\delta \\
 L_{13'} &= L_{11'}(\delta \rightarrow (a^2 + \delta^2)^{1/2})
 \end{aligned}$$

Wenn  $a \approx \delta$ , dann ist  $L$  von der Ordnung  $a/c^2$ .

Jetzt betrachten wir folgende drei Fälle:

(i)  $a = \delta$ , dann

$$L_{AB} = \frac{8a}{c^2} \left[ \ln \frac{2 + \sqrt{2}}{\sqrt{3} + 1} + 1 + \sqrt{3} - 2\sqrt{2} \right] \approx 0.99 \frac{a}{c^2}$$

(ii)  $\delta \rightarrow 0$ , dann

$$L_{AB} = \frac{8a}{c^2} \left[ \ln \frac{a}{\delta} + \ln \frac{2}{\sqrt{2} + 1} + \sqrt{2} - 2 \right] \approx \frac{8a}{c^2} \left[ \ln \frac{a}{\delta} - 0.77 \right]$$

(iii)  $\delta \rightarrow \infty$ , dann

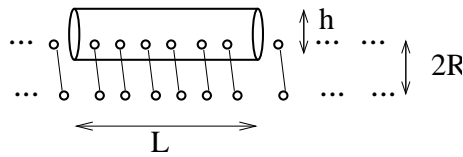
$$L_{AB} \approx \frac{a}{c^2} \left( \frac{a}{\delta} \right)^3$$

**Beispiel 2: Selbstinduktivität** einer unendlichlangen zylindrischen Spule

$$W_{\text{magn}} = \frac{1}{8\pi} \int \mathbf{B}^2 d^3r = \frac{1}{2} L_{11} I^2$$

$\mathbf{B} = \text{const} = 0$  außerhalb der Spule mit  $\text{div } \mathbf{B} = \text{rot } \mathbf{B} = 0$ ;  $\mathbf{B} = \text{const}$  innerhalb,

$$\oint \mathbf{B} d\mathbf{r} = \frac{4\pi}{c} \int d\mathbf{a} \mathbf{j}$$



$$LBh = \frac{4\pi}{c} NIh, \quad B = \frac{N}{L} \frac{4\pi}{c} I$$

$n = N/L$  Windungen pro Längeneinheit

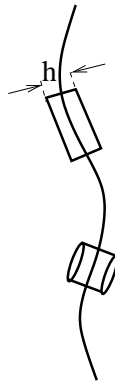
$$W_{\text{magn}} = \frac{1}{8\pi} \left( n \frac{4\pi}{c} I \right)^2 \pi R^2 L = \frac{1}{2} L_{11} I^2$$

$$L_{11} = 4\pi^2 \frac{1}{c^2} n^2 R^2 L = 4\pi^2 \frac{N^2}{c^2} \frac{R^2}{L}$$

## 2.5 Das Feld geladener Leiter

**Feld im Leiter:** Ladungen sind frei beweglich, Ladungsverteilung stellt sich so ein, daß Kräfte auf Ladungen verschwinden  $\rightarrow \mathbf{E} = 0 \rightarrow \phi = \text{const}$  im Leiter.  $\text{div } \mathbf{E} = 4\pi\rho = 0 \rightarrow$  Ladungen müssen sich auf Oberfläche befinden. (Tatsächlich befinden sich die Ladungen 1-2 atomare Schichten unter der Oberfläche, wir betrachten dies als Flächenladungsdichte.)

**Feld auf Leiteroberfläche:**



$\nabla \times \mathbf{E} = 0$ ,  $\mathbf{E} = 0$  im Leiter. Stokes  $0 = \oint \mathbf{E} d\mathbf{r} = \int E_t ds$

$$\mathbf{E}_{\text{tangential}}^{(\text{außen})} = \mathbf{E}_t = 0$$

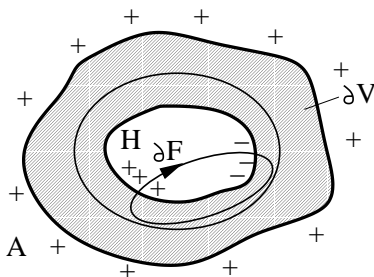
$\rightarrow \mathbf{E}$  steht senkrecht auf Leiteroberfläche (ansonsten würden sich Ladungen bewegen).  $\nabla \cdot \mathbf{E} = 4\pi\rho \rightarrow \int_{\delta V} d^3r \nabla \cdot \mathbf{E} = \int_{\delta F} da E_n = 4\pi \int_{\delta V} d^3r \rho = 4\pi \int_{\delta F} da \sigma(\mathbf{r})$

$$\mathbf{E}_{\text{normal}}^{(\text{außen})} = \mathbf{E}_n = 4\pi\sigma(\mathbf{r})$$

→  $\mathbf{E}$  springt von 0 auf  $\mathbf{E}_n$  beim Durchgang durch die Leiteroberfläche. (Bei einer geladenen Fläche, die keine Leiteroberfläche ist, gilt  $E_n = 2\pi\sigma$ , da beim Gaußschen Satz beide Flächen des Volumens  $\delta V$  einen Beitrag geben.)

### Feld im Hohlraum eines Leiters

Betrachte Hohlraum, der vollständig vom Leiter umschlossen ist. Dann ist das Feld im Innern des Hohlraums gleich Null.



$\partial V$ : Oberfläche, die den Hohlraum völlig umschließt, aber immer im Inneren des Leiters liegt

$$\oiint_{\partial V} d\mathbf{a} \mathbf{E} \stackrel{\mathbf{E}=0 \text{ im Leiter}}{=} 0 = 4\pi \int_V d^3r \rho = 4\pi Q_V = 0$$

d.h. die von  $\partial V$  eingeschlossene gesamtladung  $Q_V$  verschwindet. Können sich auf der Oberfläche des Hohlraums Ladungen befinden, die sich zur Gesamtladung Null kompensieren? Betrachte geschlossene Schleife  $\partial F$

$$\oiint_F (\nabla \times \mathbf{E}) d\mathbf{a} = 0 = \oint_{\partial F} d\mathbf{r} \mathbf{E} = \underbrace{\int_{\partial F_1} d\mathbf{r} \mathbf{E}}_{= 0 \text{ im Leiter}} + \underbrace{\int_{\partial F_2} d\mathbf{r} \mathbf{E}}_{\text{im Hohlraum}}$$

→  $\mathbf{E} = 0$  im Inneren des Hohlraums.

Auch die Umkehrung ist möglich: Befinden sich Ladungen im Hohlraum, so erzeugen diese außerhalb des Leiters (im Außenraum A) kein Feld, wenn der Leiter geerdet ist.

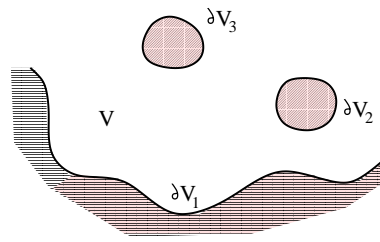
## 2.6 Elektrostatische Randwertaufgaben

Bisher wurde stets die Ladungsverteilung vorgegeben und dann nach Feldern gesucht, die im Unendlichen hinreichend stark abfallen. D.h. "Randbedingung"  $\phi(\mathbf{r}) = O(\frac{1}{r})$  für  $|\mathbf{r}| \rightarrow \infty$ .

Jetzt wollen wir die **Randbedingungen im Endlichen vorgeben**:

z.B. **Dirichlet-Randbedingungen**:  $\phi$  ist auf  $\partial V$  vorgegeben (z.B. bei Leitern)

oder **von Neumannsche-Randbedingung**:  $E_n = -\frac{\partial \phi}{\partial n}$  (wenn beide gleichzeitig vorgegeben werden, so führt das i.a. zum Widerspruch!)



Gefragt ist also nach einer Lösung der Poisson-Gleichung mit

$$\Delta\phi = -4\pi\rho(\mathbf{r})$$

für die auf den Flächen  $\partial V_i$  entweder  $\phi$  oder  $\partial\phi/\partial n$  vorgegeben ist.

**Formale Lösung:** Suche Greensche Funktion  $G(\mathbf{r}, \mathbf{r}')$ , d.h. löse Problem für Einheitsladung  $q = 1$  am Punkt  $\mathbf{r} = \mathbf{r}'$

$$\Delta_{\mathbf{r}}G(\mathbf{r}, \mathbf{r}') = -4\pi\delta(\mathbf{r} - \mathbf{r}')$$

Eine spezielle Lösung (der inhomogenen Gleichung) ist (siehe 1.5.1)

$$\tilde{G}(\mathbf{r}, \mathbf{r}') = \frac{1}{|\mathbf{r} - \mathbf{r}'|}.$$

Sie ist aber wegen der Randbedingungen nicht ausreichend. Wir addieren daher zu ihr die **allgemeine Lösung**  $F(\mathbf{r}, \mathbf{r}')$  der homogenen (**Laplace-**) **Gleichung**

$$\Delta_{\mathbf{r}}F(\mathbf{r}, \mathbf{r}') = 0$$

Dann folgt

$$G(\mathbf{r}, \mathbf{r}') = \frac{1}{|\mathbf{r} - \mathbf{r}'|} + F(\mathbf{r}, \mathbf{r}')$$

Verbinde jetzt  $\phi$  mit  $G$ . Benutze hierzu die zweite Greensche Formel

$$\int_V (\varphi \Delta\psi - \psi \Delta\varphi) d^3r = \oint_{\partial V} [\varphi \nabla\psi - \psi \nabla\varphi] d\mathbf{a}$$

in der wir  $\psi$  durch  $G$  ersetzen und  $\varphi$  durch  $\phi$

$$\begin{aligned} \int_V [\phi(\mathbf{r}') \Delta_{\mathbf{r}'}G(\mathbf{r}', \mathbf{r}) - G(\mathbf{r}', \mathbf{r}) \Delta\phi] d^3r' &= \\ &= \iint d\mathbf{a}' [\phi \nabla_{\mathbf{r}'}G(\mathbf{r}', \mathbf{r}) - G(\mathbf{r}', \mathbf{r}) \nabla_{\mathbf{r}'}\phi] \end{aligned}$$

$$(\Delta_{\mathbf{r}'}G(\mathbf{r}', \mathbf{r}) = -4\pi\delta(\mathbf{r} - \mathbf{r}'), \Delta\phi = -4\pi\rho(\mathbf{r}'))$$

Für  $\mathbf{r}$  innerhalb von  $V$  gilt dann die formale Lösung des Potentialproblems

$$\phi(\mathbf{r}) = \int_V \rho(\mathbf{r}') G(\mathbf{r}', \mathbf{r}) d^3 r' - \frac{1}{4\pi} \iint_{\partial V} d\mathbf{a}' [\phi(\mathbf{r}') \nabla_{\mathbf{r}'} G(\mathbf{r}', \mathbf{r}) - G(\mathbf{r}', \mathbf{r}) \nabla_{\mathbf{r}'} \phi(\mathbf{r}')] ]$$

Die Freiheit in der Wahl von  $F(\mathbf{r}, \mathbf{r}')$  erlaubt, in dem Oberflächenintegral jeweils einen Term zu Null zu machen.

Für die **Dirichlet-Randbedingung** gilt  $G_D(\mathbf{r}', \mathbf{r}) = 0$  für  $\mathbf{r}'$  auf  $\partial V$ , d.h. für  $F(\mathbf{r}, \mathbf{r}')$  ist der Wert auf  $\partial V$  vorgegeben.

$$\phi(\mathbf{r}) = \int_V \rho(\mathbf{r}') G_D(\mathbf{r}', \mathbf{r}) d^3 r' - \frac{1}{4\pi} \iint_{\partial V} d\mathbf{a}' \phi(\mathbf{r}') \nabla_{\mathbf{r}'} G_D(\mathbf{r}', \mathbf{r})$$

d.h.  $F(\mathbf{r}, \mathbf{r}')$  wird so bestimmt, daß  $G_D(\mathbf{r}', \mathbf{r})$  auf  $\partial V$  verschwindet. Man kann zeigen, daß  $G_D(\mathbf{r}', \mathbf{r}) = G_D(\mathbf{r}, \mathbf{r}')$  gilt (über zweite Greensche Formel).

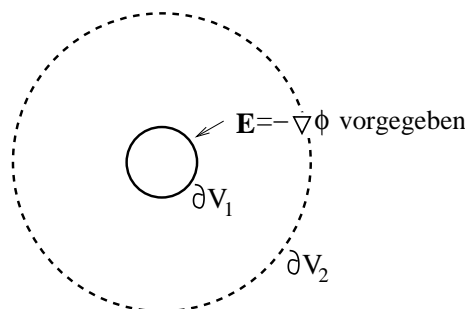
Für **von Neumannsche Randbedingungen** ist eine einleuchtende Wahl  $\nabla_{\mathbf{r}'} G_N(\mathbf{r}', \mathbf{r}) = 0$  für  $\mathbf{r}'$  auf  $\partial V$ . Aber aus

$$\int_V d^3 r' \Delta_{\mathbf{r}'} G_N(\mathbf{r}', \mathbf{r}) = \oiint_{\partial V} \frac{\partial G_N}{\partial n'} da' = -4\pi$$

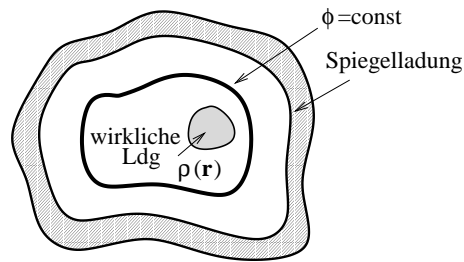
folgt, daß diese Wahl nicht überall möglich ist. Die einfachste Wahl ist daher  $\partial G_N / \partial n' = -4\pi / F$  mit  $F$  Flächeninhalt von  $\partial V$

$$\phi(\mathbf{r}) = \int_V \rho(\mathbf{r}') G_N(\mathbf{r}', \mathbf{r}) d^3 r' + \frac{1}{4\pi} \int_{\partial V} d\mathbf{a}' G_N(\mathbf{r}', \mathbf{r}) \nabla_{\mathbf{r}'} \phi(\mathbf{r}') + \frac{1}{F} \int d\mathbf{a}' \phi(\mathbf{a}')$$

Für den wichtigen Fall des äußeren Neumannschen Problems ist  $F = \infty$ , also verschwindet der letzte Term.

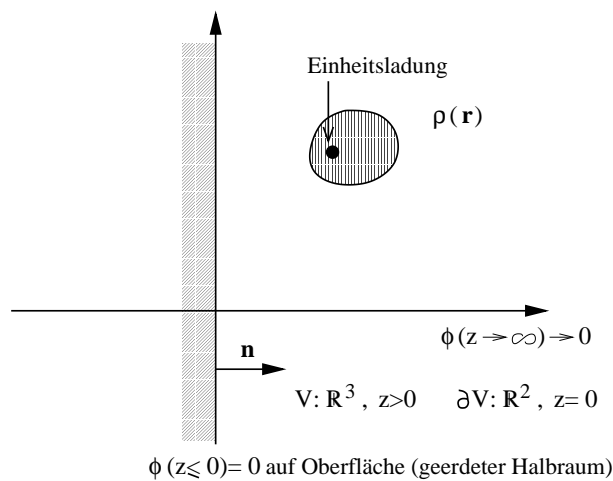


Die Eindeutigkeit der Lösung wurde schon früher bewiesen (in 1.3). Wir wollen jetzt annehmen,  $\phi$  sei auf  $\partial V$  vorgegeben. Die Randbedingungen können künstlich durch Ladungsverteilung außerhalb des Volumens  $V$  erzeugt werden: **Spiegelladungsmethode**



**Beispiel 1:**

**Beispiel 2:** Leitender Halbraum, davor Ladungsverteilung  $\rho(\mathbf{r})$



$$V : \mathbb{R}^3, z > 0; \partial V : \mathbb{R}^2, z = 0$$

$$\phi(z \rightarrow \infty) \rightarrow 0, \phi(z \leq 0) = 0$$

Für die Dirichlet-Randbedingungen ist die Lösung gefunden, wenn die Greensche Funktion bekannt ist

$$\Delta_{\mathbf{r}} G_D(\mathbf{r}, \mathbf{r}') = -4\pi\delta(\mathbf{r} - \mathbf{r}').$$

$V$  ist rechter Halbraum, Potential einer Einheitsladung an  $\mathbf{r}'$

$$\begin{aligned} G_D(\mathbf{r}, \mathbf{r}') &= \frac{1}{|\mathbf{r} - \mathbf{r}'|} + F_D(\mathbf{r}, \mathbf{r}') \\ \Delta_{\mathbf{r}} F_D(\mathbf{r}, \mathbf{r}') &= 0 \end{aligned}$$

Die Randbedingung lautet  $G_D(\mathbf{r}, \mathbf{r}') = 0$  für  $\mathbf{r} = (x, y, z = 0)$ , d.h.  $F(\mathbf{r}, \mathbf{r}') = -\frac{1}{|\mathbf{r} - \mathbf{r}'|}$  für  $z = 0$ . Es liegt nahe, daß  $F(\mathbf{r}, \mathbf{r}')$  von einer Spiegelladung herrührt, die symmetrisch liegt. Ort der Spiegelladung sei  $\mathbf{r}'_B$ :  $x'_B = x', y'_B = y', z'_B = -z'$

$$\begin{aligned} \mathbf{r}'_B &= \mathbf{r}' - 2\mathbf{n}(\mathbf{n} \cdot \mathbf{r}') \\ F_D(\mathbf{r}, \mathbf{r}') &= -\frac{1}{|\mathbf{r} - \mathbf{r}'_B|} \end{aligned}$$

$$G_D(\mathbf{r}, \mathbf{r}') = \frac{1}{|\mathbf{r} - \mathbf{r}'|} - \frac{1}{|\mathbf{r} - \mathbf{r}' + 2\mathbf{n}(\mathbf{n} \cdot \mathbf{r}')|}$$

$$\phi(\mathbf{r}) = \int_V \rho(\mathbf{r}') G_D(\mathbf{r}', \mathbf{r}) d^3r'$$

Tatsächlich existieren die Spiegelladungen nicht, sondern  $\rho(\mathbf{r})$  induziert auf der Leiteroberfläche **Influenzladungen** mit der Dichte  $\sigma(\mathbf{r}) = E_n(\mathbf{r})/4\pi$ .

$$E_n(\mathbf{r}) = \int_V \rho(\mathbf{r}') \left\{ \frac{\mathbf{r} - \mathbf{r}'}{|\mathbf{r} - \mathbf{r}'|^3} - \frac{\mathbf{r} - \mathbf{r}' + 2\mathbf{n}(\mathbf{n} \cdot \mathbf{r}')}{|\mathbf{r} - \mathbf{r}' + 2\mathbf{n}(\mathbf{n} \cdot \mathbf{r}')|^3} \right\} d^3r'.$$

Mit  $\int_V \rho(\mathbf{r}) d^3r = Q$  muß  $\int_{\partial V} \sigma(\mathbf{r}) da = -Q$  gelten (Gaußscher Satz für Volumen, das  $\rho$  und die Oberfläche einschließt).

Da  $\partial V$  durch  $z = 0$  gegeben ist, kann man  $\{ \}$  umschreiben

$$\sigma(\mathbf{r}) = - \int_V \rho(\mathbf{r}') \frac{2z' d^3r'}{|\mathbf{r} - \mathbf{r}'|^3 4\pi},$$

d.h. die Influenzladung hat entgegengesetztes Vorzeichen zu  $\rho$ .

→ Wenn der Leiter fest und die Ladungsverteilung  $\rho$  frei beweglich ist, dann wirkt auf  $\rho$  eine Kraft hin zur Metalloberfläche. Z.B. ist die Kraft auf eine Ladung  $q$  im Punkt  $\mathbf{r} = (x, y, a)$ ,  $\rho(\mathbf{r}') = q\delta(\mathbf{r} - \mathbf{r}')$ ,  $F = q\mathbf{E}(\mathbf{r}) = -q^2 \frac{\mathbf{n}}{(2a)^2}$  ( $\sim$  Kraft von Spiegel- oder Influenzladung auf freie Ladung).

Wir können jetzt **zusätzliche** Ladung  $\sigma_0 F$  auf die Leiteroberfläche (mit Flächeninhalt  $F \rightarrow \infty$ ) bringen. Diese Ladung wird sich dann gleichmäßig auf  $F$  verteilen, da die elektrostatischen Kräfte schon durch Influenzladungen in Balance sind.

$$E_n(\mathbf{r}) = 4\pi(\sigma_0 + \sigma(\mathbf{r}))$$

Die Kraft auf eine Ladung  $q$  ist dann

$$\mathbf{F} = q\mathbf{n} \left( 4\pi\sigma_0 - \frac{q}{4a^2} \right),$$

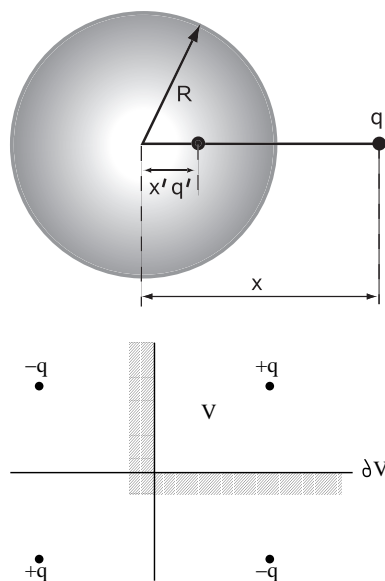
d.h. für Abstände  $a < a_1 = \frac{1}{4}(q/\pi\sigma_0)^{1/2}$  ist **immer Anziehung** vorhanden, **unabhängig** vom Vorzeichen von  $\sigma_0$ . Dies erklärt, warum ein Überschuß an Ladung auf der Oberfläche diese nicht einfach verlassen kann.

Die aufzuwendende Arbeit ist  $W = - \int_{a_0}^{a_1} dz F \approx -8\pi\sigma_0 q a_1 + \frac{q^2}{4a_0}$ ,  $a_0$  ist eine minimale Länge, unterhalb derer man den atomistischen Aufbau des Metalls berücksichtigen muß.

**Andere Beispiele** für die Spiegelladungsmethode

Leitende Kugel (Übungsaufgabe: zwei unendlich weit entfernte Ladungen  $\pm q$  für Erzeugung eines homogenen Feldes)

Ladung zwischen zwei Metallplatten - man braucht unendlich viele Spiegelladungen



## 2.7 Kapazitätskoeffizienten

Gegeben seien  $N$  Leiter  $L_1, L_2, \dots, L_N$  mit den Potentialen  $\phi_1, \phi_2, \dots, \phi_N$  und einem **ladungsfreien** Zwischenraum.

**Frage:** Welche Ladung  $q_i$  sitzt auf den Leitern? Oder Umkehrung: Ladungen  $q_i$  gegeben, welche Potentiale?

Dirichlet–Green Funktion  $G_D(\mathbf{r}', \mathbf{r}) = 0$  für  $\mathbf{r}' \in \partial V_i$ . Potential im Zwischenraum ( $\mathbf{r} \notin \partial V_i$ )

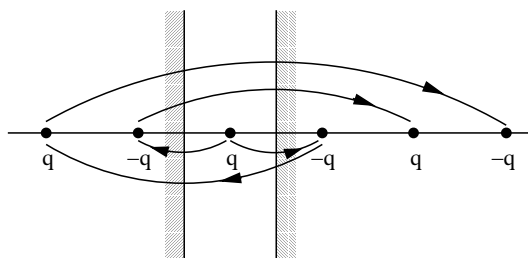
$$\phi(\mathbf{r}) = -\frac{1}{4\pi} \sum_{i=1}^N \int_{\partial V_i} d\mathbf{a}' \phi(\mathbf{r}') \nabla_{\mathbf{r}'} G_D(\mathbf{r}', \mathbf{r})$$

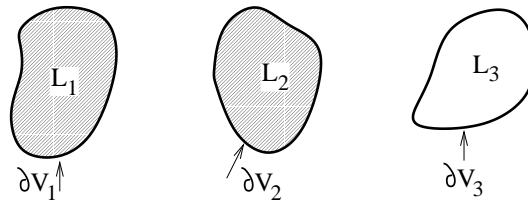
**Achtung:** das Flächenelement  $d\mathbf{a}$  zeigt aus  $V$  heraus, d.h. in den Leitern hinein!

Ladungen auf den Leitern:

$$q_i = \int_{\partial V_i} da \sigma(\mathbf{r}) = \frac{1}{4\pi} \int_{\partial V_i} da E_n = -\frac{1}{4\pi} \int_{\partial V_i} da \frac{\partial}{\partial n} \phi(\mathbf{r})$$

$E_n$  ist Oberflächenfeld,  $\frac{\partial}{\partial n}$  Ableitung nach außen.





$$q_i = \sum_{j=1}^N C_{ij} \phi_j$$

$$W_{\text{el}} = \frac{1}{2} \sum_{i=1}^N \int_{\partial V_i} da \sigma(\mathbf{r}) \phi(\mathbf{r}) = \frac{1}{2} \sum_{i=1}^N q_i \phi_i = \frac{1}{2} \sum_{i,j} C_{ij} \phi_i \phi_j = \frac{1}{2} \sum_{i,j} (C^{-1})_{ij} q_i q_j$$

$$C_{ij} = -\frac{1}{(4\pi)^2} \int_{\partial V_i} da \int_{\partial V_j} da' \frac{\partial}{\partial n} \frac{\partial}{\partial n'} G(\mathbf{r}, \mathbf{r}')$$

$$C_{ij} = C_{ji}, \quad \sum_{j=1}^N C_{ij} = 0, \quad C_{ij} \text{ positiv definit}$$

Dimension:  $C_{ij} \sim \frac{1}{(4\pi)^2} \cdot L^{2+2} \cdot \frac{1}{L^3} \sim -\frac{1}{(4\pi)^2} L$ .

Gauß-System: cm

MKSA-System:  $\frac{\text{AS}}{\text{V}} = 1 \text{ Farad} \triangleq 9 \cdot 10^{11} \text{ cm} = 9 \cdot 10^6 \text{ km}$

Geladene Kugel  $W_{\text{el}} = \frac{1}{2} q^2 C^{-1} = \frac{1}{8\pi} \int_R^\infty 4\pi r^2 dr \cdot \left(\frac{q}{r^2}\right)^2 = q^2 \frac{1}{2R}$

→  $C = R$

Spezialfall: zwei Leiter, deren Gesamtladung Null ist, bilden einen **Kondensator**.

Seine **Kapazität**  $C$  definieren wir über seine elektrostatische Energie  $W_{\text{kond}} = \frac{1}{2} \frac{q^2}{c}$ .

Beispiel: Kugelkondensator, bestehend aus zwei Kugelschalen mit den Radien  $R_i$  und  $R_a$  und den Ladungen  $q_i$  und  $q_a$

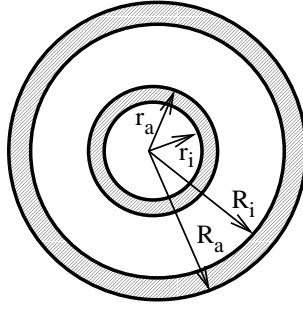
Potential für $R > R_a$	$\varphi_1 = \frac{1}{R}(q_i + q_a)$
Potential für $R_i < R < R_a$	$\varphi_2 = \frac{q_i}{R} + \frac{q_a}{R_a}$
Potential auf innerer Kugel	$\varphi_i = \varphi_2(R = R_i)$
Potential auf äußerer Kugel	$\varphi_a = \varphi_2(R = R_a)$

Wenn man  $\varphi_i$  und  $\varphi_a$  nach  $q_i$  und  $q_a$  auflöst, ergibt sich

$$C_{ij} = \frac{1}{\frac{1}{R_i} - \frac{1}{R_a}} \begin{pmatrix} R_a/R_i & -1 \\ -1 & 1 \end{pmatrix}$$

Spezialfall  $q_i = -q_a$ ,  $W = \frac{1}{2} q_a (\varphi_a - \varphi_i) \rightarrow C = 1 / (\frac{1}{R_i} - \frac{1}{R_a})$ . Wenn  $R_a \rightarrow \infty$ , dann  $C = R_i$ .

**Beispiel: Kugelkondensator mit endlich dicken Kugelschalen**



Wegen Radialsymmetrie:  $\frac{1}{r^2} \frac{d}{dr} r^2 = \frac{d}{dr} \phi(r) = 0$ , allgemeine Lösung  $\phi(r) = -\frac{a}{r} + b$

$$\begin{aligned}
 0 < r < r_i & \quad \phi_1(r) = -\frac{a_1}{r} + b_1 \\
 r_i < r < r_a & \quad \phi = \text{const} = -\frac{a_1}{r_i} + b_1 = -\frac{a_2}{r_a} + b_2 \\
 r_a < r < R_i & \quad \phi_2(r) = -\frac{a_2}{r} + b_2 \\
 R_i < r < R_a & \quad \phi = \text{const} = -\frac{a_2}{R_i} + b_2 = -\frac{a_3}{R_a} + b_3 \\
 R_a < r & \quad \phi_3(r) = -\frac{a_3}{r} + b_3
 \end{aligned}$$

6 Konstanten  $a_1 \dots b_3$ : 2 Stetigkeitsbedingungen +  $b_3 = 0$  wegen  $\phi(r \rightarrow \infty) = 0$  +  $a_1 = 0$  um Singularität auszuschließen +  $q, Q$  Gesamtladung auf innerer bzw. äußerer Schale.

**Oberflächenfeld:**

$$\begin{aligned}
 -\frac{\partial \phi_3}{\partial r} &= 4\pi \Sigma_a = -\frac{a_3}{R_a^2} \\
 +\frac{\partial \phi_2}{\partial r} \Big|_{r=R_i} &= 4\pi \Sigma_i = \frac{a_2}{R_i^2} \\
 \rightarrow 4\pi(R_a^2 \Sigma_a + R_i^2 \Sigma_i) &= Q = a_2 - a_3 \\
 -\frac{\partial \phi_2}{\partial r} \Big|_{r=r_a} &= 4\pi \sigma_a = -\frac{a_2}{r_a} \quad \rightarrow q = 4\pi \sigma_a r_a^2 = -a_2 \\
 +\frac{\partial \phi_1}{\partial r} \Big|_{r=r_i} &= 0 \quad \text{wegen } a_1 = 0, a_3 = -(q + Q) \\
 \rightarrow b_2 &= \frac{a_2}{R_i} - \frac{a_3}{R_a} = -\frac{q}{R_i} + \frac{q + Q}{R_a} \\
 b_1 &= -\frac{a_2}{r_a} + b_2 = \frac{q}{r_a} - \frac{q}{R_i} + \frac{q + Q}{R_a}
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 \phi_1 &= q \left( \frac{1}{r_a} - \frac{1}{R_i} \right) + \frac{q + Q}{R_a} \quad \text{wenn } Q = 0, \text{ dann existiert außen doch ein Feld!} \\
 \phi_2 &= \frac{q}{r} - \frac{q}{R_i} + \frac{q + Q}{R_a} \\
 \phi_3 &= \frac{q + Q}{r}
 \end{aligned}$$

Gaußscher Satz für  $R_i < r < R_a$ : Gesamtladung  $4\pi\sigma_a r_a^2 = q + 4\pi\Sigma_i R_i^2 = -q$  ist Null  $\rightarrow$  Feld im Leiter verschwindet.

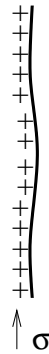
Statt der Ladungen kann man aber auch die Potentiale  $\varphi_0$  und  $\phi_0$  vorgeben

$$\begin{aligned}\phi_0 &= -\frac{a_3}{R_a} = -\frac{a_2}{R_i} + b_2 \\ \varphi_0 &= -\frac{a_2}{r_a} + b_2 \\ \phi_3(r) &= \frac{\phi_0 R_a}{r}\end{aligned}$$

Wir können aber auch die Gesamtladung  $q$  auf der inneren Kugelschale und  $\phi_0$  auf der äußeren vorgeben:

$$\begin{aligned}a_3 &= -R_a \phi_0 \\ \phi_0 &= b_2 - \frac{a_2}{R_i} \\ a_2 &= -q \\ b_2 &= \phi_0 - \frac{q}{R_i} \\ \phi_3 &= \frac{\phi_0 R_a}{r} \quad \text{bei Erdung } \phi_0 = 0 \rightarrow \text{kein Feld} \\ \phi_2 &= \frac{q}{r} + \phi_0 - \frac{q}{R_i} \\ \phi_3 &= \phi_0 - \frac{q}{R_i} + \frac{q}{r_a}\end{aligned}$$

$$\phi(\mathbf{x}) = \int \frac{\sigma(\mathbf{x}')}{|\mathbf{x} - \mathbf{x}'|} + D(\mathbf{x}') n \nabla' \frac{1}{|\mathbf{x} - \mathbf{x}'|} = \int (\sigma(\mathbf{x}') + D(\mathbf{x}') n \nabla') \frac{1}{|\mathbf{x} - \mathbf{x}'|}$$



## 2.8 Freie elektromagnetische Wellen

Setzen jetzt  $\rho = \mathbf{j} = 0$ , lassen aber zeitabhängige Felder zu  $\rightarrow$  es gibt nicht-triviale elektromagnetische Lösung  $\sim$  "Lichtquantengas" oder "freies Feld"

$$\begin{aligned}\square \mathbf{A} &= \left( \Delta - \frac{1}{c^2} \frac{\partial^2}{\partial t^2} \right) \mathbf{A} = -\frac{4\pi}{c} \mathbf{j}(\mathbf{r}, t) + \nabla \Lambda \\ \square \phi &= \left( \Delta - \frac{1}{c^2} \frac{\partial^2}{\partial t^2} \right) \phi = -4\pi \rho(\mathbf{r}, t) - \frac{1}{c} \frac{\partial}{\partial t} \Lambda\end{aligned}$$

$\Lambda = \frac{1}{c} \frac{\partial}{\partial t} \phi + \nabla \mathbf{A}$  ( $\Lambda = 0$  Lorentzzeichnung).  $\rho = \mathbf{j} \equiv 0$  und Anwendung von  $\text{rot } \mathbf{A}$   
bzw.  $\nabla \phi - \frac{1}{c} \frac{\partial}{\partial t} \mathbf{A}$

$\square \mathbf{B} = 0$ $\square \mathbf{E} = 0$	da $\nabla \times \nabla \Lambda = 0$ da $\frac{1}{c} \nabla \frac{\partial}{\partial t} \Lambda - \frac{1}{c} \frac{\partial}{\partial t} \nabla \Lambda = 0$
--	---

Betrachte spezielle Lösungen der Wellengleichung:

**Ebene Wellen:** Die Komponenten  $f(E_x, E_y, E_z, B_x, B_y, B_z)$  hängen nur von einer Ortskoordinate  $x$  ab.  $\frac{\partial^2}{\partial t^2} - c^2 \frac{\partial^2}{\partial x^2} = 0$  läßt sich sofort lösen

$$0 = (\partial_t - c\partial_x)(\partial_t + c\partial_x)f$$

Führe neue Koordinaten ein  $\xi = t - (x/c)$ ,  $\eta = t + (x/c) \rightarrow t = \frac{1}{2}(\xi + \eta)$ ,  $x = \frac{c}{2}(\eta - \xi)$

$$\begin{aligned} \partial_\xi f &= \partial_t f \left( \frac{\partial t}{\partial \xi} \right) + \partial_x f \left( \frac{\partial x}{\partial \xi} \right) = \frac{1}{2} \left( \frac{\partial}{\partial t} - c \frac{\partial}{\partial x} \right) f \\ \partial_\eta f &= \frac{1}{2} \left( \frac{\partial}{\partial t} + c \frac{\partial}{\partial x} \right) f \end{aligned}$$

$\rightarrow c^2 \square f = -\frac{\partial^2 f}{\partial \xi \partial \eta} = 0 \Rightarrow \frac{\partial f}{\partial \eta} = F(\eta)$  beliebige Funktion.  $f = f_1(\xi) + f_2(\eta)$ , wobei  $f_1$  und  $f_2$  willkürliche Funktionen sind.  $\rightarrow$  allgemeine Lösung von  $\square f = 0$  ist

$$f(x, t) = f_1\left(t - \frac{x}{c}\right) + f_2\left(t + \frac{x}{c}\right).$$

$f_1$  stellt Wellenzüge (nicht notwendig periodische) dar, die sich längs der positiven  $x$ -Achse mit Lichtgeschwindigkeit ausbreiten, denn die Amplitude bleibt dieselbe für alle Punkte, die  $t - \frac{x}{c} = \text{const}$  erfüllen, d.h. für  $x = x_0 + ct$ .

$f_2$  stellt analog Wellenzüge dar, die sich in umgekehrter Richtung bewegen.

Verallgemeinerung auf beliebige Ausbreitungsrichtung  $\mathbf{n}$

$$\begin{aligned} \mathbf{E} &= \mathbf{E}\left(\frac{\mathbf{n}\mathbf{r}}{c} - t\right) \\ \mathbf{B} &= \mathbf{B}\left(\frac{\mathbf{n}\mathbf{r}}{c} - t\right) \end{aligned}$$

$\mathbf{n}$  Einheitsvektor in Ausbreitungsrichtung.

$$\begin{aligned} \text{div } \mathbf{E} = \partial_i E_i &= -\frac{\partial E_i}{\partial \xi} \cdot \frac{n_i}{c} = 0 \quad \Big|_{\mathbf{n}=\mathbf{e}_x} \frac{\partial E_x}{\partial \xi} = 0 \rightarrow E_x = \text{const} \\ \text{div } \mathbf{B} &= 0 \quad \text{analog} \end{aligned}$$

$\rightarrow \mathbf{E}$  und  $\mathbf{B}$  können in Ausbreitungsrichtung  $\mathbf{n}$  höchstens (örtlich und zeitlich) konstante Felder sein, d.h. ebene elektromagnetische Wellen sind transversal

$$\mathbf{n} \cdot \dot{\mathbf{E}} = 0$$

$$\mathbf{n} \cdot \dot{\mathbf{B}} = 0$$

$\mathbf{E}$ ,  $\mathbf{B}$  und  $\mathbf{n}$  bilden drei aufeinander senkrechte Richtungen (Rechtssystem) wenn man zeitlich und räumlich konstante Felder außer Acht läßt:

$$\nabla \times \mathbf{E}(\varphi(\mathbf{r})) = \nabla \varphi \times \frac{\partial}{\partial \varphi} \mathbf{E}(\varphi)$$

da  $\varepsilon_{ijk} \partial_j E_k(\varphi) = \varepsilon_{ijk} \frac{\partial E_k}{\partial \varphi} \frac{\partial \varphi}{\partial x_j} = \frac{\partial \varphi}{\partial x_j} \varepsilon_{ijk} \frac{\partial E_k}{\partial \varphi}$  mit  $\varphi = \frac{\mathbf{n} \cdot \mathbf{r}}{c} - t$  und  $\text{rot } \mathbf{E} = -\frac{1}{c} \dot{\mathbf{B}} = -\frac{1}{c} \mathbf{n} \times \dot{\mathbf{E}} = -\frac{1}{c} \dot{\mathbf{B}} \rightarrow \mathbf{B} = \mathbf{n} \times \mathbf{E}$ .

Weiter folgt:  $|\mathbf{E}| = |\mathbf{B}|$ .

Wir betrachten jetzt speziell ebene **monochromatische** Wellen.

$$\mathbf{E} = \text{Re } \mathbf{E}_0 e^{i(\mathbf{k} \cdot \mathbf{r} - \omega t)}, \quad \mathbf{B} = \mathbf{n} \times \mathbf{E}_0$$

$\lambda = \frac{2\pi c}{\omega}$	Wellenlänge
$\omega$	Frequenz
$\mathbf{k} = \frac{\omega}{c} \mathbf{n}$	<b>Wellenvektor</b>
$\mathbf{k} \cdot \mathbf{r} - \omega t$	<b>Phase</b>
$\mathbf{E}_0$	Amplitude

**Polarisation monochromatischer ebener Wellen:**  $\mathbf{E}_0 = \mathbf{b} e^{i\alpha}$ ,

$$|\mathbf{E}_0|^2 = \mathbf{b}^2 = \mathbf{b} \cdot \mathbf{b}$$

$\mathbf{b} = \mathbf{b}_1 + i\mathbf{b}_2$  (Real- und Imaginärteil),  $\mathbf{b}^2 = \mathbf{b}_1^2 - \mathbf{b}_2^2 + 2i\mathbf{b}_1\mathbf{b}_2$ , da  $\mathbf{b}^2$  reell  $\mathbf{b}_1 \perp \mathbf{b}_2$ .

Wählen wir z.B.  $\mathbf{b}_1 \parallel y$ -Achse,  $\mathbf{b}_2 \parallel z$ -Achse,  $\mathbf{k} \parallel x$ -Achse. So gilt

$$\begin{aligned} E_y &= b_1 \cos(\omega t - \mathbf{k} \cdot \mathbf{r} + \alpha) = \text{Re}(b_1 e^{-i\alpha + i(\mathbf{k} \cdot \mathbf{r} - \omega t)}) \\ E_z &= \pm b_2 \sin(\omega t - \mathbf{k} \cdot \mathbf{r} + \alpha) \end{aligned}$$

Es folgt  $\left(\frac{E_y}{b_1}\right)^2 + \left(\frac{E_z}{b_2}\right)^2 = \cos^2(\omega t - \mathbf{k} \cdot \mathbf{r} + \alpha) + \sin^2(\omega t - \mathbf{k} \cdot \mathbf{r} + \alpha) = 1$  Ellipsengleichung.

In jedem Raumpunkt rotiert der elektrische Vektor in der zur Ausbreitungsrichtung senkrechten Ebene auf einer Ellipse: **elliptisch polarisierte Welle**. Spezialfall  $b_1 = b_2$ : **zirkular polarisierte Welle**. Spezialfall  $b_1 = 0$  oder  $b_2 = 0$ : **linear polarisierte Welle**. Das Vorzeichen vor  $b_2$  in der Formel für  $E_z$  bestimmt den Schraubensinn der elliptisch polarisierten Welle: + Rechtsschraube in  $x$ -Richtung; - Linksschraube in  $x$ -Richtung.

Aus den monochromatischen Wellen läßt sich über die **Fouriertransformation** die **allgemeine Lösung der Wellengleichung** darstellen.

Fouriertransformation: Benutze Orthonormalsystem  $\varphi_n(x) = \frac{1}{\sqrt{L}} e^{2\pi i n x / L}$ ,  $n = 0, \pm 1, \dots, -L/2 \leq x \leq L/2$ .

Das Orthonormalsystem  $\varphi_n(x)$  ist vollständig im Intervall  $-L/2 \leq x \leq L/2$ , d.h. jede Funktion  $f(x)$ , die stückweise stetig ist, kann nach  $\varphi_n$  entwickelt werden.

$$f(x) = \frac{1}{\sqrt{L}} \sum_{n=-\infty}^{\infty} f_n e^{2\pi i n x / L}$$

$$f_n(x) = \frac{1}{\sqrt{L}} \int_{-L/2}^{L/2} e^{-2\pi i n x / L} f(x) dx$$

$f(x) = f(x + L)$ : Darstellung einer stückweise stetigen Funktion der Periode  $L$ .

Wir suchen jetzt eine Darstellung für alle (stückweise glatten, integrierbaren) Funktionen, nicht nur für die periodischen. Wir gehen deshalb mit  $L$  gegen Unendlich:

$$k_n = \frac{2\pi n}{L}, \quad \Delta k = \frac{2\pi}{L}, \quad \tilde{f}(k_n) = \sqrt{\frac{L}{2\pi}} f_n$$

$$\rightarrow f(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \sum_{n=-\infty}^{\infty} \sqrt{\frac{L}{2\pi}} f_n e^{2\pi i n x / L} \frac{2\pi}{L} = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \sum_{n=-\infty}^{\infty} \tilde{f}(k_n) e^{i k_n x} \Delta k$$

$L \rightarrow \infty$ :

$$f(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} \tilde{f}(k) e^{i k x} dk \quad \text{Fourierintegral}$$

$$\tilde{f}(k) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} e^{-i k x} f(x) dx \quad \text{Fouriertransformierte}$$

Analog in  $d = 3$  Dimensionen

$$f(\mathbf{r}) = (2\pi)^{-3/2} \int_{-\infty}^{\infty} \tilde{f}(\mathbf{k}) e^{i \mathbf{k} \mathbf{r}} d^3 k$$

$$\tilde{f}(\mathbf{k}) = (2\pi)^{-3/2} \int_{-\infty}^{\infty} e^{-i \mathbf{k} \mathbf{r}} f(\mathbf{r}) d^3 r$$

Anwendung auf die Wellengleichung

$$\left( -\frac{1}{c^2} \frac{\partial^2}{\partial t^2} + \Delta \right) f(\mathbf{r}, t) = 0$$

Nach Integration über  $\mathbf{r}$  und zweifacher partieller Integration

$$-\left( \frac{1}{c^2} \frac{\partial^2}{\partial t^2} + \mathbf{k}^2 \right) \tilde{f}(\mathbf{k}, t) = 0$$

$\rightarrow$  allgemeine Lösung

$$\tilde{f}(\mathbf{k}, t) = \frac{1}{2} \left( a(\mathbf{k}) e^{-i\omega t} + b(\mathbf{k}) e^{i\omega t} \right)$$

mit  $\boxed{\omega = c|\mathbf{k}| = \omega(\mathbf{k})}$ .

Da  $f(\mathbf{r}, t)$  reell ist, folgt  $f^*(\mathbf{r}, t) = f(\mathbf{r}, t)$  und damit  $\tilde{f}(-\mathbf{k}, t) = f^*(\mathbf{k}, t)$  und damit  $a^*(\mathbf{k}) = b(-\mathbf{k})$ .

→ Allgemeine physikalische Lösung der Wellengleichung:

$$f(\mathbf{r}, t) = (2\pi)^{-3/2} \operatorname{Re} \int_{-\infty}^{\infty} a(\mathbf{k}) e^{i(\mathbf{k}\mathbf{r} - \omega t)} d^3k \quad (2.6)$$

$f = (E_x, E_y, E_z, B_x, B_y, B_z)$ . Durch Vorgabe von  $\mathbf{E}(\mathbf{r}, t_0), \mathbf{B}(\mathbf{r}, t_0)$  wird die Lösung (2.6) eindeutig

$$\begin{aligned} \mathbf{E}(\mathbf{r}, t) &= (2\pi)^{-3/2} \frac{1}{2} \int d^3k e^{i\mathbf{k}\mathbf{r}} [a(\mathbf{k})e^{-i\omega t} + b(\mathbf{k})e^{i\omega t}] \\ \mathbf{E}(\mathbf{r}, 0) &= \frac{1}{2}(2\pi)^{-3/2} \int d^3k [a(\mathbf{k}) + b(\mathbf{k})] \\ \frac{1}{c} \dot{\mathbf{E}}(\mathbf{r}, 0) &= \frac{1}{2}(2\pi)^{-3/2} \int d^3k (-i|\mathbf{k}|) [a(\mathbf{k}) - b(\mathbf{k})] \end{aligned}$$

Auflösung durch Fouriertransformation:

$$\begin{aligned} \frac{1}{2} [a(\mathbf{k}) + b(\mathbf{k})] &= (2\pi)^{-3/2} \int e^{-i\mathbf{k}\mathbf{r}} \mathbf{E}(\mathbf{r}, 0) d^3r \\ \frac{1}{2} [a(\mathbf{k}) - b(\mathbf{k})] &= (2\pi)^{-3/2} ik \int e^{-i\mathbf{k}\mathbf{r}} \frac{1}{c} \dot{\mathbf{E}}(\mathbf{r}, 0) d^3r \end{aligned}$$

$\operatorname{rot} \mathbf{B}(\mathbf{r}, 0) = \frac{1}{c} \frac{\partial}{\partial t} \mathbf{E}(\mathbf{r}, t) \Big|_{t=0} \rightarrow a(\mathbf{k})$  und  $b(\mathbf{k})$  eindeutig bestimmt. Analog für  $\mathbf{B}$ .

# Kapitel 3

## Erhaltungssätze und Invarianten

### 3.1 Erhaltungssätze

#### 3.1.1 Ladungserhaltung

$$\dot{\rho} + \operatorname{div} \mathbf{j} = 0$$

#### 3.1.2 Energieerhaltung

$$\mathbf{E} \cdot \nabla \times \mathbf{B} = \frac{1}{c} \mathbf{E} \frac{\partial \mathbf{E}}{\partial t} + \frac{4\pi}{c} \mathbf{E} \cdot \mathbf{j}$$

$$\mathbf{B} \cdot \nabla \times \mathbf{E} = -\frac{1}{c} \mathbf{B} \frac{\partial \mathbf{B}}{\partial t}$$

$$\frac{1}{2c} \frac{\partial}{\partial t} (\mathbf{E}^2 + \mathbf{B}^2) = \mathbf{E} \nabla \times \mathbf{B} - \mathbf{B} \nabla \times \mathbf{E} - \frac{4\pi}{c} \mathbf{j} \cdot \mathbf{E} = -\nabla \cdot (\mathbf{E} \times \mathbf{B})$$

$$\frac{\partial}{\partial t} \frac{1}{8\pi} (\mathbf{E}^2 + \mathbf{B}^2) = -\mathbf{j} \cdot \mathbf{E} - \nabla \cdot \mathbf{S}$$

$\mathbf{S} = \frac{c}{4\pi} \mathbf{E} \times \mathbf{B}$  Poynting-Vektor.

Integrale Form

$$\frac{\partial}{\partial t} \int_V d^3r \frac{\mathbf{E}^2 + \mathbf{B}^2}{8\pi} = - \int_V \mathbf{j} \cdot \mathbf{E} d^3r - \oint_{\partial V} \mathbf{S} \cdot d\mathbf{a}$$

Links steht die Energieänderung des elektromagnetischen Feldes, rechts unter  $\oint$  der Energiestrom nach außen. Die Leistung, die das Feld an die Ladungsverteilung abgibt, ist

$$\begin{aligned} \mathbf{v} \cdot \delta \mathbf{F} &= \mathbf{v} \rho \delta V \left[ \mathbf{E} + \frac{1}{c} \mathbf{v} \times \mathbf{B} \right] = \mathbf{v} \rho \delta V \mathbf{E} = \mathbf{j} \cdot \delta V \\ \frac{dE_{\text{mech}}}{dt} &= \int_V \mathbf{j} \cdot \mathbf{E} dV \end{aligned}$$

$\mathbf{S}$  ist keine physikalisch relevante Größe, nur  $\nabla\mathbf{S}$ , letzteres wird nichtgeändert bei  $\mathbf{S} \rightarrow \mathbf{S}' = \mathbf{S} + \nabla \times \mathbf{a}$ .

### 3.1.3 Impulserhaltung

Änderung der mechanischen Impulsdichte  $\mathbf{p}(t, \mathbf{r})$

$$\dot{\mathbf{p}}_{\text{mech}} = \mathbf{F} = \rho(\mathbf{E} + \frac{1}{c}\mathbf{v} \times \mathbf{B})$$

$$\begin{aligned} \rho &= \frac{1}{4\pi} \nabla \cdot \mathbf{E} \\ \mathbf{j} &= \frac{c}{4\pi} \left( \nabla \times \mathbf{B} - \frac{1}{c} \frac{\partial \mathbf{E}}{\partial t} \right) \\ \dot{\mathbf{p}}_{\text{mech}} &= \frac{1}{4\pi} \left[ \mathbf{E}(\nabla \cdot \mathbf{E}) + \frac{1}{c} \mathbf{B} \times \frac{\partial \mathbf{E}}{\partial t} - \mathbf{B} \times (\nabla \times \mathbf{B}) \right] \\ &= \frac{1}{4\pi} \left[ \mathbf{E}(\nabla \cdot \mathbf{E}) + \mathbf{B}(\nabla \cdot \mathbf{B}) - \mathbf{E} \times (\nabla \times \mathbf{E}) - \mathbf{B} \times (\nabla \times \mathbf{B}) - \frac{1}{c} \frac{\partial}{\partial t} (\mathbf{E} \times \mathbf{B}) \right] \end{aligned}$$

Verwendet:

$$\begin{aligned} \frac{1}{c} \mathbf{B} \times \frac{\partial \mathbf{E}}{\partial t} &= -\frac{\partial}{c \partial t} (\mathbf{E} \times \mathbf{B}) + \mathbf{E} \times \frac{\partial \mathbf{B}}{c \partial t} \\ &= -\frac{\partial}{c \partial t} (\mathbf{E} \times \mathbf{B}) - \mathbf{E} \times (\nabla \times \mathbf{E}) \\ \mathbf{E}(\nabla \cdot \mathbf{E}) - \mathbf{E} \times (\nabla \times \mathbf{E}) &= E_i \nabla_j E_j - \varepsilon_{ijk} E_j \varepsilon_{klm} \nabla_l E_m \\ &= E_i \nabla_j E_j - (\nabla_i E_m) E_m + E_m \nabla_m E_i \\ &= \frac{\partial}{\partial x_j} (E_i E_j) - \frac{1}{2} \frac{\partial}{\partial x_i} E_m^2 \end{aligned}$$

Führe ein:

$$\begin{aligned} \mathbf{g} &= \frac{1}{4\pi c} (\mathbf{E} \times \mathbf{B}) = \frac{1}{c^2} \mathbf{S} \\ T_{ij} &= \frac{1}{4\pi} \left[ E_i E_j + B_i B_j - \frac{1}{2} \delta_{ij} (\mathbf{E}^2 + \mathbf{B}^2) \right] \end{aligned}$$

$\mathbf{g}$  ist **elektromagnetische Impulsdichte**,  $T_{ij}$  Maxwellscher **Spannungstensor**.

$$\frac{\partial}{\partial t} (\mathbf{p}_{\text{mech}} + \mathbf{g}) = \nabla \cdot \underline{\underline{T}}$$

oder

$$\frac{\partial}{\partial t} (\mathbf{p}_{\text{mech}} + \mathbf{g})_i = \frac{\partial}{\partial x_j} T_{ij}$$

oder nach Integration über ein Volumen  $V$  und Gaußschem Satz

$$\frac{d}{dt} \mathbf{p}_{\text{mech},i} + \frac{1}{c} \frac{d}{dt} \frac{1}{4\pi} \int_V (\mathbf{E} \times \mathbf{B})_i d^3r = \oint_{\partial V} T_{ij} da_j$$

Für  $V \rightarrow \infty$  Oberflächenterm verschwindet der Oberflächenterm.

Interpretation: In einem endlichen Volumen ändert sich der Gesamtimpuls ( $\mathbf{p}_{\text{mech}} + \mathbf{g}$ ) durch Ausströmen. Dabei wird auf die Oberfläche eine Kraft ausgeübt (Spannung=Kraft/Fläche).

### 3.1.4 Drehimpulserhaltung

$\frac{\partial}{\partial t} \mathbf{r} \times \mathbf{p}$  Änderung der Drehimpulsdichte.

Analog zu 3.1.3 Gesamtdrehimpuls des Feldes  $\mathbf{L}_{\text{Feld}}$  etc.

$$\frac{\partial}{\partial t} (\mathbf{L}_{\text{mech}} + \mathbf{L}_{\text{Feld}})_i = \int_V d^3r \frac{\partial}{\partial x_l} M_{il}$$

$$\mathbf{L}_{\text{Feld}} = \int_V d^3r \mathbf{r} \times \frac{1}{c^2} \mathbf{S}$$

Den Tensor  $M_{il}$  drückt man durch  $\mathbf{r}$  und  $T_{il}$  aus.

**Beispiel zu Energie und Impuls:** ebene Welle

$\mathbf{E}, \mathbf{B}, \mathbf{n}$  sind orthogonal,  $|\mathbf{E}| = |\mathbf{B}|$

$$\mathbf{S} = \frac{c}{4\pi} \mathbf{E} \times \mathbf{B} = \frac{c}{4\pi} E^2 \mathbf{n}, \quad w = \frac{1}{8\pi} (\mathbf{E}^2 + \mathbf{B}^2) = \frac{E^2}{4\pi}$$

$\mathbf{S} = cw\mathbf{n}$ : Feld propagiert mit Lichtgeschwindigkeit

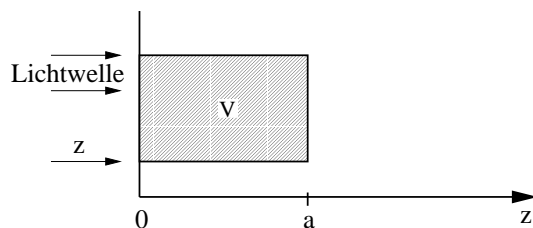
$\mathbf{g} = \frac{1}{c^2} \mathbf{S} = \frac{w}{c} \mathbf{n}$ : Impulsdichte

Maxwellscher Spannungstensor:  $\mathbf{n} \parallel z$ -Achse

$$\mathbf{E} = (E_x, 0, 0), \quad \mathbf{B} = (0, B_y, 0)$$

nur  $T_{zz} = -w$  ist verschieden von Null.

Die Maxwellschen Spannungen kann man als **Strahlungsdruck** der Lichtwelle wahrnehmen. In nebenstehender Anordnung fällt eine elektromagnetische Welle in ein absorbierendes Volumen  $V$  ein.



Kraft in  $z$ -Richtung

$$F_z = \frac{d}{dt} p_{\text{mech},z} = -\frac{d}{dt} \int_V \frac{w}{c} d^3r + \int_{\partial V} T_{zl} da_l$$

Der erste Term der rechten Seite verschwindet im zeitlichen Mittel über eine Periode ( $\mathbf{E} = \mathbf{E}_0 \cos(kz - \omega t)$ ,  $t_0 = 2\pi/\omega$ ). Im zweiten Term ist nur  $T_{zz} = -w$ , und nur die Flächen bei  $z = 0$  und  $z = a$  tragen bei:  $\frac{F_z}{A} = p = w(z = 0) - w(z = a)$ .

Anwendungen: Astrophysik (Kometenschweif), Lichtmühlen.

## 3.2 Transformationsverhalten elektromagn. Größen bei einfachen Transformationen

### 3.2.1 Invarianz gegen zeitliche Verschiebung

Elektromagnetische Größen sind invariant gegen zeitliche Verschiebung, da Operatoren, die auf  $\mathbf{E}$  und  $\mathbf{B}$  wirken, nicht von der Zeit selbst, sondern nur von Ableitungen nach der Zeit abhängen.

$$t' = t + t_0, \quad \frac{1}{c} \frac{\partial B(t)}{\partial t} - \nabla \times \mathbf{E}(t) = 0$$

$$\mathbf{B}(t' - t_0) = \mathbf{B}'(t'), \quad \mathbf{E}(t' - t_0) = \mathbf{E}'(t'), \quad \frac{1}{c} \frac{\partial B(t' - t_0)}{\partial t'} = \nabla \times \mathbf{E}'(t' - t_0)$$

### 3.2.2 Invarianz gegen räumliche Verschiebung

Elektromagnetische Größen sind invariant gegen räumliche Verschiebung, da Operatoren, die auf  $\mathbf{E}$  und  $\mathbf{B}$  wirken nur von räumliche Ableitungen, aber nicht vom Ort selbst abhängen.

$$\mathbf{r}' = \mathbf{r} + \mathbf{r}_0 \quad \nabla_{\mathbf{r}} \mathbf{E}(\mathbf{r}) = 4\pi\rho(\mathbf{r})$$

$$\rho(\mathbf{r}' - \mathbf{r}_0) = \rho'(\mathbf{r}') \quad \nabla_{\mathbf{r}'} \mathbf{E}(\mathbf{r}' - \mathbf{r}_0) = 4\pi\rho'(\mathbf{r}') \\ \mathbf{E}(\mathbf{r}' - \mathbf{r}_0) = \mathbf{E}'(\mathbf{r}') \quad \nabla_{\mathbf{r}'} \mathbf{E}'(\mathbf{r}') = 4\pi\rho'(\mathbf{r}')$$

Beide Transformationen haben Gruppeneigenschaften, denn es existiert das **Produkt** zweier Transformationen ( Nacheinanderausführung), das **inverse** Element ...

Zeitliche und räumliche Translationen bilden eine **4-parametrische abelsche Lie-Gruppe**.

Abelsch: Operationen können vertauscht werden, ohne das Resultat zu verändern.

### 3.2.3 Invarianz gegen räumliche Drehung

Betrachte lineare Transformation von einer Basis  $\mathbf{e}_i$  zu anderer Basis  $\mathbf{e}_i$

$$\mathbf{e}'_i = D_{ik} \mathbf{e}_k.$$

Diese soll den Vektor  $\mathbf{a} = a^i \mathbf{e}_i$  invariant lassen, d.h.  $\mathbf{a} = a'^i \mathbf{e}'_i$  (das Koordinatensystem ist nur ein Hilfskonstruktion).  $\rightarrow a'^i = D_{ki}^{-1} a^k$ ,  $\underline{\underline{D}}^{-1}$  ist die inverse Matrix zu  $\underline{\underline{D}}$

$$\mathbf{a} = D_{ki}^{-1} a^k D_{il} \mathbf{e}_l = \delta_{kl} a^k \mathbf{e}_l = a^k \mathbf{e}_k.$$

Sind alte und neue Basis orthogonal, dann gilt (setze Indizes wieder nach unten)

$$\mathbf{a}^2 = a_i^2 = a_i'^2$$

$$\mathbf{e}'_i \mathbf{e}'_j = \delta_{ij} = D_{ik} D_{jl} \mathbf{e}_k \mathbf{e}_l = D_{ik} D_{jk},$$

d.h.  $D_{ki}^{-1} = D_{ik}$  oder  $\underline{\underline{D}}^{-1} = D^T \rightarrow a'_i = D_{ik}a_k$ .  $\det \underline{\underline{D}} = \pm 1$ ,  $\underline{\underline{D}}$  ist dann eine orthogonale Matrix und damit ...

Bei **eigentlichen Drehungen** ist  $\det \underline{\underline{D}} = +1$

$$E'_i = D_{ik}E_k, \quad B'_i = D_{ik}B_k, \quad j'_i = D_{ik}j_k, \quad \rho' = \rho$$

oder kürzer:

$$\mathbf{E}'(\mathbf{r}') = \underline{\underline{D}}\mathbf{E}(\mathbf{r}), \quad \mathbf{r}' = \underline{\underline{D}}\mathbf{r}, \quad \text{etc.}$$

$\frac{\partial}{\partial x'_i} = \frac{\partial x_l}{\partial x'_i} \frac{\partial}{\partial x_l}$  (oder  $\nabla' = \underline{\underline{D}}\nabla$ ), damit

$$\frac{\partial}{\partial x'_i} E'_i = D_{il} \frac{\partial}{\partial x_l} D_{ik} E_k = D_{il} D_{ki}^{-1} \frac{\partial}{\partial x_l} E_k = \frac{\partial}{\partial x_k} E_k$$

und damit sind  $\text{div } \mathbf{E} = 4\pi\rho$  und  $\text{div } \mathbf{B} = 0$  invariant.

Analog transformieren sich Tensoren  $T_{i_1 \dots i_n}$   $n$ -ter Stufe

$$T'_{i_1 \dots i_n}(\mathbf{r}') = D_{i_1 j_1} D_{i_2 j_2} \dots D_{i_n j_n} T_{j_1 \dots j_n}(\mathbf{r})$$

Beispiel total antisymmetrischer Einheitstensor  $\varepsilon_{ijk}$

$$\begin{aligned} \varepsilon'_{ijk} &= D_{ii'} D_{jj'} D_{kk'} \varepsilon_{i'j'k'} \\ \varepsilon'_{ijk} &= \det \begin{vmatrix} D_{i1} & D_{j1} & D_{k1} \\ D_{i2} & D_{j2} & D_{k2} \\ D_{i3} & D_{j3} & D_{k3} \end{vmatrix} \\ &= D_{i1} D_{j2} D_{k3} + D_{j1} D_{k2} D_{i3} + D_{k1} D_{i2} D_{j3} - D_{i3} D_{j2} D_{k1} - D_{i1} D_{j3} D_{k2} - D_{i2} D_{j1} D_{k3} \end{aligned}$$

Nach Voraussetzung ist  $\varepsilon_{ijk}$  ein Tensor. Wenn  $(i, j, k) = (1, 2, 3)$ , dann erhält man  $\det \underline{\underline{D}} = 1$ , vertauscht man zwei Zeilen ändert sich das Vorzeichen ( $|\underline{\underline{D}}| = |\underline{\underline{D}}^T|$ )  $\rightarrow$

$$\begin{aligned} (\text{rot}' \mathbf{E}')_i &= \varepsilon'_{ijk} \frac{\partial}{\partial x'_j} E'_k = D_{ii'} D_{jj'} D_{kk'} D_{j1} D_{km} \frac{\partial}{\partial x_l} E_m \varepsilon_{i'j'k'} \\ &= \delta_{j'1} \delta_{k'm} D_{ii'} \varepsilon_{i'j'k'} \partial_l E_m \\ &= D_{ii'} \varepsilon_{i'lm} \partial_l E_m \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \frac{1}{c} \frac{\partial}{\partial t} B'_i &= \frac{1}{c} \frac{\partial}{\partial t} D_{ii'} B_{i'} \\ (\text{rot}' \mathbf{E}')_i + \frac{1}{c} \frac{\partial}{\partial t} B'_i &= D_{ii'} \left( \varepsilon_{i'lm} \partial_l E_m + \frac{1}{c} \frac{\partial}{\partial t} B_{i'} \right) = 0 \end{aligned}$$

Nach Multiplikation mit  $D_{ik}$  folgt

$$\varepsilon_{klm} \partial_l E_m + \frac{1}{c} \frac{\partial}{\partial t} B_k = 0$$

Analog mit  $\text{rot } \mathbf{B} = \frac{4\pi}{c} \mathbf{j} + \frac{1}{c} \frac{\partial}{\partial t} \mathbf{E}$ , d.h. die Maxwell-Gleichungen sind invariant gegen die eigentlichen Rotationen.

Außer den Maxwell-Gleichungen sind viele Folgerelationen rotationsinvariant.

Man überzeugt sich leicht, daß der Maxwellsche Spannungstensor, der Quadrupol-tensor etc. sich tatsächlich wie Tensoren zweiter Stufe transformieren. Die (eigen-lichen) Drehungen bzw. die eigentlich orthogonalen Matrizen bilden die **Drehgrup-pe**  $SO(3)$  (spezielle orthogonale Gruppe), eine **3-parametrische kontinuierliche nicht-abelsche** Gruppe, d.h. die Drehungen kommutieren i.a. nicht miteinander. Zur Parametrisierung können die Eulerschen Winkel dienen.

### 3.2.4 Invarianz gegenüber der Spiegelung und Inversion

Die allgemeinste längenerhaltende lineare Koordinatentransformation wird durch eine beliebige orthogonale Matrix  $\underline{D}$  mit  $\det \underline{D} = \pm 1$  beschrieben.

Eine spezielle uneigentliche Drehung ( $\det \underline{D} = -1$ ) ist die **Inversion**  $I$ :  $D_{ik} = -\delta_{ik}$ , eine andere die **Spiegelung**  $S$ :  $D_{ik} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \end{pmatrix}$ .

Jede uneigentliche Drehung  $D_-$  kann als  $D_- = ID_+ = D_+I$  geschrieben werden, wobei  $D_+$  eine eigentliche Drehung ist, oder auch als  $D_- = SD_+$ . Daher können die  $D_-$  auch als Drehspiegelungen verstanden werden.

Die Struktur der Drehgruppe ist  $O(3) = SO(3) \times \{1, I\}$ . Der uneigentliche Teil von  $O(3)$  hängt nicht mit  $SO(3)$  bzw.  $1$  zusammen, d.h. man kann keine uneigentliche Drehung aus kleinen Schritten erzeugen, die Inversion ist eine diskrete Transfor-mation.

Die Tensoren bezüglich  $SO(3)$  (z.B. Skalare, Vektoren, Tensoren zweiter Stufe etc.) können sich bezüglich  $O(3)$  auf zwei verschiedene Weisen verhalten:

- (i) es gelten die gleichen Transformation-Gesetze

$$T'_{i_1 \dots i_n} = D_{i_1 j_1} \dots D_{i_n j_n} T_{j_1 \dots j_n} \quad (3.1)$$

→ diese Größen werden als **“echte” Tensoren** bezeichnet, insbesondere gilt bezüglich der Inversion  $T'_{i_1 \dots i_n} = (-1)^n T_{i_1 \dots i_n}$ ;

- (ii) die Tensoren erhalten bei uneigentlichen Drehungen ein anderes Vorzeichen

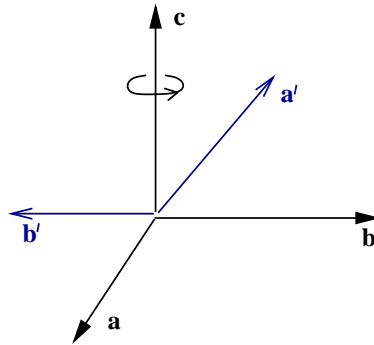
$$T'_{i_1 \dots i_n} = (\det \underline{D}) D_{i_1 j_1} \dots D_{i_n j_n} T_{j_1 \dots j_n}, \quad (3.2)$$

solche Tensoren heißen **Pseudotensoren**.

**Beispiel:** Ortsvektor  $\mathbf{r}$  ist echter Vektor: bei Inversion geht  $(x, y, z)$  in  $(-x, -y, -z)$  über, d.h.  $T'_i = -T_i$ .

Kreuzprodukt  $\mathbf{a} \times \mathbf{b} = \mathbf{c}$ , dabei seien  $\mathbf{a}, \mathbf{b}$  echte Vektoren. Die Richtung von  $\mathbf{c}$  wird mittels der **Rechtehandregel** festgelegt. Ohne eine Regel dieser Art läßt sich  $\mathbf{c}$

nicht **koordinatenabhängig** festlegen. Bei einer Spiegelung geht die rechte Hand in die linke Hand über und damit wird die Richtung von  $\mathbf{c}$  nach der Spiegelung durch eine Linkehandregel festgelegt, d.h.  $\mathbf{c}$  transformiert sich nach (3.2). Man stellt einen Pseudovektor besser als ungerichtete Strecke (für die Stärke) + Umlaufsinn dar.

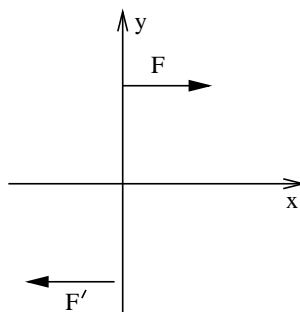


Echte Vektoren werden auch als **polare Vektoren**, Pseudovektoren als **axiale Vektoren** bezeichnet.

**Regeln:** Das Vektorprodukt zweier axialer Vektoren ergibt einen axialen Vektor, das Vektorprodukt eines axialen und eines polaren Vektors ergibt einen polaren Vektor. Das Skalarprodukt eines polaren und eines axialen Vektor ist ein Pseudoskalar.

Wir betrachten nun das Verhalten der Elektrodynamik unter uneigentlichen Drehungen:

Sind Ladungen echte oder Pseudoskalar? Dies kann nicht entschieden werden, wird aber durch Konvention gelöst: elektrische Ladungen sind echte Skalare. (System kann nicht aktiv gespiegelt oder invertiert werden, folglich ist nicht feststellbar, wie Ladungen sich bei einer solchen Transformation verhalten. Im Gegensatz zu den diskreten Transformationen Spiegelung und Zeitspiegelung sind die kontinuierliche Transformationen Translation, Drehung, Lorentztransformation aktiv realisierbar.)



$\mathbf{F} = q\mathbf{E} \rightarrow \mathbf{E}$  echter Vektor (wie  $\mathbf{F}$ )

$\mathbf{F} = q \frac{\mathbf{v}}{c} \times \mathbf{B} \rightarrow \mathbf{B}$  Pseudovektor

$\mathbf{j}, \nabla$  sind echte Vektoren.

$\rightarrow$  Forminvarianz der Maxwell-Gleichungen bezüglich uneigentlicher Drehungen

$\operatorname{div} \mathbf{E} = 4\pi\rho$  (Skalar)

$\operatorname{div} \mathbf{B} = 0$  (Pseudoskalar, magn. Ladungen wären Pseudoskalare)

$\operatorname{rot} \mathbf{E} = -\frac{1}{c} \frac{\partial}{\partial t} \mathbf{B}$  (Pseudovektor, magn. Ströme wären Pseudovektoren)

$\operatorname{rot} \mathbf{B} = \frac{4\pi}{c} \mathbf{j} + \frac{1}{c} \frac{\partial}{\partial t} \mathbf{E}$  (Vektor).

Die Invarianz der Maxwell-Gleichungen ist unabhängig von der oben getroffenen Konvention gegeben. (Wenn  $\rho$  Pseudoskalar  $\rightarrow \mathbf{E}$  Pseudovektor,  $\mathbf{B}$  echter Vektor,  $\mathbf{j}$  Pseudovektor, magnetische Ladungen und Ströme wären echte Skalare und Vektoren.)

**Ergebnis:** Die Maxwell-Gleichungen im Vakuum sind invariant gegen Inversion, oder **paritätsinvariant:** P-invariant.

Also: falls  $\rho(\mathbf{r})$  das elektrische Feld  $\mathbf{E}(\mathbf{r})$  erzeugt, so erzeugt bei Inversion  $\rho'(\mathbf{r}') = \rho(-\mathbf{r})$  das elektrische Feld  $\mathbf{E}'(\mathbf{r}') = -\mathbf{E}(-\mathbf{r})$ , falls  $\mathbf{j}(\mathbf{r})$  das magnetische Feld  $\mathbf{B}(\mathbf{r})$  erzeugt, so erzeugt  $\mathbf{j}'(\mathbf{r}') = -\mathbf{j}(-\mathbf{r})$  das Feld  $\mathbf{B}'(\mathbf{r}') = \mathbf{B}(-\mathbf{r})$ .

Es besteht a priori keine Notwendigkeit dafür, daß alle Naturgesetze gegenüber der hier spezifizierten Inversion invariant sein müssen. Die Gesetze der Elektrodynamik besitzen (konventionsabhängig) diese Invarianz. Die schwache Wechselwirkung wäre inversionssymmetrisch, wenn man die elektrische Ladungen als Pseudoskalare betrachten würde, d.h. der  $\beta$ -Zerfall verläuft in gleicher Weise, wenn man ihn spiegelt und gleichzeitig alle Ladungsvorzeichen umkehrt, d.h. er ist CP-invariant.

### 3.2.5 Ladungsumkehr (–konjugation)

$$\rho' = -\rho \quad \mathbf{F}' = \mathbf{F}$$

$$\mathbf{E}' = -\mathbf{E}$$

$$\mathbf{B}' = -\mathbf{B}$$

$$\mathbf{j}' = -\mathbf{j}$$

Auch diese Transformation läßt die Maxwell'schen-Gleichungen invariant: **C-Invarianz.**

### 3.2.6 Bewegungsumkehr

Zeitspiegelung  $t' = -t$ . Gegenüber der Bewegungsumkehr T verhalten sich  $\mathbf{r}, \mathbf{F}, \rho$  gerade und  $\mathbf{v}, \mathbf{j}$  ungerade  $\rightarrow$  mit  $\mathbf{F} = q(\mathbf{E} + \frac{1}{c} \mathbf{v} \times \mathbf{B})$  folgt für die Felder  $\mathbf{E}' = \mathbf{E}$ ,

$\mathbf{B}' = -\mathbf{B}$ :

$$\rho'(t') = \rho(-t), \quad \mathbf{j}'(t') = -\mathbf{j}(-t), \quad \mathbf{F}'(t') = \mathbf{F}(-t),$$

$$\mathbf{E}'(t') = \mathbf{E}(-t), \quad \mathbf{B}'(t') = -\mathbf{B}(-t)$$

$$\text{rot } \mathbf{B}' - \frac{1}{c} \dot{\mathbf{E}}' - \frac{4\pi}{c} \mathbf{j}' = -\text{rot } \mathbf{B}(-t) - \frac{1}{c} \left( -\frac{\partial}{\partial t} \right) \mathbf{E}(-t) + \frac{4\pi}{c} \mathbf{j}(-t) = 0.$$

→ Maxwellsche Gleichungen sind invariant gegenüber T: **T-Invarianz**.

**Anmerkung:** Jede bisher bekannte Feldtheorie ist invariant gegenüber der gemeinsamen Ausführung von TCP (TCP-Theorem) (muß in lokaler Quantenfeldtheorie so sein).

### 3.2.7 Eichinvarianz

Siehe 1.5.

### 3.2.8 Invarianz gegenüber Lorentztransformationen

Siehe 3.3.

## 3.3 Lorentzinvarianz oder die Spezielle Relativitätstheorie

### 3.3.1 Lorentztransformation

Aus der Mechanik ist bekannt: es existieren **Inertialsysteme** als Bezugssysteme, in denen ein kräftefreier Körper eine konstante Geschwindigkeit besitzt.

**Relativitätsprinzip:** in jedem Inertialsystem haben die Naturgesetze die gleiche Form.

Klassische Mechanik: Übergang zwischen zwei Inertialsystemen mittels Galilei-Transformation

$$t' = t$$

$$\mathbf{r}' = \mathbf{r} - \mathbf{v}t$$

ABER: die Maxwell-Gleichungen sind **nicht** Galilei-invariant.

$$\nabla' = \nabla, \quad \left( \frac{\partial}{\partial t'} \right)_{\mathbf{r}'=\text{const}} = \left( \frac{\partial}{\partial t} \right)_{\mathbf{r}'=\text{const}} = \left( \frac{\partial}{\partial t} \right)_{\mathbf{r}=\text{const}} + (\mathbf{v}\nabla)_{t=\text{const}}$$

**Nebenrechnung:**

$$\begin{aligned}\boldsymbol{\xi} &= (t, \mathbf{r}), \quad \boldsymbol{\xi}' = (t, \mathbf{r} - v_0 t) \\ \frac{\partial}{\partial \xi_i} &= \sum_{j=1}^4 \frac{\partial \xi'_j}{\partial \xi_i} \frac{\partial}{\partial \xi'_j} \\ \frac{\partial}{\partial x_i} &= \frac{\partial t'}{\partial x_i} \frac{\partial}{\partial t'} + \sum_{j=1}^3 \frac{\partial(x_j - v_j t)}{\partial x_i} \frac{\partial}{\partial x'_j} = \frac{\partial}{\partial x'_i} \quad \rightarrow \quad \nabla' = \nabla \\ \frac{\partial}{\partial t} &= \frac{\partial}{\partial t'} + \sum_{j=1}^3 \frac{\partial(x_j - v_j t)}{\partial t} \frac{\partial}{\partial x'_j} = \frac{\partial}{\partial t'} - \sum_{j=1}^3 v_j \frac{\partial}{\partial x'_j} \quad \rightarrow \quad \frac{\partial}{\partial t'} = \frac{\partial}{\partial t} + \mathbf{v} \nabla\end{aligned}$$

Betrachte jetzt z.B. die homogene Wellengleichung  $\square \mathbf{E} = 0$  als spezielle Folgerung aus den Maxwell'schen Gleichungen. Dann ergibt die Galilei-Transformation

$$\square' = \frac{\partial^2}{\partial x_i'^2} - \frac{1}{c^2} \frac{\partial^2}{\partial t'^2} = \nabla'^2 - \frac{1}{c} \left( \frac{\partial}{\partial t'} + \mathbf{v} \nabla' \right)^2,$$

d.h. die homogene Wellengleichung ist nicht Galilei-invariant. (Dies wäre eventuell akzeptabel für Wellen, die sich in einem Medium ausbreiten, nicht aber im Vakuum, wie der Michelsonversuch beweist.)

→ Damit ist auch die gesamte Maxwell-Theorie nicht Galilei-invariant. Wir müssen also nach einer Transformation suchen, die den Übergang zwischen Inertialsystemen beschreibt und dabei das Resultat des Michelson-Versuchs berücksichtigt. Dies besagt: In allen Inertialsystemen breitet sich das Licht (und damit auch andere elektromagnetische Wellen) mit der Geschwindigkeit  $c \simeq 3 \cdot 10^{10}$  cm/sec aus.

Betrachte jetzt zwei Ereignisse, die im Inertialsystem  $K$  den räumlichen Abstand  $(\Delta x_i^2)^{1/2}$  und den zeitlichen Abstand  $(\Delta t^2)^{1/2}$  haben. Dann heißt die Größe  $s$ , wobei

$$s^2 = c^2 \Delta t^2 - \Delta x_i^2,$$

der **Abstand zwischen den Ereignissen**. Verschwindet im Inertialsystem  $K$  der Abstand, so verschwindet er auch in jedem anderen Inertialsystem, da in  $K$  ein Signal, daß in  $\mathbf{r}_1$  zum Zeitpunkt  $t_1$  mit der Geschwindigkeit  $c$  ausgesandt wird,  $\mathbf{r}_2$  zum Zeitpunkt  $t_2$  erreicht.  $\Delta x_i^2 = (\mathbf{r}_2 - \mathbf{r}_1)^2$ ,  $\Delta t^2 = (t_2 - t_1)^2$ ,  $c^2 \Delta t^2 = \Delta x_i^2$ .

Sind zwei Ereignisse unendlich benachbart, so ist ihr Abstand

$$ds^2 = c^2 dt^2 - dx^2 - dy^2 - dz^2.$$

In einem anderen Inertialsystem ist ihr Abstand  $ds'^2$ . Da  $ds, ds'$  infinitesimale Größen sind, gilt

$$ds^2 = a ds'^2.$$

$a$  kann nur vom Absolutwert der Relativgeschwindigkeit beider Inertialsysteme abhängen (Isotropie, Homogenität von Raum und Zeit). Betrachte drei Inertialsysteme  $K, K_1, K_2$  mit Relativgeschwindigkeiten  $v_1, v_2$  und  $v_{12}$ .

$$ds^2 = a(v_1) ds_1^2 = a(v_2) ds_2^2, \quad ds_1^2 = a(v_{12}) ds_2^2 \\ \rightarrow a(v_1)a(v_{12}) = a(v_2)$$

$v_{12}$  hängt nicht von  $v_1, v_2$  allein, sondern auch vom Winkel zwischen  $\mathbf{v}_1$  und  $\mathbf{v}_2$  ab  
 $\rightarrow a = \text{const} = 1$

$$\rightarrow ds^2 = ds'^2 \\ \rightarrow s^2 = s'^2,$$

**d.h. der Abstand zwischen zwei Ereignissen ist eine Invariante.**

Es ist zweckmäßig, einen **Vierer-Ortsvektor**  $\mathbf{x}$  (im Minkowski-Raum) einzuführen, mit der Eigenschaft, daß für zwei Ereignisse mit den Ortsvektoren  $\mathbf{x}_1, \mathbf{x}_2$  für deren Abstand  $s_{12}$  gilt

$$s_{12}^2 = -(\mathbf{x}_2 - \mathbf{x}_1)^2 = -(x_{2\alpha} - x_{1\alpha})^2 \quad \left\{ \begin{array}{l} > 0 \text{ zeitartige Ereign., d.h. } \exists \text{ ein } K, \\ \text{so daß E. am gleichen Ort} \\ < 0 \text{ raumartige Ereign., d.h. } \exists \text{ ein } K, \\ \text{so daß E. zur gleichen Zeit} \end{array} \right.$$

Dies gelingt, wenn wir  $\{\mathbf{x}\} = \{x, y, z, ict\}$  schreiben. Der vierer Vektor hat vier Komponenten, die wir mit griechischen Buchstaben indizieren, die von 1 . . . 4 laufen. Es gilt wieder die Einsteinsche Summationskonvention.

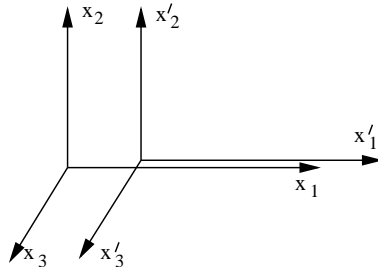
Wir suchen jetzt eine Transformation, die den Abstand  $s_{12}$  zwischen zwei Ereignissen invariant läßt: Drehung im Minkowski-Raum. Im gleichen Inertialsystem sind dies die Drehungen  $D_+, D_-$ , sowie die Translationen im Raum und Zeit. Beim Übergang zwischen verschiedenen Inertialsystemen entspricht dies (formal) der Drehung im vier dimensionalen Raum-Zeit-Kontinuum um einen imaginären Winkel. Wir werden diese Lorentz-Transformation mit dem Symbol  $\underline{\Lambda}$  bezeichnen ( $\Lambda \sim L$  wie Lorentz, griechisch weil  $4 \times 4$ -Matrix).

$$x'_\mu = \Lambda_{\mu\nu} x_\nu, \quad \Lambda_{\mu\nu} \Lambda_{\mu\gamma} = \delta_{\nu\gamma}$$

Wir betrachten jetzt eine spezielle Lorentztransformation, bei dem sich das System  $K'$  gegenüber  $K$  mit der Geschwindigkeit  $\mathbf{v}$  bewegt (in  $x$ -Richtung).

Drehung um den imaginären Winkel  $\psi$ :

$$\left. \begin{array}{l} x'_1 = x_1 \cos \psi \\ x'_2 = \quad \quad \quad x_2 \\ x'_3 = \quad \quad \quad x_3 \\ x'_4 = x_1 \sin \psi \quad \quad + x_4 \cos \psi \end{array} \right\} = \Lambda_{\mu\nu} x_\nu \\ \det \underline{\Lambda} = 1, \quad \psi = i\psi'' \rightarrow \cos \psi = \cosh \psi'', \quad \sin \psi = i \sinh \psi''$$



$x'_1 = 0$  :  $x_1 = vt$ , d.h. das  $K'$ -System bewegt sich mit der Geschwindigkeit  $v$  gegenüber  $K$  nach rechts

$$0 = vt \cos \psi - ict \sin \psi \rightarrow \tan \psi = -\frac{v}{c}i = i \tanh \psi''$$

$$\cos \psi = \cosh \psi'' = (1 - \tanh^2 \psi'')^{-1/2} = \left(1 - \frac{v^2}{c^2}\right)^{-1/2} = \gamma$$

$$\sin \psi = i \sinh \psi'' = i \tanh \psi'' (1 - \tanh^2 \psi'')^{-1/2} = -i \frac{v}{c} \left(1 - \frac{v^2}{c^2}\right)^{-1/2} = -i \frac{v}{c} \gamma$$

Damit folgt:

$$x'_1 = \gamma(x_1 - vt)$$

$$x'_2 = x_2$$

$$x'_3 = x_3$$

$$x'_4 = ict' = (x_1(-iv/c) + ict)\gamma$$

$$\Lambda_{\alpha\beta} = \begin{pmatrix} \gamma & 0 & 0 & i(v/c)\gamma \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ -i(v/c)\gamma & 0 & 0 & \gamma \end{pmatrix}$$

$$\gamma = (1 - v^2/c^2)^{-1/2}$$

**Verallgemeinerung** auf Transformation mit Geschwindigkeit  $\mathbf{v}$  in beliebige Richtung

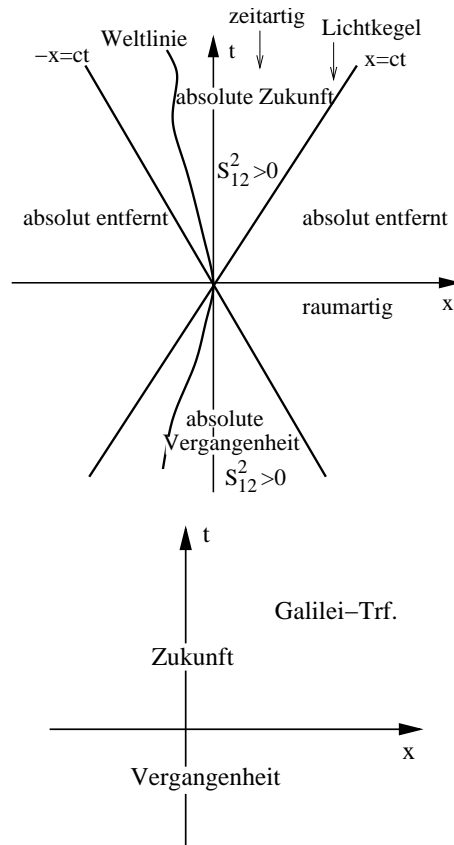
$$\begin{aligned} \mathbf{r}' &= \mathbf{r} + (\mathbf{v} \cdot \mathbf{r}) \frac{\mathbf{v}}{v^2} (\gamma - 1) - \mathbf{v} t \gamma \\ t' &= \gamma(t - \mathbf{v} \cdot \mathbf{r}/c^2) \end{aligned} \quad (3.3)$$

→ Drei parametrische Schar von Lorentztransformationen, die noch keine Gruppe bilden. Man muß die Drehungen hinzunehmen, um die Lorentzgruppe zu erhalten. Letztere hat also 6 Parameter. Die eigentliche Lorentzgruppe wird aus den eigentlichen Drehungen  $D_+$  und (3.3) erzeugt.

Raumartige Ereignisse mit  $S_{12}^2 < 0$  können niemals **kausal** miteinander verbunden sein.

Die Wellengleichung ist Lorentzinvariant:

$$\square = \partial_\mu^2 = \frac{\partial x'_\nu}{\partial x_\mu} \frac{\partial x'_\gamma}{\partial x_\mu} \frac{\partial}{\partial x'_\nu} \frac{\partial}{\partial x'_\gamma} = \Lambda_{\nu\mu} \partial'_\nu \partial'_\gamma = \partial'^2 = \square'$$

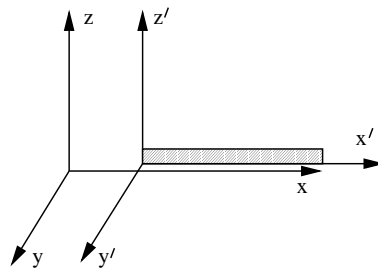


### 3.3.2 Anwendung der Lorentztransformation

(i) **Längenkontraktion:**  $x'_1 = nl'$  in  $K'$ . Zur Zeit  $t = 0$  in  $K$ :  $x_1 = nl = nl'(1 - v^2/c^2)^{1/2}$

$$l = l'(1 - v^2/c^2)^{1/2}$$

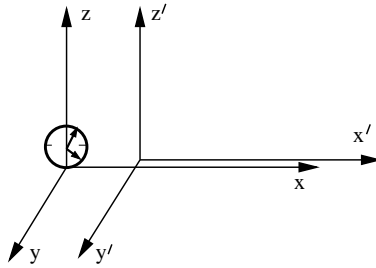
Bewegter Massstab, beide Enden müssen zur gleicher Zeit beobachtet werden.



→ Der **räumliche** Abstand zwischen zwei Ereignissen ist im Ruhesystem maximal (im Gedankenexperiment in Kap. 1 schon benutzt).

(ii) **Zeitdilatation:** Eine Uhr, die im Ursprung von  $K$  ruht, deren Schläge bei  $t = n\Delta t$  erfolgen, geht von  $K'$  aus betrachtet langsamer

$$\Delta t' = \Delta t(1 - v^2/c^2)^{-1/2} \quad (t' = n\Delta t\gamma)$$



→ Der **zeitliche** Abstand zwischen zwei Ereignissen ist im Ruhesystem minimal. (Zwillingsparadox:  $z_1$  in  $K'$ ,  $z_2$  in  $K$ .)

**Beispiel:** Zerfallszeit eines  $\mu^+$ -Mesons  $\mu^+ \rightarrow e^+ + \nu + \bar{\nu}$ ,  $2.2 \cdot 10^{-6}$  sec im Ruhesystem, d.h. die maximal zurückgelegte Weglänge beträgt  $c \cdot 10^{-6} \sim 3 \cdot 10^4$  cm  $\sim 300$  m.  $\mu^+$ -Mesonen entstehen beim Aufprallen von Partikeln in der Hochatmosphäre. Bei nicht-relativistischer Betrachtung sollten diese Mesonen auf der Erdoberfläche nicht beobachtbar sein. Bei relativistischer Betrachtung beträgt die zurückgelegte Weglänge  $0.3/(1 - v^2/c^2)^{1/2} \approx 10^3$  km, sie sind damit auf der Erde beobachtbar.

### (iii) Additionstheorem für Geschwindigkeiten

Zwei Lorentztransformationen mit  $\mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2$ ;  $\mathbf{v}_1 \parallel \mathbf{v}_2$

$$\frac{1}{c} v_{12} = i \tan(\psi_1 + \psi_2) = i \frac{\tan \psi_1 + \tan \psi_2}{1 - \tan \psi_1 \tan \psi_2}$$

$$v_{12} = \frac{v_1 + v_2}{1 + v_1 v_2 / c}$$

Lorentztransformation ist i.a. **nicht kommutativ** (im Unterschied zur Galilei-Transformation).

### 3.3.3 Invarianten der Lorentztransformation

In Analogie zu den dreier Tensoren bei räumlichen Drehungen betrachten wir jetzt vierer Tensoren, die bei Lorentztransformation invariant bleiben.

$4^k$  Größen  $T_{\alpha_1 \dots \alpha_k}$  ( $\alpha_i = 1, \dots, 4$ ) bilden die Komponenten eines Tensors  $k$ -ter Stufe, wenn sie sich unter Transformation wie

$$T'_{\alpha_1 \dots \alpha_k} = \Lambda_{\alpha_1 \beta_1} \dots \Lambda_{\alpha_k \beta_k} T_{\beta_1 \dots \beta_k}$$

transformieren (d.h. jeder einzelne Index transformiert sich wie die Komponenten eines Vektors).

**Beispiele:**  $k = 0$ : **Skalar**

$$\square = \partial_\alpha^2 = \frac{\partial x'_\beta}{\partial x_\alpha} \frac{\partial x'_\gamma}{\partial x_\alpha} \partial'_\beta \partial'_\gamma = \square'$$

$$d^4x = d^4x' = d^3r c dt.$$

$k = 1$ : Vektor

Ortsvektor eines Weltpunktes  $\tilde{x}$  (s.o.)

$$\partial_\alpha = \frac{\partial'_\beta}{\partial x_\alpha} \partial'_\beta = \Lambda_{\beta\alpha} \partial'_\beta.$$

Andere Vektoren der Elektrodynamik sind als 3-er Vektoren nicht Invarianten der Lorentztransformation. **Die relativistisch gültigen physikalischen Gesetze müssen sich aber als Gleichungen zwischen 4-er Tensoren** (gleicher Stufe) **formulieren lassen** (Lorentz-invariante oder "kovariante" Formulierung).

(i) **Viererstrom**  $\tilde{j}$

Die Ladung im Volumenelement  $dq = \rho d^3r$  ist eine Invariante (Erfahrung) (Ladung punktförmig,  $dq = q$ )

$$dq dx_\alpha = \rho d^3r dt \frac{dx_\alpha}{dt} = dt d^3r \rho \frac{dx_\alpha}{dt} = dt d^3r \tilde{j}_\alpha$$

$$\{\tilde{j}_\alpha\} = \{\mathbf{j}, ic\rho\}$$

Ladungerhaltung:  $\nabla \mathbf{j} + \frac{ic}{\partial t} \rho = \partial_\alpha j_\alpha = 0$

(ii) **Viererpotential**  $\tilde{A}$

Invarianz der Lorentzkraft, die aus Lagrangefunktion abgeleitet werden kann (Kap. 1.5).

Wechselwirkung zwischen geladenen Teilchen und Potentialen  $L_{Ww} = \frac{q}{c} \mathbf{A} \mathbf{v} - q\phi$ .

Wirkung

$$S_{Ww} = \frac{1}{ic^2} \int d^4x \{\mathbf{A} \mathbf{j} - c\rho\phi\} = \frac{1}{ic^2} \int d^4x \tilde{j} \cdot \tilde{A}$$

$$\{\tilde{A}\} = \{\mathbf{A}, i\phi\}$$

$$\rho = \sum_{i=1}^N q_i \delta(\mathbf{r} - \mathbf{r}_i)$$

$$\mathbf{j} = \sum_{i=1}^N q_i \mathbf{v}_i \delta(\mathbf{r} - \mathbf{r}_i)$$

Da  $S_{Ww}$  (Wirkung der Wechselwirkung) invariant unter der Lorentztransformation sein muß und  $d^4x, \tilde{j}$  invariant bleiben, folgt dies auch für  $\tilde{A}$ .

$$\partial_\alpha A_\alpha = \Lambda = \nabla \mathbf{A} + \frac{1}{c} \frac{\partial}{\partial t} \phi$$

Lorentzgleichung  $\Lambda = 0$ . Die Landau ( $\phi \equiv 0$ ) oder Coulombgleichung ( $\nabla \cdot \mathbf{A} = 0$ ) sind nicht Lorentz-invariant. Die inhomogene Maxwell-Gleichungen können dann sofort in der Form

$$\square \mathbf{A} = -\frac{4\pi}{c} \mathbf{j} + \nabla \Lambda$$

$$\square \phi = -4\pi\rho - \frac{1}{c} \frac{\partial}{\partial t} \Lambda$$

oder

$$\begin{aligned} \partial_\alpha^2 A_\beta &= -\frac{4\pi}{c} j_\beta + \partial_\beta \Lambda \\ \square \tilde{A} &= -\frac{4\pi}{c} \tilde{j} + \tilde{\nabla} \Lambda \end{aligned}$$

geschrieben werden. Diese Gleichung ist als Beziehung zwischen vierer Vektoren Lorentz-invariant.

### 3.3.4 Elektrodynamik in kovarianter Formulierung

Elektromagnetisches Feld:

$$\begin{aligned} E_i &= -\partial_i \phi - \frac{1}{c} \frac{\partial}{\partial t} A_i = i(\partial_i A_4 - \partial_4 A_i), \quad i = 1, 2, 3 \\ B_i &= \varepsilon_{ijk} \partial_j A_k \quad i, j, k = 1, 2, 3 \end{aligned}$$

Der elektromagnetische Feld-Tensor (Tensorcharakter aus  $\tilde{A}, \tilde{x}$ )

$$F_{\alpha\beta} = -\frac{\partial A_\alpha}{\partial x_\beta} + \frac{\partial A_\beta}{\partial x_\alpha} = -F_{\beta\alpha}$$

hat als antisymmetrischer Tensor zweiter Stufe 6 unabhängige Komponenten

$$F_{\alpha\beta} = \begin{pmatrix} 0 & B_3 & -B_2 & -iE_1 \\ -B_3 & 0 & B_1 & -iE_2 \\ B_2 & -B_1 & 0 & -iE_3 \\ iE_1 & iE_2 & iE_3 & 0 \end{pmatrix}$$

$F_{12} = -\frac{\partial A_1}{\partial x_2} + \frac{\partial A_2}{\partial x_1} = B_3$  räumliche Komponenten:  $B_i$  bilden 3-dimensionalen antisymmetrischen Tensor.  $B_i = \frac{1}{2} \varepsilon_{ijk} F_{jk}$ ,  $\varepsilon_{ijk}$  Pseudotensor. (Pseudotensor: ändert Vorzeichen nicht, wenn Vorzeichenumkehr bei Koordinatenachse.)  $F'_{\alpha\beta} = \Lambda_{\alpha\gamma} \Lambda_{\beta\delta} F_{\gamma\delta}$ .

**Invarianten des Feldes** sind  $F_{\alpha\beta} F_{\alpha\beta} = 2(\mathbf{B}^2 - \mathbf{E}^2)$  Skalar und  $\varepsilon_{\alpha\beta\gamma\delta} F_{\alpha\beta} F_{\gamma\delta} = 8i\mathbf{E} \cdot \mathbf{B}$  Pseudoskalar,  $\varepsilon_{\alpha\beta\gamma\delta}$  ist total antisymmetrischer Einheitstensor vierter Stufe,  $\varepsilon_{1234} = 1$ .

Lorentztransformationen der  $\mathbf{E}$  und  $\mathbf{B}$  Felder

$$\begin{aligned} \mathbf{E}'_{\parallel} &= \mathbf{E}_{\parallel}, \quad \mathbf{B}'_{\parallel} = \mathbf{B}_{\parallel} \\ \mathbf{E}'_{\perp} &= \gamma \left( \mathbf{E}_{\perp} + \frac{\mathbf{v}}{c} \times \mathbf{B}_{\perp} \right) \\ \mathbf{B}'_{\perp} &= \gamma \left( \mathbf{B}_{\perp} - \frac{\mathbf{v}}{c} \times \mathbf{E}_{\perp} \right) \\ \gamma &= (1 - v^2/c^2)^{-1/2} \end{aligned}$$

Damit nehmen die **Maxwell–Gleichungen** die Form an:

$\frac{\partial F_{\alpha\beta}}{\partial x_\beta} = \frac{4\pi}{c} j_\alpha$	4 inhomogene Gleichungen
$\varepsilon_{\alpha\beta\gamma\delta} \frac{\partial F_{\beta\gamma}}{\partial x_\delta} = \frac{\partial F_{\alpha\beta}}{\partial x_\gamma} + \frac{\partial F_{\gamma\alpha}}{\partial x_\beta} + \frac{\partial F_{\beta\gamma}}{\partial x_\alpha} = 0$	4 homogene Gleichungen

**Lorentz–Kraft–Dichte**  $f_\alpha^L = \frac{1}{c} F_{\alpha\beta} j_\beta$ ,  $\{\tilde{f}^L\} = \{f_i, \frac{i}{c} \mathbf{Ej}\}$

$(1/c)\mathbf{Ej}$  ist die “Leistungsichte”, d.h. die pro Zeit– und Volumeneinheit durch das Feld an den Ladungen verrichtete Arbeit.  $f_1 = \frac{1}{c} F_{1\beta} j_\beta = \frac{1}{c} (H_z j_y - H_y j_z) - i E_x i \rho = \rho E_x + \frac{1}{c} (j_y H_z - H_y j_z)$ .

### Energie–Impuls–Tensor

durch Multiplikation der inhomogenen Maxwellgleichung

$$\begin{aligned} 8\pi f_\alpha^2 &= \frac{8\pi}{c} F_{\alpha\beta} j_\beta = -2F_{\alpha\beta} \partial_\gamma F_{\gamma\beta} = -\partial_\gamma (F_{\alpha\beta} F_{\gamma\beta}) + F_{\gamma\beta} \partial_\gamma F_{\alpha\beta} - F_{\alpha\beta} \partial_\gamma F_{\gamma\beta} \\ &= -\partial_\gamma (F_{\alpha\beta} F_{\gamma\beta}) - F_{\gamma\beta} (\partial_\alpha F_{\beta\gamma} + \partial_\beta F_{\gamma\alpha}) - F_{\alpha\beta} \partial_\gamma F_{\gamma\beta} \\ &= -\partial_\gamma (F_{\alpha\beta} F_{\gamma\beta}) + \frac{1}{2} \partial_\alpha (F_{\beta\gamma} F_{\beta\gamma}) - F_{\beta\gamma} \partial_\gamma F_{\beta\alpha} - F_{\alpha\beta} \partial_\gamma F_{\gamma\beta} \\ &= -2\partial_\gamma (F_{\gamma\beta} F_{\alpha\beta}) + \frac{1}{2} \partial_\alpha (F_{\beta\gamma})^2 \end{aligned}$$

→ **Erhaltungssätze:** Diese Beziehung enthält für (vergl. 3.1)  $\alpha = 1, 2, 3$  den Impulssatz und für  $\alpha = 4$  den Energiesatz.  $\boxed{f_\alpha^L - \partial_\beta T_{\alpha\beta} = 0}$   $T_{\alpha\beta}$ : Symmetrischer Energie–Impuls–Tensor,  $\alpha, \beta = 1 \dots 4$ .

$$T_{\alpha\beta} = \frac{1}{4\pi} \left( F_{\alpha\gamma} F_{\gamma\beta} + \frac{1}{4} \delta_{\alpha\beta} F_{\gamma\delta} F_{\gamma\delta} \right)$$

$$T_{\alpha\alpha} = 0 = \frac{1}{4\pi} (F_{\alpha\gamma} F_{\gamma\alpha} + F_{\gamma\delta} F_{\gamma\delta}) = \frac{1}{4\pi} (-F_{\alpha\gamma} F_{\alpha\gamma} + F_{\gamma\delta} F_{\gamma\delta}).$$

$$T_{\alpha\beta} = \begin{pmatrix} T_{ij} & -icg_i \\ -icg_j & \omega \end{pmatrix}$$

$T_{ij}$  Spannungstensor  $i, j = 1, 2, 3$ ,  $g_i$  elektromagn. Impulsdichte,  $\omega$  Energiedichte  $\frac{1}{8\pi} (\mathbf{E}^2 + \mathbf{B}^2)$ ,  $\mathbf{g} = \frac{1}{4\pi c} (\mathbf{E} \times \mathbf{B})$ .

## 3.4 Das Extremalprinzip der Elektrodynamik

Siehe Landau–Lifschitz, Bd. II

**Ziel:** Herleitung der Maxwell– und der (relativistischen) Bewegungsgleichungen für die Wirkung.

### 3.4.1 Die Wirkungsfunktionale

$$S = \int \frac{d^4x}{ic} \mathcal{L}, \quad S = S_T + S_F + S_{Ww}$$

$\mathcal{L}$ : Lagrange-Dichte

Die Wirkung  $S$  und damit  $\mathcal{L}$  müssen Lorentz-invariant sein!

(i)  $S_T = ?$  Ansatz für ein einzelnes freies Teilchen:  $S_T = -\alpha \int_a^b ds$   
 $ds$  Lorentz-Skalar, Integration zwischen zwei Ereignissen  $a, b$ ;  $\alpha$  positive Konstante,  
da  $\int_a^b ds$  maximal, wenn Integrationsweg eine gerade Weltlinie ist.

$$\begin{aligned} ds &= c \left( 1 - \frac{1}{c^2} \left( \frac{d\mathbf{r}}{dt} \right)^2 \right)^{1/2} = c(1 - v^2/c^2)^{1/2} dt \\ S_T &= -\alpha \int_{t_a}^{t_b} c dt (1 - v^2/c^2)^{1/2} = \int_{t_a}^{t_b} L_T dt \\ L_T &= -\alpha c(1 - v^2/c^2)^{1/2} \approx -\alpha c + \alpha v^2/2c - \dots \end{aligned}$$

Vergleich mit klassischer Wirkung,  $L_{T,\text{klass}} = \frac{m_0}{2} v^2$ :  $\alpha = m_0 c$  ( $m_0$  Ruhemasse)  $\rightarrow$

$$S_T = -m_0 c \int_a^b ds$$

(ii)  $S_F = ?$

$$S_F = \frac{1}{ic} \int d^4x \mathcal{L}_F$$

$\mathcal{L}_F$  muß aus den skalaren Invarianten des Feldes aufgebaut werden. Es existiert aber nur ein echter Skalar  $F_{\alpha\beta}^2 = 2(\mathbf{B}^2 - \mathbf{E}^2)$ .  $\varepsilon_{\alpha\beta\gamma\delta} F_{\alpha\beta} F_{\gamma\delta} = 8i\mathbf{E}\mathbf{B}$  ist ein Pseudoskalar ( $\mathbf{B}$ !).

**Ansatz:**  $\mathcal{L}_F = -\frac{1}{16\pi} F_{\alpha\beta}^2$ . Da Elektrodynamik linear ist, gehen nur Quadrate der Felder in  $\mathcal{L}_F$  ein! der Vorfaktor  $1/16\pi$  legt das Maßsystem fest, das Minusvorzeichen wird gebraucht, damit  $S_F$  nach unten beschränkt ist. ( $\mathcal{L}_F \sim \mathbf{E}^2 \sim \dot{\mathbf{A}}^2$ )

$$S_F = \frac{i}{16\pi c} \int d^4x F_{\alpha\beta} F_{\alpha\beta}$$

(iii) Bereits früher wurde gezeigt  $\mathcal{L}_{Ww} = \frac{1}{c} \tilde{j} \cdot \tilde{A}$ ,  $S_{Ww} = \int \frac{d^4x}{ic} \mathcal{L}_{Ww}$  mit  $\tilde{j} = (q\mathbf{v}\delta(\mathbf{r} - \mathbf{r}_i), ic\rho\delta(\mathbf{r} - \mathbf{r}_i))$ . Für eine einzelne Ladung am Ort  $\mathbf{r}_i$  folgt nach Ortsintegration

$$S_{Ww} = \frac{q}{c} \int_a^b A_\alpha dx_\alpha^{(i)}$$

Das gesamte Wirkungsintegral von Feld und Ladungen  $q_j$  schreibt sich dann

$$S = \sum_j \left\{ - \int m_0^{(j)} c ds^{(j)} + \frac{q_j}{c} \int A_\alpha dx_\alpha^{(j)} \right\} + \frac{i}{16\pi c} \int d^4x F_{\alpha\beta}^2$$

### 3.4.2 Die Bewegungsgleichungen

(i) Bewegungsgleichung eines geladenen relativistischen Teilchens im Feld

Wir müssen  $S$  bezüglich der Teilchentrajektorie zu einem Minimum machen ( $ds^2 = -dx_\alpha^2$ )

$$\begin{aligned} 0 = \delta S &= \delta \int_a^b \left( -m_0 c ds + \frac{q}{c} A_\alpha dx_\alpha \right) \\ &= \int_a^b \left[ -m_0 c \delta ds + \frac{q}{c} \delta(A_\alpha dx_\alpha) \right] \\ &= \int \left[ m_0 c \frac{dx_\alpha \delta dx_\alpha}{ds} + \frac{q}{c} A_\alpha \delta dx_\alpha + \frac{q}{c} \delta A_\alpha dx_\alpha \right] \end{aligned}$$

Partielle Integration der ersten Beiden Terme liefert ( $\delta dx_\alpha = d\delta x_\alpha$ )

$$\delta S = \left[ m_0 c u_\alpha + \frac{q}{c} A_\alpha \right] \delta x_\alpha \Big|_a^b + \int \left[ -m_0 c du_\alpha \delta x_\alpha - \frac{q}{c} \delta x_\alpha dA_\alpha + \frac{q}{c} \delta A_\alpha dx_\alpha \right] = 0$$

$u_\alpha = dx_\alpha/ds$  ist die **Vierergeschwindigkeit** mit  $\tilde{u}^2 = -1$ .

Der erste Term in  $\delta S$  verschwindet, da  $(\delta x_\alpha)_{a,b} = 0$ .

$\delta A_\alpha = \frac{\partial A_\alpha}{\partial x_\beta} \delta x_\beta$  (die Variation der Felder wird auf die der Trajektorien zurückgeführt).  $\rightarrow$

$$\int \left[ -m_0 c \frac{du_\alpha}{ds} ds \delta x_\alpha - \frac{q}{c} \delta x_\alpha \frac{\partial A_\alpha}{\partial x_\beta} \frac{dx_\beta}{ds} ds + \frac{q}{c} \frac{\partial A_\alpha}{\partial x_\beta} \delta x_\beta \frac{dx_\alpha}{ds} ds \right] = 0$$

Das Integral verschwindet bei einer beliebigen Variation  $\delta x_\alpha$  nur dann, wenn

$$m_0 c \frac{du_\alpha}{ds} = \frac{q}{c} \left( \frac{\partial A_\beta}{\partial x_\alpha} - \frac{\partial A_\alpha}{\partial x_\beta} \right) u_\beta = \frac{q}{c} F_{\alpha\beta} u_\beta$$

$\alpha = 1 \dots 4$ . Dies sind die gesuchten Bewegungsgleichungen!

Die Größen  $m_0 c u_\alpha = p_\alpha$  bilden den **Viererimpuls**  $\tilde{p} = m_0 c \tilde{u}$

$$\begin{aligned} \{\tilde{u}\} &= \{\mathbf{u}, u_4\}, \quad \mathbf{u} = \frac{\mathbf{v}}{c} (1 - v^2/c^2)^{-1/2}, \quad u_4 = i(1 - v^2/c^2)^{-1/2} \\ \{\tilde{p}\} &= \{\mathbf{p}, p_4\}, \quad \mathbf{p} = m_0 \mathbf{v} (1 - v^2/c^2)^{-1/2} = m \mathbf{v}, \quad p_4 = \frac{i m_0 c}{(1 - v^2/c^2)^{1/2}} \end{aligned}$$

mit der Masse  $m = m_0 (1 - v^2/c^2)^{-1/2}$ ,  $\tilde{p}^2 = -m_0^2 c^2$ .

Die Bewegungsgleichung kann deshalb in der Form

$$F_\alpha = \frac{dp_\alpha}{ds} = \frac{q}{c} F_{\alpha\beta} u_\beta$$

$\alpha = 1 \dots 4$  umgeschrieben werden,  $F_\alpha = \frac{dp_\alpha}{ds}$  oder  $\tilde{F} = d\tilde{p}/ds$  ist die **Viererkraft**.

Der **verallgemeinerte Viererimpuls** folgt aus  $P_\alpha = \frac{\partial S}{\partial x_\alpha}$

$$P_\alpha = m_0 c u_\alpha + \frac{q}{c} A_\alpha = p_\alpha + \frac{q}{c} A_\alpha$$

$$\rightarrow \frac{1}{c^2} (E - q\phi)^2 = \mathbf{p} + m_0^2 c^2.$$

Die ersten drei Komponenten  $\alpha = 1, 2, 3$  bilden den verallgemeinerten Dreierimpuls.

Die Energie  $\mathcal{E}$  eines Teilchens folgt aus  $\mathcal{E} = \mathbf{v} \frac{\partial L}{\partial \mathbf{v}} - L$  zu

$$\mathcal{E} = \frac{m_0 c^2}{(1 - v^2/c^2)^{1/2}} + q\phi = E_{\text{kin}} + q\phi$$

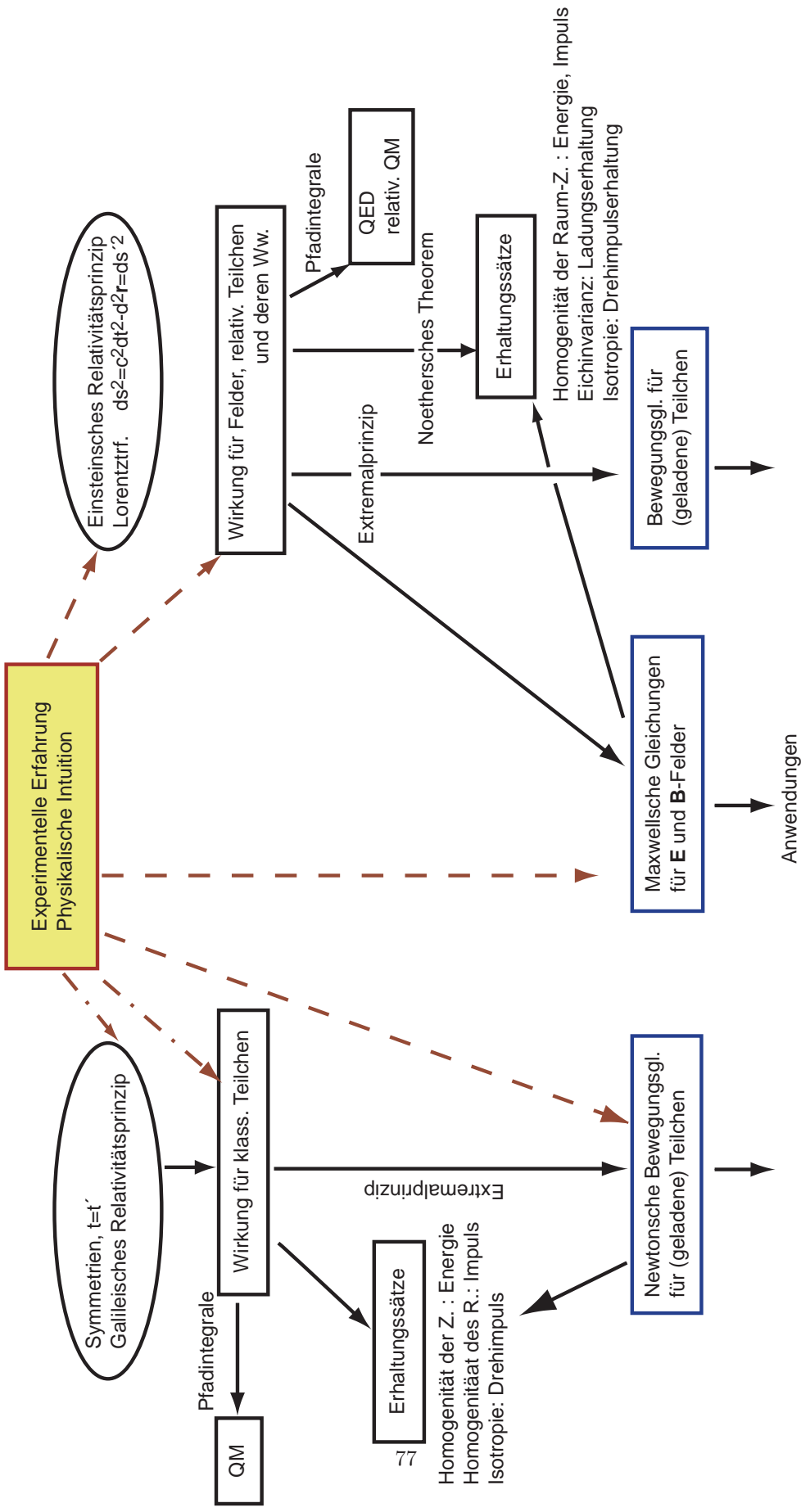
Damit wird  $P_4 = i\mathcal{E}/c$ , d.h.  $\{\tilde{P}\} = \{\mathbf{P}, i\mathcal{E}/c\}$ . Die ersten drei obigen Bewegungsgleichungen lassen sich in die übliche Form

$$\frac{d}{dt}(mv_i) = \frac{q}{c} F_{ij} v_j + \frac{q}{c} F_{i4} i = \frac{q}{c} (\mathbf{v} \times \mathbf{B})_i + qE_i$$

$i = 1 \dots 3$ , bringen (aber  $m_0 \rightarrow m$ ). Die vierte Gleichung ist der Energieerhaltungssatz:

$$\frac{d}{dt} \mathcal{E}_{\text{kin}} = \frac{d}{dt} \frac{m_0 c^2}{(1 - v^2/c^2)^{1/2}} = q\mathbf{v} \cdot \mathbf{E}$$

Vorsicht mit  $E$  und  $\mathbf{E}$ ,  $F_\alpha$  und  $F_{\alpha\beta}$ !





# Kapitel 4

## Elektrodynamik in Materie

### 4.1 Die makroskopischen Maxwell-Gleichungen

Die bisher betrachtete klassische Elektrodynamik war auf Skalen  $\gtrsim \lambda_c \approx 3.86 \cdot 10^{-11}$  cm gültig, auf kleineren Skalen spielen Quanteneffekte eine Rolle. Um bei der Beschreibung elektrodynamischer Eigenschaften von Materie (Gase, Flüssigkeiten, Festkörper) nicht die Details der atomaren und molekularen Strom- und Ladungsverteilungen berücksichtigen zu müssen (das wäre bei  $10^{23}$  Molekülen auch praktisch nicht durchführbar), führen wir jetzt eine räumliche Mittelung durch (atomare Materie  $\rightarrow$  Kontinuum).

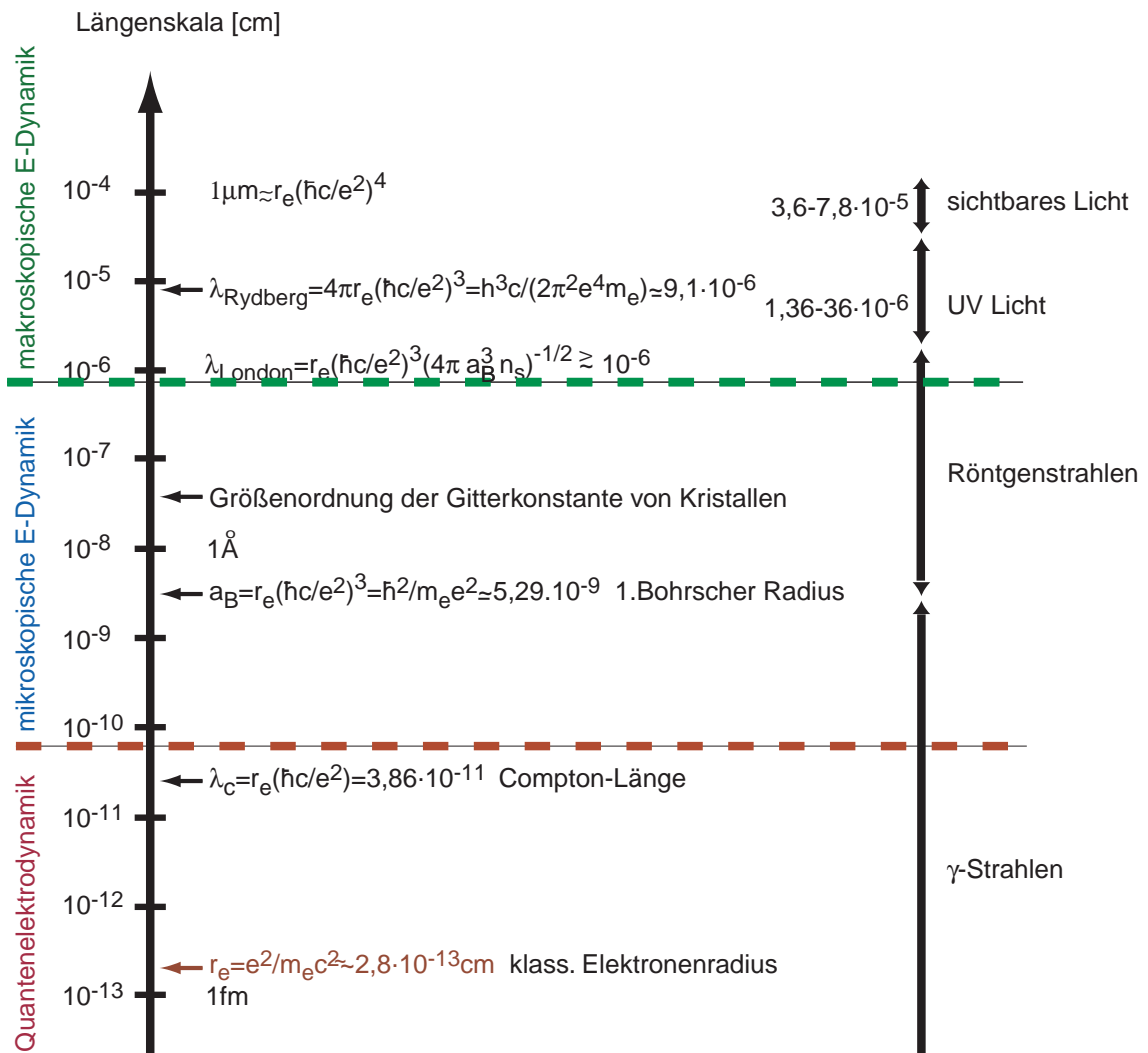
$$\lambda^{-1} = \lambda_{\text{Rydberg}}^{-1} (n_E^{-2} - n_A^{-2})$$

Auf atomarer Skala  $\sim 10^{-8}$  cm sind Felder stark durch den atomistischen Aufbau der Materie bestimmt

$$\begin{aligned}\nabla \mathbf{E}_{\text{at}} &= 4\pi \rho_{\text{at}} \\ \nabla \times \mathbf{E}_{\text{at}} &= -\frac{1}{c} \frac{\partial}{\partial t} \mathbf{B}_{\text{at}} \\ \nabla \mathbf{B}_{\text{at}} &= 0 \\ \nabla \times \mathbf{B}_{\text{at}} &= \frac{4\pi}{c} \mathbf{j}_{\text{at}} + \frac{1}{c} \frac{\partial}{\partial t} \mathbf{E}_{\text{at}}\end{aligned}$$

$\rho_{\text{at}}, \mathbf{j}_{\text{at}}$  Ladungs- und Stromverteilung auf atomarer Skala (Elektronen umkreisen Kerne etc.), Geschwindigkeiten  $\sim v_{\text{at}} \approx 10^8$  cm sec $^{-1}$

$$\begin{aligned}\frac{1}{2} m \omega^2 r^2 &= \frac{m}{2} v_{\text{at}}^2 \approx \frac{z e^2}{r}, \quad r \approx a_B \frac{n^2}{z} \quad (\text{klass. Betrachtung!}) \\ v_{\text{at}} &\approx \left( \frac{2e^2}{m a_B} \right)^{1/2} \frac{z}{n} = \sqrt{2} \frac{z}{n} \left( \frac{e^2}{\hbar c} \right) \cdot c \approx 3 \cdot \frac{z}{n} \cdot 10^8 \text{ cm sec}^{-1} \\ &\sim 10^5 \dots 10^9 \text{ cm sec}^{-1} \\ &\hat{=} 10^{-13} \dots 10^{-17} \text{ sec}\end{aligned}$$



Makroskopische Meßinstrumente messen Felder über Bereiche die groß gegenüber der atomaren Skala sind  $\rightarrow$  Vereinfachung der komplizierten atomaren Elektrodynamik durch räumliche Mittelung über atomare Felder

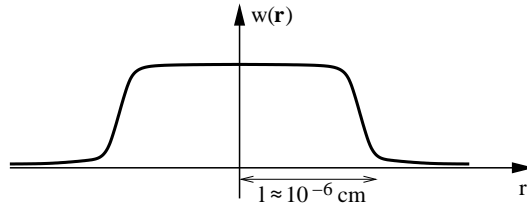
$$\langle \mathbf{E}_{\text{at}} \rangle = \mathbf{E}_{\text{makr}}, \quad \langle \mathbf{B}_{\text{at}} \rangle = \mathbf{B}_{\text{makr}}$$

$\rightarrow$  **makroskopische Elektrodynamik.**

Damit Licht noch als Welle beschreibbar ist: Mittelung über Bereiche mit einer Ausdehnung von  $10^{-6} \text{ cm}$  ( $\sim 10^6 = (10^2)^3$  Atome). Röntgenstrahlen lassen sich nicht durch makroskopische Elektrodynamik beschreiben.

Betrachte im Folgenden Nicht-Leiter, da wir Leiter schon früher betrachtet haben!

Räumliche Mittelung mit **Mittelungsfunktion**  $w(\mathbf{r})$ ,  $\int d^3r w(\mathbf{r}) = 1$



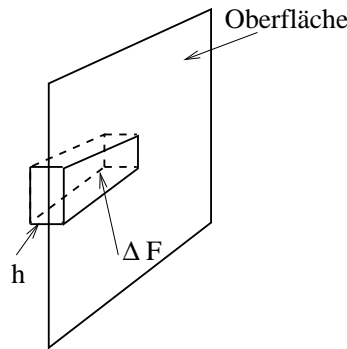
$$\begin{aligned}\langle f \rangle(\mathbf{r}) &= \int d^3 r' w(\mathbf{r} - \mathbf{r}') f(\mathbf{r}') \\ \langle \nabla f \rangle(\mathbf{r}) &= \int d^3 r w(\mathbf{r} - \mathbf{r}') \nabla' f(\mathbf{r}') = \nabla \langle f \rangle(\mathbf{r}) \\ &= w(\mathbf{r} - \mathbf{r}') f(\mathbf{r}') \Big|_{-\infty}^{\infty} - (-1) \int d^3 r' \nabla w(\mathbf{r} - \mathbf{r}') f(\mathbf{r}')\end{aligned}$$

→

$$\begin{aligned}\nabla \times \mathbf{E}_{\text{makr}} &= -\frac{1}{c} \frac{\partial}{\partial t} \mathbf{B}_{\text{makr}} & \nabla \cdot \mathbf{E}_{\text{makr}} &= 4\pi \langle \rho_{\text{at}} \rangle \\ \nabla \cdot \mathbf{B}_{\text{makr}} &= 0 & \nabla \times \mathbf{B}_{\text{makr}} &= \frac{4\pi}{c} \langle \mathbf{j}_{\text{at}} \rangle - \frac{1}{c} \frac{\partial}{\partial t} \mathbf{E}_{\text{makr}} \\ \langle \rho_{\text{at}} \rangle &= \rho_{\text{makr}} + \rho_{\text{Pol}}\end{aligned}$$

$\rho_{\text{makr}}$  enthält die äußeren, manipulierbaren Ladungen. Wenn  $\rho_{\text{makr}} = 0 \rightarrow \int_V \rho_{\text{Pol}} d^3 r = 0$ . Da dies für ein beliebiges Volumen gilt, folgt  $\rho_{\text{Pol}} = -\text{div } \mathbf{P}$ , mit  $\mathbf{P} = 0$  außerhalb des Körpers da  $\int_V \rho_{\text{Pol}} d^3 r = \int_V -\nabla \cdot \mathbf{P} d^3 r = -\oint_{\partial V} \mathbf{P} \cdot d\mathbf{a} = 0$  (liegt auf Oberfläche, dringt nicht ein).

### **P: dielektrische Polarisation**



Oberflächenladungsdichte  $\sigma = P_n = \mathbf{P} \cdot \mathbf{n}$ , da  $\int_{h\Delta F} \text{div } \mathbf{E} = \sigma \Delta F = - \int_{h\Delta F} \text{div } \mathbf{P} = \Delta F (-\mathbf{P}) \cdot (-\mathbf{n})$  folgt

$$\Delta F \sigma = h \cdot \Delta F \rho$$

Dipolmoment:

$$\begin{aligned}\int_V d^3 r \mathbf{r} \cdot \rho_{\text{Pol}} &= - \int_V d^3 r \mathbf{r} (\nabla \cdot \mathbf{P}) = - \oint_{\partial V} (d\mathbf{a} \cdot \mathbf{P}) \mathbf{r} + \int_V d^3 r \mathbf{P} \\ r_i (\nabla \cdot \mathbf{P}) &= \partial_j (x_i P_j) - P_i \delta_{ij}\end{aligned}$$

d.h.  $\mathbf{P}$  = Dipolmoment/Volumen = Polarisation.

Körper, die  $\mathbf{P} \neq 0$  besitzen, heißen polarisierbar.  $\rho_{\text{Pol}} = -\text{div } \mathbf{P}$  bestimmt  $\mathbf{P}$  bis auf  $\text{rot } \mathbf{f}$  im Innern des Dielektrikums. Erst die Beziehung zum Dipolmoment bestimmt  $\mathbf{P}$  eindeutig.

### Dielektrische Verschiebung, elektrische Induktion

$$\mathbf{D} = \mathbf{E}_{\text{makr}} + 4\pi\mathbf{P}$$

$$\langle \mathbf{j}_{\text{at}} \rangle = \mathbf{j}_{\text{makr}} + \mathbf{j}_{\text{Pol}} + \mathbf{j}_{\text{at},K}$$

$\mathbf{j}_{\text{makr}}$  "äußere" Ströme.

$$\rho_{\text{makr}} + \nabla \cdot \mathbf{j}_{\text{makr}} = 0$$

$$\rho_{\text{Pol}} + \nabla \cdot \mathbf{j}_{\text{Pol}} = 0$$

Atomare Kreisströme produzieren  $\mathbf{j}_{\text{at},K}$ ,  $\nabla \cdot \mathbf{j}_{\text{at},K} = 0$ .

$$\rho_{\text{Pol}} = -\nabla \cdot \dot{\mathbf{P}} = -\nabla \cdot \mathbf{j}_{\text{Pol}} \xrightarrow{\text{Festlegung}} \boxed{\mathbf{j}_{\text{Pol}} = \partial \mathbf{P} / \partial t} \quad \text{Polarisationsstrom}$$

( $\dot{\mathbf{P}}$  oder  $\mathbf{j}$  könnten noch  $\text{rot } \mathbf{a}$  enthalten)

$$\nabla \cdot \mathbf{j}_{\text{at},K} = 0 \quad \rightarrow \quad \boxed{\mathbf{j}_{\text{at},K} = c \nabla \times \mathbf{M}}$$

Dipolmoment durch  $\mathbf{j}_{\text{at},K}$

$$\mathbf{m} = \frac{1}{2c} \int d^3r [\mathbf{r} \times \mathbf{j}_{\text{at},K}] = \frac{1}{2} \int d^3r [\mathbf{r} \times (\nabla \times \mathbf{M})] = \int d^3r \mathbf{M}$$

Nebenrechnung:

$$\begin{aligned} \varepsilon_{ijk} x_j \varepsilon_{klm} \partial_l M_m &= x_j \partial_i M_j - x_j \partial_j M_i \\ &= \partial_i (x_j M_j) - M_j \delta_{ij} - \partial_j (x_j M_i) + 3M_i \end{aligned}$$

Unter Integral 1. Term  $\rightarrow 0$ , da  $\mathbf{M}$  außerhalb des Körpers 0, 3. Term  $\rightarrow 0$ .

$\mathbf{M}$  hat Bedeutung eines magnetischen Dipolmoments/Volumen = **Magnetisierung**.

Man führt analog zu  $\mathbf{D}$   $\boxed{\mathbf{H} = \mathbf{B}_{\text{makr}} - 4\pi\mathbf{M}}$  ein.  $\mathbf{H}$  wird das **Magnetfeld**,  $\mathbf{B}_{\text{makr}}$  **magnetische Induktion** genannt (eine sehr unglückliche Sprachregelung, denn  $\mathbf{B}$  ist das primäre Feld).

$\rightarrow$  **makroskopische Maxwell-Gleichungen in Materie** (lasse Index "makr" weg).

$$\begin{aligned}
\operatorname{div} \mathbf{D} &= 4\pi\rho \\
\operatorname{rot} \mathbf{E} &= -\frac{1}{c} \frac{\partial}{\partial t} \mathbf{B} \\
\operatorname{div} \mathbf{B} &= 0 \\
\operatorname{rot} \mathbf{H} &= \frac{4\pi}{c} \mathbf{j} + \frac{1}{c} \frac{\partial}{\partial t} \mathbf{D}
\end{aligned}$$

Die Feldgleichungen sind erst vollständig, wenn diese durch Materialgleichungen ergänzt werden.

$$\mathbf{P} = \mathbf{P}(\mathbf{E})$$

$$\mathbf{M} = \mathbf{M}(\mathbf{H})$$

$$\mathbf{j} = \mathbf{j}(\mathbf{E})$$

Im Prinzip sind diese Relationen ableitbar, dies ist Aufgabe der Festkörperphysik. Man kann sie aber auch experimentell bestimmen und dann an einfache Ansätze anpassen. Wir wählen diese Möglichkeit.

Für viele Stoffe bestehen **lineare Zusammenhänge**

$$\begin{aligned}
\mathbf{j} &= \underline{\underline{\sigma}} \mathbf{E} & \underline{\underline{\sigma}} & \text{Leitfähigkeitstensor} \sim \text{Ohmsches Gesetz} \\
\mathbf{P} &= \underline{\underline{\chi}}_e \mathbf{E} & \underline{\underline{\chi}}_e & \text{elektr. Suszeptibilität} \\
\mathbf{M} &= \underline{\underline{\chi}}_m \mathbf{H} & \underline{\underline{\chi}}_m & \text{magn. Suszeptibilität}
\end{aligned}$$

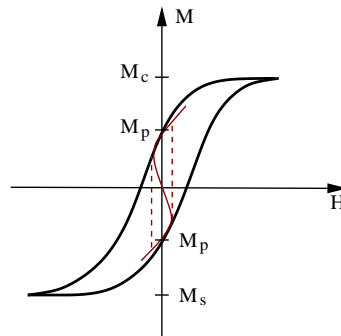
$\underline{\underline{\chi}}_m < 0$  für Diamagnetika und  $\underline{\underline{\chi}}_m > 0$  für Paramagnetika.

$$\begin{aligned}
\mathbf{D} &= (1 + 4\pi\underline{\underline{\chi}}_e) \mathbf{E} = \underline{\underline{\varepsilon}} \mathbf{E} & \underline{\underline{\varepsilon}} & \text{Dielektrizitätskonstante} \\
\mathbf{B} &= (1 + 4\pi\underline{\underline{\chi}}_m) \mathbf{H} = \underline{\underline{\mu}} \mathbf{H} & \underline{\underline{\mu}} & \text{magn. Permeabilität}
\end{aligned}$$

Leiter:  $\varepsilon \rightarrow \infty$ ; Supraleiter:  $\chi_m = -\frac{1}{4\pi}$  oder  $\frac{1}{\mu} \rightarrow \infty$ .

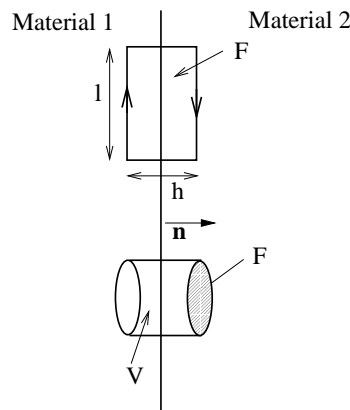
Anmerkungen:

- i.a. sind diese Beziehungen zeitlich und räumlich **nichtlokal**, z.B.  $\mathbf{j}(\mathbf{r}, t) = \iint d^3r' dt' \underline{\underline{\sigma}}(\mathbf{r} - \mathbf{r}', t - t') \mathbf{E}(\mathbf{r}', t')$  oder nach Fouriertransformation  $\tilde{\mathbf{j}}(\mathbf{k}, \omega) = \underline{\underline{\tilde{\sigma}}}(\mathbf{k}, \omega) \tilde{\mathbf{E}}(\mathbf{k}, \omega)$  mit  $\underline{\underline{\tilde{\sigma}}} = \iint d^3r dt \underline{\underline{\sigma}}(\mathbf{r}, t) e^{-\mathbf{k}\mathbf{r} - i\omega t}$  analog für  $\underline{\underline{\chi}}_e, \underline{\underline{\chi}}_m$ .
- in **Ferroelektrika** und **Ferromagnetika** tritt unterhalb der Curie-Temperatur spontan eine Polarisation bzw. Magnetisierung auf  $\mathbf{P}(\mathbf{E})$  bzw.  $\mathbf{M}(\mathbf{H})$  sind nicht mehr eindeutig. Im allgemeinen sind die Zusammenhänge **nichtlinear** (z.B.  $P_i = \chi_{ij} E_j + \chi_{ijk} E_j E_k + \dots$ )!



$M_p$  ist die spontane Magnetisierung,  $M_s$  die Sättigungs-Magnetisierung,  $\mathbf{H} = -a\mathbf{M}(1 - \mathbf{M}^2/M_p^2)$ , z.B. im isotropen Fall für kleine  $M!$ , i.a. gelten die lineare Zusammenhänge nur für kleine  $\mathbf{E}$  und  $\mathbf{H}$ !

**Randbedingungen!**



Aus den makroskopischen Maxwell-Gleichungen folgt ( $h \rightarrow 0$ )

$$\int_V d^3r \operatorname{div} \mathbf{D} = \oint_{\partial V} \mathbf{D} \cdot d\mathbf{a} = 4\pi\sigma_G \int da$$

$$\int_V d^3r \operatorname{div} \mathbf{B} = 0 = \oint_{\partial V} \mathbf{B} \cdot d\mathbf{a}$$

$$\iint_F d\mathbf{a} (\nabla \times \mathbf{E}) = \oint_{\partial F} ds \mathbf{E} = -\frac{1}{c} \frac{d}{dt} \iint_{F \rightarrow 0} d\mathbf{a} \mathbf{B}$$

$$\iint_F d\mathbf{a} (\nabla \times \mathbf{H}) = \oint_{\partial F} ds \mathbf{H} = \frac{4\pi}{c} \int_F d\mathbf{a} \mathbf{j} + \frac{1}{c} \frac{d}{dt} \iint_{F \rightarrow 0} d\mathbf{a} \mathbf{D}$$

Normalkomponenten:  $\mathbf{n} \cdot (\mathbf{B}_2 - \mathbf{B}_1) = 0$ ;  $\mathbf{n} \cdot (\mathbf{D}_2 - \mathbf{D}_1) = 4\pi\sigma_G$   
Tangentialkomponenten:  $\mathbf{n} \times (\mathbf{E}_2 - \mathbf{E}_1) = 0$ ;  $\mathbf{n} \times (\mathbf{H}_2 - \mathbf{H}_1) = \frac{4\pi}{c} \mathbf{K}_G$

$\sigma_G$ : Grenzflächenladungsdichte,  $\mathbf{K}_G$ : Grenzflächenstromdichte (hat nur Komponente)

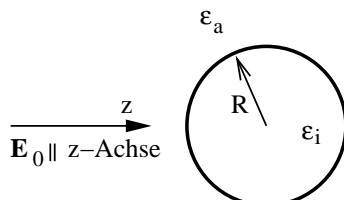
ten in der Grenzfläche!).

$$\sigma_G = \frac{1}{F} \int_V d^3r \rho \quad \text{im Limes } F, V \rightarrow 0$$

$$K_G = \frac{1}{l} \int_F d\mathbf{a} \mathbf{j} \quad \text{im Limes } l, F \rightarrow 0 \quad (\text{ist in der Regel Null})$$

## 4.2 Einfache Anwendungen der makroskopischen Maxwell-Gleichungen

### 4.2.1 Die dielektrische Kugel im homogenen statischen Feld $\mathbf{E}_0$



$$\nabla \times \mathbf{E} = 0 \rightarrow \mathbf{E} = -\nabla\phi$$

Weitab von Kugel:  $\phi = \phi_0 = -E_0 z = -E_0 r \cos \theta$

Keine freie Ladungen:  $\varepsilon \Delta \phi = -\nabla \mathbf{D} = 0$ .

**Ansatz:** wegen zylindersymmetrischen Randbedingungen keine Abhängigkeit von  $\varphi$  bei Verwendung von Polarkoordinaten:

$$\begin{aligned} \phi(r, \theta, \varphi) &= \sum_{l=0}^{\infty} \sum_{m=-l}^l \left( a_{lm} r^l + b_{lm} \frac{1}{r^{l+1}} \right) Y_{lm}(\theta, \varphi) \\ &= \left( ar + b \frac{1}{r^2} \right) \cos \theta \end{aligned}$$

(homogenes Feld).

innen:  $\phi_i = -E_0 ar \cos \theta$  (keine Singularität!)

außen:  $\phi_a = -E_0(r + br^{-2}) \cos \theta$

Randbedingungen:  $D_n, E_t$  stetig  $\rightarrow$

$$\begin{aligned} \varepsilon_i \frac{\partial}{\partial r} \phi_i &= \varepsilon_a \frac{\partial}{\partial r} \phi_a; & \frac{\partial}{\partial \theta} \phi_i &= \frac{\partial}{\partial \theta} \phi_a \\ |\hat{\varepsilon} = \varepsilon_i / \varepsilon_a| & \varepsilon_i a = \varepsilon_a (1 - 2bR^{-3}); & a &= (1 + bR^{-3}) \\ \rightarrow b &= -\frac{\hat{\varepsilon} - 1}{\hat{\varepsilon} + 2} R^3, & a &= \frac{3}{\hat{\varepsilon} + 2} \end{aligned}$$

→

$$\begin{aligned}\phi_i &= -\frac{3}{\hat{\epsilon} + 2} E_0 z \quad \text{i.e. das innere Feld ist homogen} \\ \phi_a &= -\left[1 - \frac{\hat{\epsilon} - 1}{\hat{\epsilon} + 2} \left(\frac{R}{r}\right)^3\right] E_0 r \cos \theta \\ &= -E_0 z + \frac{\hat{\epsilon} - 1}{\hat{\epsilon} + 2} R^3 E_0 \frac{z}{r^3}\end{aligned}$$

$\frac{\hat{\epsilon}-1}{\hat{\epsilon}+2} = \alpha$  "Polarisierbarkeit", der zweite Term in  $\phi_a$  ist das Potential eines Dipols mit Dipolmoment  $\mathbf{p} = \frac{\hat{\epsilon}-1}{\hat{\epsilon}+2} R^3 \mathbf{E}_0$ . In Übung 6/2 war das Dipolmoment einer **leitenden** Kugel im Feld zu  $R^3 \mathbf{E}_0$  berechnet worden, d.h. ein Metall kann als ein Dielektrikum im Limes  $\epsilon_i \rightarrow \infty$  verstanden werden.

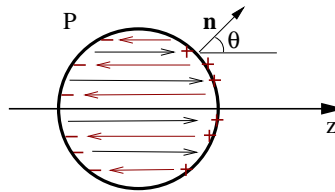
### Spezialfälle:

(i) Kugel im Vakuum  $\epsilon_a = 1$ ,  $\epsilon_i = \epsilon$

Polarisation der Kugel  $\mathbf{P} = \frac{3}{4\pi} \frac{\epsilon-1}{\epsilon+2} \mathbf{E}_0 = \frac{3}{4\pi R^3} \mathbf{p} = \frac{\epsilon-1}{4\pi} \mathbf{E}_i$ .

Elektrisches Feld in der Kugel  $\mathbf{E}_i = \mathbf{E}_0 \frac{3}{\epsilon+2} = \mathbf{E}_0 - \frac{4\pi}{3} \mathbf{P} = \mathbf{E}_0 + \mathbf{E}_{\text{ent}}$ , d.h. das elektrische Feld in der Kugel ist reduziert um das **Entelektrisierungsfeld**  $\mathbf{E}_{\text{ent}} = -\frac{4\pi}{3} \mathbf{P}$ . Dieses wird von den durch die Polarisation  $\mathbf{P}$  erzeugten Oberflächenladungen geschafft.

$$\frac{1}{r} (\mathbf{P} \cdot \mathbf{r}) = \sigma = \frac{3}{4\pi} \frac{\epsilon-1}{\epsilon+2} E_0 \cos \theta$$



**Verallgemeinerung:** Im Innern eines gleichmäßig polarisierten **Ellipsoids** hat man ein homogenes Feld  $\mathbf{E}_i$ , wobei die Beziehung zwischen  $\mathbf{E}_0$  und  $\mathbf{E}_i$  durch den Entelektrisierungstensor  $\underline{N}$  gegeben ist:

$$\mathbf{E}_i = \mathbf{E}_0 - \underline{N} \mathbf{P}$$

**Nadelförmiges Ellipsoid** mit langer Achse  $\parallel E_0$ : wegen Stetigkeit von  $E_t$  folgt  $\mathbf{E}_i = \mathbf{E}_0$  und damit  $N = 0$ .

**Scheibenförmiges Ellipsoid** mit kurzer Achse parallel zur  $E_0$ : wegen Stetigkeit von  $D_n$  folgt  $\epsilon \mathbf{E}_i = \mathbf{E}_0 \rightarrow \mathbf{E}_i - \mathbf{E}_0 = (1 - \epsilon) \mathbf{E}_i = -4\pi \mathbf{P} \rightarrow N = 4\pi$ .

Allgemein:  $N_{ik} = N_{ki}$ ,  $\sum_{i=1}^3 N^{(i)} = 4\pi$ , siehe Stoner, Phil.Mag. **36**, 803 (1945).

(ii) Kugelförmiger Hohlraum im Vakuum

$\epsilon_i = 1$   $\epsilon_a = 1/\hat{\epsilon} = \tilde{\epsilon} > 1$

Feld im Hohlraum

$$\mathbf{E}_i = \frac{3\tilde{\epsilon}}{1+2\tilde{\epsilon}}\mathbf{E}_0 \left(1 + \frac{\tilde{\epsilon}-1}{1+2\tilde{\epsilon}}\right),$$

d.h. das Feld im Hohlraum ist etwas größer als im Dielektrikum. Das Außenfeld ist wieder  $\mathbf{E}_0$  + Feld eines Dipols  $\mathbf{p} = \frac{1-\tilde{\epsilon}}{1+2\tilde{\epsilon}}R^3\mathbf{E}_0$ .

Schneidet man einen Hohlraum in das Dielektrikum, dann ist wegen Stetigkeit von  $E_t$  bei einem nadelförmigen Hohlraum  $E_i = E_a$  (lange Achse parallel zum Feld) und wegen Stetigkeit von  $D_n$   $D_a = D_i = E_i$  bei einem scheibenförmigen Hohlraum mit kurzer Achse parallel zum Feld.

Analog läßt sich eine **para**–(**dia**–) **magnetische** Kugel im homogenen statischen Feld  $\mathbf{B}_0$  behandeln. Es gilt

$$\begin{aligned} \operatorname{div} \mathbf{B} &= 0 & \mathbf{B} &= \mu \mathbf{H} & \Delta \phi &= 0 \\ \operatorname{rot} \mathbf{H} &= 0 & \mathbf{H} &= -\nabla \phi, \end{aligned}$$

d.h.  $\mathbf{B}$  entspricht in dieser Aufgabe **formal**  $\mathbf{D}$  und  $\mathbf{H}$  entspricht  $\mathbf{E}$ . Tritt zu dem durch Polarisierung (Magnetisierung) erzeugten Dipolmoment  $\mathbf{p}$  ( $\mathbf{m}$ ) der Kugel noch ein spontanes Dipolmoment  $\mathbf{p}_s$  ( $\mathbf{m}_s$ ) hinzu, dann liefert dies im Innern der Kugel ein zusätzliches Entelektrigungs– (Entmagnetisierungs–) Feld  $\mathbf{E}_{\text{ent},s} = -\mathbf{p}_s/R^3$  ( $\mathbf{H}_{\text{ent},s} = -\mathbf{m}_s/R^3$ ) und außen ein zusätzliches Dipolfeld.

#### 4.2.2 Das lokale Feld, die Clausius–Massotti–Formel

Das **lokale Feld**  $E_{\text{lok}}$  im Innern eines Dielektrikums ist das Feld am Ort eines herausgenommenen Moleküls, es wird herforgerufen durch alle anderen Moleküle und das äußere Feld. Es ist verschieden vom makroskop. mittleren Feld  $\mathbf{E}$ ! Im Folgenden nehmen wir an, daß das Dielektrikum homogen polarisiert ist.

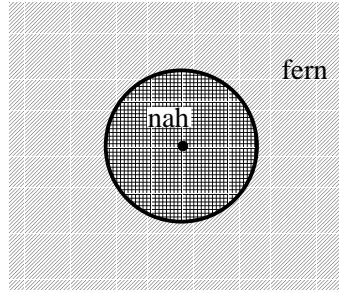
Im Festkörper und in den Flüssigkeiten bewirkt das Feld der Nachbarmoleküle im wesentlichen  $\mathbf{E}_{\text{lok}}$ , in Gasen das angelegte äußere Feld  $\mathbf{E}_0$ .

Zerlege Beiträge zu  $\mathbf{E}_{\text{lok}}$  in solche aus **Nah**– und **Fernzone**

$$\begin{aligned} \mathbf{E}_{\text{lok}} = \mathbf{E}_{at,0} &= \mathbf{E}_{at,0}^{\text{nah}} + \mathbf{E}_{at,0}^{\text{fern}} = \mathbf{E}_{at}^{\text{nah}} + \langle \mathbf{E}_{at,0}^{\text{fern}} \rangle \\ &= \mathbf{E} - \langle \dot{\mathbf{E}}_{at,0}^{\text{nah}} \rangle + \mathbf{E}_{at,0}^{\text{nah}} \\ &= \mathbf{E} + \mathbf{E}_{\text{Lorentz}} + \mathbf{E}_{at,0}^{\text{nah}} \end{aligned}$$

$\langle \mathbf{E}_{at,0}^{\text{nah}} \rangle$  ist das durch die Polarisation der Kugel herforgerufene Entelektrigungs–feld (Lorentzfeld)

$$\langle \mathbf{E}_{at,0}^{\text{nah}} \rangle = -\frac{4\pi}{3}\mathbf{P} =: -\mathbf{E}_{\text{Lorentz}}$$



Speziell für eine Umgebung mit **kubischer Symmetrie** aus Dipolfeldern

$$\mathbf{E}_{at,0}^{nah} = \sum_I \frac{1}{r_I^5} [3(\mathbf{p} \cdot \mathbf{r}_I)\mathbf{r}_I - r_I^2 \mathbf{p}]$$

$I$  sind die Moleküle in der Nahzone

$$\sum_I \frac{t_{I,i} r_{I,j}}{r_I^5} = \delta_{ij} \frac{1}{3} \sum_I r_I^{-3} \rightarrow \mathbf{E}_{at,0}^{nah} = 0$$

$$\mathbf{E}_{lok} = \mathbf{E} + \frac{4\pi}{3} \mathbf{P} = \mathbf{E} + \frac{4\pi}{3} \frac{\varepsilon - 1}{4\pi} \mathbf{E} = \frac{\varepsilon + 2}{3} \mathbf{E}$$

Bei nicht zu starken Feldern ist das molekulare (atomare) Dipolmoment proportional dem lokalen Feld (bei kleinen lokalen Feldern)

$$\mathbf{p}_{mol} = \alpha_{mol} \mathbf{E}_{lok}$$

(früher: Metallkugel  $\alpha = R^3$ , dielekt. Kugel  $\alpha = \frac{\varepsilon - 1}{\varepsilon + 2} R^3$ ).

$\rightarrow \mathbf{P} = n \alpha_{mol} \mathbf{E}_{lok} = n \alpha_{mol} (\mathbf{E} + \frac{4\pi}{3} \mathbf{P})$ ,  $n$  ist die Dichte der Atome oder Moleküle.

$$\mathbf{P} = \frac{n \alpha_{mol}}{1 - (4\pi/3) n \alpha_{mol}} \mathbf{E} = \chi_e \mathbf{E}$$

$\rightarrow$  Suszeptibilität  $\frac{\varepsilon - 1}{4\pi} = \chi_e = \frac{n \alpha_{mol}}{1 - (4\pi/3) n \alpha_{mol}}$

$$\frac{\varepsilon - 1}{\varepsilon + 2} = \frac{4\pi}{3} n \alpha_{mol}; \quad \text{Clausius-Massotti-Formel}$$

- (i) Verschiebungspolarisation: einfaches Bild wie z.B. Atom als Metallkugelchen gibt  $\alpha_{mol} \approx a_B^3 \cdot 16\pi$ , im Festkörper  $\chi_e \approx 1$ , im Gasen  $\chi_e \approx 10^{-4}$ .
- (ii) Orientierungspolarisation: permanente Dipole  $\mathbf{p}_0$  wollen sich parallel zum Feld stellen, dies wird durch thermische Fluktuationen jedoch gestört  $\alpha_{mol} \approx p_0^2 / 3k_B T$ ,  $p_0 \approx e a_B$

$$\chi_e \approx \frac{e^2 a_B^2}{3k_B T} n \approx (a_B^3 n) \frac{1}{3} \frac{e^2}{a_B k_B T} \quad \text{Curiesche Gesetz}$$

$$e^2 / a_B \approx 30 \text{ eV}, \text{ Zimmertemperatur } k_B T \approx \frac{1}{40} \text{ eV}, \quad a_B^3 n \approx \frac{1}{(10 a_B)^3} a_B^3 \approx 10^{-3}.$$

### 4.2.3 Feldenergie in linearen Medien

Wegen Wechselwirkung Feld  $\leftrightarrow$  Materie: i.a. keine eindeutige Aufteilung in

- 1) makroskopische Feldenergie;
- 2) innere Energie der Materialien.

Beachte:  $\langle \mathbf{E}_{at}^2 \rangle \neq \langle \mathbf{E}_{at} \rangle^2 = \mathbf{E}^2$  etc. wegen starker Schwankungen der atomaren Größen.

Brauchbare Definition aus Leistung der makroskopischen Felder an makroskopischem Strom der freien Ladungen  $\nabla \times \mathbf{H} = \frac{1}{c} \frac{\partial}{\partial t} \mathbf{D} + \frac{4\pi}{c} \mathbf{j}$

$$\begin{aligned} \mathbf{jE} &= \frac{1}{4\pi} \left\{ c\mathbf{E} \cdot (\nabla \times \mathbf{H}) - \mathbf{E} \frac{\partial}{\partial t} \mathbf{D} \right\} \\ &= -\frac{c}{4\pi} \nabla(\mathbf{E} \times \mathbf{H}) - \frac{1}{4\pi} \left( \mathbf{E} \frac{\partial}{\partial t} \mathbf{D} + \mathbf{H} \partial_t \mathbf{B} \right) \end{aligned} \quad (4.1)$$

(i.a. nicht  $\frac{\partial}{\partial t} U(\vec{E}, \vec{B}, \vec{P}, \vec{M})$ ) da

$$\begin{aligned} \nabla(\mathbf{E} \times \mathbf{H}) &= \nabla_\alpha \varepsilon_{\alpha\beta\gamma} E_\beta H_\gamma = -\varepsilon_{\beta\alpha\gamma} E_\beta \nabla_\alpha H_\gamma + \varepsilon_{\alpha\beta\gamma} H_\gamma \nabla_\alpha E_\beta \\ &= -\mathbf{E}(\nabla \times \mathbf{H}) + \mathbf{H}(\nabla \times \mathbf{E}) \end{aligned}$$

d.h.

$$\begin{aligned} \mathbf{E}(\nabla \times \mathbf{H}) &= -\nabla(\mathbf{E} \times \mathbf{H}) + \mathbf{H}(\nabla \times \mathbf{E}) \\ &= -\nabla(\mathbf{E} \times \mathbf{H}) - \mathbf{H} \frac{1}{c} \partial_t \mathbf{B} \end{aligned}$$

Aber in linearen Materialien:  $D_i = \varepsilon_{ij} E_j$ ,  $B_i = \mu_{ij} H_j$ . Dann folgt der **makroskopische Energiesatz**

$$\frac{\partial}{\partial t} w + \nabla \mathbf{s} + \mathbf{j} \cdot \mathbf{E} = 0$$

mit makroskopischer Feldenergie-Dichte

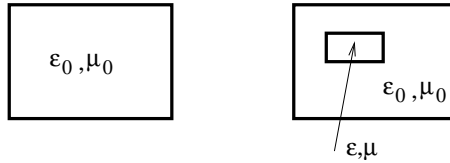
$$w =: \frac{1}{8\pi} (\varepsilon_{ij} E_i E_j + \mu_{ij} B_i B_j) = \frac{1}{8\pi} (\mathbf{E} \mathbf{D} + \mathbf{H} \mathbf{B})$$

und makroskopischem Energiestrom

$$\mathbf{s} =: \frac{c}{4\pi} (\mathbf{E} \times \mathbf{H}) \quad \text{Poynting-Vektor}$$

Energieänderung durch dielektrisches bzw. permeables Material: betrachte Ersetzung eines Subvolumens  $V$  eines Mediums mit  $\varepsilon_0, \mu_0$  durch Material mit  $\varepsilon_1, \mu_1$

$$\begin{aligned} W &= \frac{1}{8\pi} \int d^3 r \{ (\mathbf{E} \mathbf{D} + \mathbf{H} \mathbf{B}) - (\mathbf{E}_0 \mathbf{D}_0 + \mathbf{H}_0 \mathbf{B}_0) \} \\ &= \frac{1}{8\pi} \int d^3 r \{ (\mathbf{E} + \mathbf{E}_0)(\mathbf{D} - \mathbf{D}_0) + (\mathbf{H} - \mathbf{H}_0)(\mathbf{B} + \mathbf{B}_0) + (\mathbf{E} \mathbf{D}_0 - \mathbf{E}_0 \mathbf{D}) + (\mathbf{H}_0 \mathbf{B} - \mathbf{H} \mathbf{B}_0) \}. \end{aligned}$$



Mit  $\rho = \rho_0$ ,  $\mathbf{j} = \mathbf{j}_0$  folgt (gleiche Ladungen, gleiche Ströme)

$$\begin{aligned}\nabla(\mathbf{D} - \mathbf{D}_0) &= 0 \\ \nabla \times (\mathbf{H} - \mathbf{H}_0) &= 0 \quad \rightarrow \quad \mathbf{H} - \mathbf{H}_0 = \nabla\psi\end{aligned}$$

und  $\nabla(\mathbf{B} + \mathbf{B}_0) = 0$ ,  $\nabla \times (\mathbf{E} + \mathbf{E}_0) \rightarrow \mathbf{E} + \mathbf{E}_0 = \nabla\phi$ . Damit wird 1. und 2. Term in { } Klammer:

$$\begin{aligned}\int d^3r \{ (\mathbf{E} + \mathbf{E}_0)(\mathbf{D} - \mathbf{D}_0) + \dots \} &= \int d^3r \{ \nabla\phi(\mathbf{D} - \mathbf{D}_0) + \nabla\psi(\mathbf{B} + \mathbf{B}_0) \} \\ &\stackrel{\text{partielle Integr.}}{=} - \int d^3r \{ \underbrace{\phi \nabla(\mathbf{D} - \mathbf{D}_0)}_{=0} + \psi \underbrace{\nabla(\mathbf{B} + \mathbf{B}_0)}_{=0} \} = 0.\end{aligned}$$

Damit

$$W = \frac{1}{8\pi} \int d^3r \{ (\varepsilon_0 - \varepsilon) \mathbf{E} \cdot \mathbf{E}_0 + (\mu_0^{-1} - \mu^{-1}) \mathbf{B} \cdot \mathbf{B}_0 \}$$

(i) elektrisch:

$$W_{\text{el}} = -\frac{1}{8\pi} \int_V d^3r (\varepsilon - \varepsilon_0) \mathbf{E} \cdot \mathbf{E}_0$$

i.a.  $\mathbf{E} \cdot \mathbf{E}_0 > 0 \rightarrow$  wenn  $\varepsilon > \varepsilon_0$  Material wird angezogen, wenn  $\varepsilon < \varepsilon_0$  Material wird abgestoßen. Vakuum:  $\varepsilon_0 = 1 \rightarrow$

$$W_{\text{el}} = -\frac{1}{2} \int_V d^3r \mathbf{P} \cdot \mathbf{E}_0$$

da  $(\varepsilon - 1) = 4\pi\chi E = P \sim$  ähnlich Dipol im äußeren Feld.

(ii) magnetisch:

$$W_{\text{magn}} = \frac{1}{8\pi} \int d^3r (\mu - \mu_0) \mathbf{H} \cdot \mathbf{H}_0$$

Vakuum  $\mu_0 = 1$ ,  $\mathbf{H}_0 = \mathbf{B}_0$

$$W_{\text{magn}} = \frac{1}{2} \int_V d^3r \mathbf{M} \cdot \mathbf{B}_0 = W_{\text{magn}}^{\text{mech}} + W_{\text{magn}}^{\text{Strom}}$$

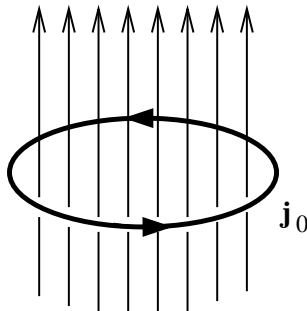
Wieder ähnlich einem Dipol im äußeren Feld, aber **anderes** Vorzeichen

$$W_{\text{magn}}^{\text{mech}} = -\frac{1}{2} \int d^3r \mathbf{M} \cdot \mathbf{B}_0$$

$$W_{\text{magn}}^{\text{Strom}} = \int d^3r \mathbf{M} \cdot \mathbf{B}_0$$

Wenn  $\chi_m > 0$  Material wird ins Feld gezogen, wenn  $\chi_m < 0$  Material wird aus dem Feld gestoßen (bei konst. äußeren Feld). Energie für felderzeugende Ströme gegen induziertes elektr. Feld ist aufzubringen. (siehe ??).

Erläuterung:



$$W_{\text{magn}}^{\text{mech}} = - \int d^3r \int_0^{H'_0} \chi H'_0 dH'_0 = - \int d^3r \int_0^{H'_0} H'_0 dM'_0$$

$$dW_{\text{magn}} = \frac{1}{4\pi} H dB = \frac{1}{4\pi} H dH + H dM = \frac{1}{4\pi} H dH + \chi H dH$$

produziert  $\mathbf{H}_0 = \frac{1}{\mu_0} \mathbf{B}_0$ ,  $\nabla \times \mathbf{H}_0 = \frac{4\pi}{c} \mathbf{j}_0$ .

Bringe jetzt Material mit Volumen  $V$  und Permeabilität  $\mu$  in das Magnetfeld  $\rightarrow 2$  Prozesse:

1.) in  $V$  wird Magnetisierung  $M$  aufgebaut

2.)  $\mathbf{B}$  ändert sich, und damit ist  $\frac{1}{c} \dot{\mathbf{B}} = -\nabla \times \mathbf{E} \neq 0$

wird  $\mathbf{B}$  z.B. größer,  $\dot{B} > 0$ ,  $\nabla \times \mathbf{E} < 0$ , dann entsteht tangential zum Stromring ein  $\mathbf{E}$ -Feld, das  $\mathbf{j}_0$  entgegengesetzt ist, dadurch wird der Strom kleiner. Wir müssen daher die Energie  $W_{\text{magn}}^{\text{Strom}}$  einspeisen, um den Strom im Ring konstant zu halten (wir hatten  $\mathbf{j} = \mathbf{j}_0$  angesetzt).

## 4.3 London-Theorie der Supraleitung (SL)

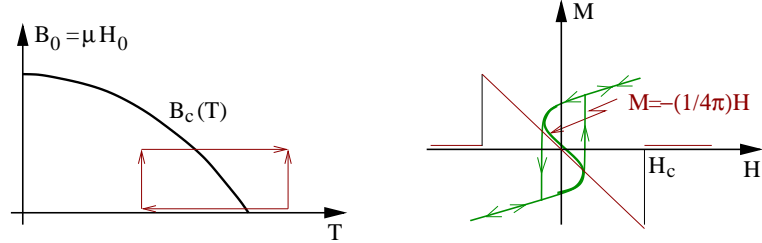
### 4.3.1 Die London-Gleichung und einige ihrer Konsequenzen

Wichtigste Eigenschaften der SL:

(i) **verschwindender Widerstand** (Kammerling-Onnes 1911. Hg  $T_c \approx 4.2$  K)

SL ist keine seltene Eigenschaft: es gibt mehr supraleitende Elemente im Periodensystem als nicht-supraleitende, ca.  $10^4$  Legierungen, die supraleitend sind,  $T_c \lesssim 100$  K.

(ii) **Meissner-Ochsenfeld-Effekt** (1933)  $\mathbf{B}$ -Feld wird aus dem SL gedrängt (SL 1. Art).



$B$ -Feld dringt ein, wird dann verdrängt, Induktionsströme sind längst abgeklungen. Phänomenologische Erklärung: SL ist **perfekter Diamagnet**  $\bar{\chi}_m = -1/4\pi$ ,  $\bar{B} = (1 + 4\pi\bar{\chi}_m)\bar{H} = 0$ . Gilt nur auf Skalen  $\gg$  Londonsche Eindringtiefe  $\lambda_L$ .

Erklärung des Zusammenhangs zwischen (i) und (ii) durch London. Wir machen die Annahme der Existenz von zwei Sorten von Strömen bzw. Elektronen: supraleitender Strom  $\mathbf{j}_s$  und normalleitender Strom  $\mathbf{j}_n$

$$\begin{aligned}\mathbf{j} &= \mathbf{j}_s + \mathbf{j}_n \\ \mathbf{j}_n &= \sigma_n \mathbf{E} \\ \mathbf{j}_s &= -q\mathbf{v}_s n_s, \quad \frac{\partial}{\partial t} m\mathbf{v}_s = -q\mathbf{E},\end{aligned}$$

d.h. supraleitende Elektronen werden beschleunigt,  $\mathbf{v}_s$  ist die lokale Geschwindigkeit.

$$\frac{\partial}{\partial t} \mathbf{j}_s = \frac{n_s q^2}{m} \mathbf{E} = \frac{1}{\Lambda} \mathbf{E}.$$

Mit  $\nabla \times \mathbf{E} + \frac{1}{c} \frac{\partial}{\partial t} \mathbf{B}$  folgt

$$\frac{\partial}{\partial t} (c\Lambda \nabla \times \mathbf{j}_s + \mathbf{B}) = 0, \quad (4.2)$$

außerdem

$$\mu^{-1} \nabla \times \mathbf{B} - \varepsilon \frac{\partial}{\partial t} \mathbf{E} = \frac{4\pi}{c} (\mathbf{j}_s + \mathbf{j}_n). \quad (4.3)$$

Stationäre Bedingungen:  $\dot{\mathbf{E}} = 0$ ,  $\mathbf{j}_n = 0$  (Widerstand dämpft Normalstrom).

Aus (4.2) folgt: jede zeitunabhängige Lösung von  $\mathbf{j}_s$  und  $\mathbf{B}$  ist Lösung von (4.2) (z.B.  $\mathbf{j}_s = 0$ ,  $\mathbf{B} \neq 0$  im Innern des SLs), im Gegensatz zum Experiment.

F.+H. London: Einschränkung von (4.2)

$$\boxed{c\Lambda \nabla \times \mathbf{j}_s + \mathbf{B} = 0} \quad (4.4)$$

unterscheidet SL von blossen idealen Leiter! London-Gleichung  $\sim$  Material-Gleichung des Londonschen Standpunkts. Anwendung von  $\nabla \times$  auf (4.3) und Verwendung der

Maxwell-Gleichungen liefert

$$\begin{aligned}\mu^{-1}\nabla\times(\nabla\times\mathbf{B}) &= \varepsilon\frac{1}{c}\frac{\partial}{\partial t}\nabla\times\mathbf{E} + \frac{4\pi}{c}(\nabla\times\mathbf{j}_s + \nabla\times\mathbf{j}_n) \\ -\mu^{-1}\Delta\mathbf{B} &= -\varepsilon\frac{1}{c^2}\frac{\partial^2}{\partial t^2}\mathbf{B} - \frac{4\pi}{c}\frac{1}{c\Lambda}\mathbf{B} + \frac{4\pi}{c}\sigma_n\left(-\frac{1}{c}\frac{\partial}{\partial t}\mathbf{B}\right)\end{aligned}$$

$$\Delta\mathbf{B} = \left(\lambda_L^{-2} + \mu\frac{4\pi}{c^2}\sigma_n\frac{\partial}{\partial t} + \varepsilon\mu\frac{1}{c^2}\frac{\partial^2}{\partial t^2}\right)\mathbf{B}$$

(4.5)

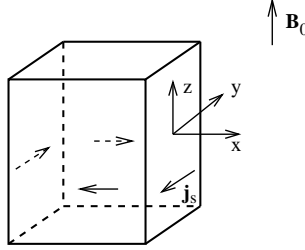
$\lambda_L^2 = (mc^2)/4\pi n_s q^2 \mu$ ,  $\lambda_L$  ist die **Londonsche Eindringtiefe**.

Analog

$$\begin{aligned}-\nabla(\nabla\cdot\mathbf{f}) + \Delta\mathbf{f} &= \left(\lambda_L^{-2} + \mu\frac{4\pi}{c^2}\sigma_n\frac{\partial}{\partial t} + \varepsilon\mu\frac{1}{c^2}\frac{\partial^2}{\partial t^2}\right)\mathbf{f} \\ \mathbf{f} &= \{\mathbf{B}, \mathbf{E}, \mathbf{j}_s, \mathbf{j}\}\end{aligned}$$

Spezialfall:  $n_s = \lambda_L^{-2} = 0$ , **Telegraphengleichung**  $\simeq$  **Wellenausbreitung im Leiter**.

Lösung der Gleichungen im Halbraum  $x < 0$ , **lang-gestreckter Quader**  $\rightarrow$  kein Entmagnetisierungsfeld



(i) **statischer Fall**  $\dot{\mathbf{B}} = 0$ ,  $\mathbf{B} = \mu\mathbf{B}_0 e^{-|x|/\lambda_L}$ , d.h.  $\mathbf{B} = 0$  im Innern des SLs. Man kann jetzt eine weitere Mittelung (räumlich) über Gebiete  $\gg \lambda$  ausführen,  $\mathbf{B} \rightarrow \bar{\mathbf{B}}$ , dann ist  $\bar{\mathbf{B}} = 0$  überall im SL, diesen Standpunkt nennt man den **diamagnetischen**:  $x = -1/4\pi$ . Betrachte isolierten SL im Feld

$$\mu^{-1}\nabla\times\mathbf{B} = \frac{4\pi}{c}\mathbf{j}_s.$$

Sei  $\mathbf{B}_0 \parallel z$ , dann

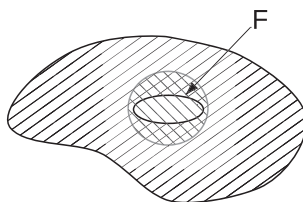
$$-\mu^{-1}\frac{\partial}{\partial x}B_z = \frac{4\pi}{c}j_{s,y} \rightarrow j_{s,y}(x) = -\frac{c}{4\pi\mu}\frac{1}{\lambda_L}e^{-|x|/\lambda_L}\mu B_0 = -\frac{cB_0}{4\pi\lambda_L}e^{-|x|/\lambda_L},$$

d.h. auf der Oberfläche des SLs fließt ein Abschirmstrom, der  $\mathbf{B} = 0$  im Innern bewirkt  $\sim$  makroskopisches diamagnetisches Atom.

”London-Eichung”:  $c\Lambda\mathbf{j}_s = -\mathbf{A}$ , enthält beide Materialgleichungen:

$$\begin{aligned}\frac{\partial}{\partial t}c\Lambda\mathbf{j}_s &= -\dot{\mathbf{A}} = c\mathbf{E} \quad (\phi \equiv 0) \\ c\Lambda\nabla\times\mathbf{j}_s &= -\mathbf{B}\end{aligned}$$

**Fluxoid-Erhaltung:** Betrachte vielfach zusammenhängenden SL



Fluxoid  $\phi_F = \iint_F \mathbf{B} \, da + c\Lambda \oint_{\partial F} \mathbf{j}_s \, ds$ ,  $\partial F$  umschliesst Loch im SL. Wenn  $\partial F$  tief im SL: Fluxoid = Fluss durch  $F$ .

$$\frac{\partial}{\partial t} \phi_F = \iint_F \dot{\mathbf{B}} \, da + c \oint_{\partial F} ds \cdot \mathbf{E} = 0$$

wegen  $\nabla \times \mathbf{E} + \frac{1}{c} \frac{\partial}{\partial t} \mathbf{B} = 0$ , d.h. das Fluxoid ist eine Erhaltungsgrösse!

Tatsächlich ist das Fluxoid auch quantisiert:

$$\phi_{\partial F} = \frac{hc}{q} n = \phi_0 n,$$

$$q = 2e, \phi_0 = \frac{hc}{2e} = 2 \cdot 10^{-7} \text{ Gau\ss} \cdot \text{cm}^{-2}.$$

### (ii) Dynamischer Fall

Ansatz  $\mathbf{B} = \text{Re } \mathbf{B}_1 e^{i(\mathbf{k}\mathbf{r} - \omega t)}$  ebene Welle

$$0 = \mathbf{k}^2 + \lambda_L^{-2} - \frac{\varepsilon\mu}{c^2} \omega^2 - i\delta^{-2}(\omega), \quad \delta^2(\omega) = \frac{c^2}{4\pi\mu\sigma_n\omega}.$$

Betrachte Spezialfall  $\delta^{-1} \ll k, \lambda_L^{-1}$ , dann

$$\omega^2 = \frac{c^2}{\mu\varepsilon} (\mathbf{k}^2 + \lambda_L^{-2})$$

”Photonen bekommen Masse”, z.B.  $\sigma_n = 0$  reiner SL mit  $\lambda_L \approx 10^3 \text{ \AA} \rightarrow m_0 \simeq 7 \cdot 10^{-5} m_e$ .

$E^2 = c^2 p^2 + m_0^2 c^4$  ist die relativistische Beziehung zwischen Energie und Impuls für Teilchen mit Ruhemasse

$$\mathbf{p} = \hbar \mathbf{k}$$

$$\mathbf{E} = \hbar \omega$$

$$\omega^2 = c^2 k^2 + m_0^2 c^4 / \hbar^2, \quad m_0 \hat{=} \hbar / c \lambda_L.$$

### 4.3.2 Ableitung der London-Theorie aus der Ginzburg-Landau-Wirkung

Eine Eichinvariante ist die **Lagrange-Dichte** ( $A_\alpha \rightarrow A_\alpha + \partial_\alpha \chi$ ,  $\psi \rightarrow \psi' = \psi \exp\left(\frac{iq}{\hbar c} \chi\right)$ )

$$\mathcal{L}_{GL} = -\frac{1}{16\pi} F_{\alpha\beta}^2 + \frac{1}{c} j_{n,\alpha} A_\alpha - \frac{\hbar^2}{2m} \left| \left( \partial_\alpha - i \frac{q}{\hbar c} A_\alpha \right) \psi \right|^2 - V(|\psi|^2)$$

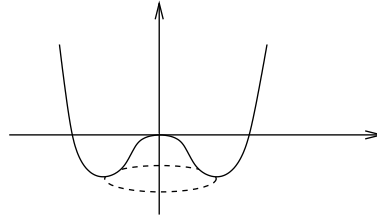
$$F_{\alpha\beta} = \partial_\alpha A_\beta - \partial_\beta A_\alpha; \quad V(|\psi|^2) = \frac{1}{2} a |\psi|^2 + \frac{1}{4} b |\psi|^4; \quad \varepsilon = \mu = 1$$

Naiv: Entwicklung der potentiellen Energie nach Potenzen von  $n_s = \psi^* \psi$  + eichinv. Kopplung.

Anmerkung: der Term

$$-\frac{\hbar^2}{2m} \left| \left( \frac{\partial}{i c \partial t} - i \frac{q}{\hbar c} i \phi \right) \psi \right|^2 = -\frac{\hbar^2}{2m c^2} \left| \left( \frac{\partial}{\partial t} + i \frac{q}{\hbar c} \phi \right) \psi \right|^2$$

tritt in der eigentlichen Ginzburg-Landau-Theorie nicht auf, er verschwindet wenn man  $\psi$  als zeitabhängig betrachtet und  $\phi \equiv 0$  setzt.



Variation bezüglich  $\psi, \psi^*$  und  $A$  ergibt die **Ginzburg-Landau-Gleichungen**

$$a\psi + b|\psi|^2\psi - \frac{\hbar^2}{2m} \left( \partial_\alpha - i \frac{q}{\hbar c} A_\alpha \right)^2 \psi = 0, \quad \alpha = 1, \dots, 3 \quad (4.6)$$

$$\frac{1}{2m} \frac{q \hbar}{c i} (\psi \nabla \psi^* - \psi^* \nabla \psi) + \frac{1}{m} \frac{q^2}{c^2} \psi \psi^* \mathbf{A} + \frac{1}{4\pi} \nabla \times \nabla \times \mathbf{A} - \frac{1}{c} \mathbf{j}_n = 0$$

$$-\frac{1}{c} \mathbf{j}_s + \frac{1}{4\pi} \nabla \times \nabla \times \mathbf{A} - \frac{1}{c} \mathbf{j}_n = 0 \quad (4.7)$$

oder

$$\frac{1}{4\pi} \nabla \times \mathbf{B} = \frac{1}{c} (\mathbf{j}_n + \mathbf{j}_s).$$

Wenn das System räumlich homogen ist ( $\nabla \psi = 0$ ), so folgt die London-Gleichung

$$\mathbf{j}_s = -\frac{q^2}{mc} \psi \psi^* \mathbf{A} = -\frac{q^2}{mc} n_s \mathbf{A}.$$

Tatsächlich hat (4.6) für  $a > 0$  die Lösung  $\psi = 0$  während für  $a < 0$  die Lösung  $|\psi|^2 = |\psi_0|^2 = -a/b$  stabil ist.

Es ist jetzt zweckmässig, statt  $\psi$  neue Felder  $h$  und  $\alpha$  einzuführen:  $\psi = (|\psi_0| + h) e^{i\alpha}$ ,  $h$  und  $\alpha$  sind reell. Durch eine Eichtransformation  $A_i \rightarrow A_i - \frac{\hbar c}{q} \partial_i \alpha = \tilde{A}_i$  kann der Phasenfaktor beseitigt werden ( $\alpha$  ist dann Null).

Die Lagrange-Dichte lässt sich jetzt in den neuen Feldern  $\tilde{\mathbf{A}}, h$  schreiben

$$\begin{aligned}\mathcal{L} &= -\frac{1}{16\pi}\tilde{F}_{ij}^2 - \frac{q^2}{2mc^2}|\psi_0|^2\tilde{A}_i^2 - \frac{\hbar^2}{2m}(\nabla h)^2 + \frac{1}{c}j_{i_n}\tilde{A}_i \\ &\quad - \frac{\hbar^2}{2mc^2}(h^2 + 2h|\psi_0|)\tilde{A}_i^2 - V(h) \\ &= -\frac{1}{16\pi}\tilde{F}_{ij}^2 + \frac{1}{c}\left(j_{n,i} + \frac{1}{2}j_{s,i}\right)\tilde{A}_i - \frac{\hbar^2}{2m}(\nabla h)^2 - \frac{\hbar^2}{2mc^2}(\varphi^2 + 2\varphi|\psi_0|)\tilde{A}_i^2 - \tilde{V}(h).\end{aligned}$$

$\varphi$  ist ein Higgs-Feld,  $\tilde{F}_{\alpha\beta}$  ist ein massives Vektorboson. Das  $\tilde{A}$ -Feld hat eine Masse  $\rightarrow$  die Wechselwirkung zwischen den Strömen  $\mathbf{j}_n$  ist kurzreichweitig. Der Phasen-FG steckt im  $\tilde{A}$ -Feld.

Analog in **nicht-abelscher Theorie** (Eichinvarianz, aber Eichtransformationen kommutieren nicht)  $A_\alpha \rightarrow A_\alpha^a$ , Ankopplung an Higgs-Feld (unbekannter Ursache).

**Elektroschwache Wechselwirkung:**  $A_\alpha^a = \underbrace{\{W_\alpha^1, W_\alpha^2, W_\alpha^3\}}_{\text{SU}(2)} \underbrace{B_\mu}_{\text{U}(1)}$  sind zunächst alle masselos. Als Folge der Symmetriebrechung im Higgs-Feld folgt

$$\left. \begin{aligned}W_\alpha^\pm &= 1/\sqrt{2}(W_\alpha^1 \pm iW_\alpha^2) \\ Z_\alpha &= \dots W_\alpha^3 + \dots B_\alpha\end{aligned} \right\} \begin{array}{l} \text{massiv} \\ \text{masselos} \end{array}$$

Photonen-Feld masselos

## 4.4 Elektromagnetische Wellen in Materie

Wir betrachten in diesem Kapitel nicht-Supraleitung ( $n_s \propto \lambda_L^{-2} = 0!$ ). Wir übernehmen die Telegraphengleichung (4.5)

$$\Delta \mathbf{B} = \left( \mu \frac{4\pi}{c^2} \sigma_n \frac{\partial}{\partial t} + \varepsilon \mu \frac{1}{c^2} \frac{\partial^2}{\partial t^2} \right) \mathbf{B},$$

analog gilt bei Abwesenheit makroskopischer Ladungen  $\text{div } \varepsilon \mathbf{E} = 0$  und damit

$$\Delta \mathbf{E} = \left( \mu \frac{4\pi}{c^2} \sigma_n \frac{\partial}{\partial t} + \varepsilon \mu \frac{1}{c^2} \frac{\partial^2}{\partial t^2} \right) \mathbf{E}.$$

Der Ansatz ebener Wellen  $\sim e^{i(\mathbf{k}\mathbf{r} - \omega t)}$  ergibt (siehe ??)

$$\mathbf{k}^2 = \frac{\varepsilon \mu}{c^2} \omega^2 \left( 1 + i \frac{4\pi \sigma_n}{\varepsilon \omega} \right)$$

$$\frac{ck}{\omega} = \sqrt{\varepsilon \mu} \sqrt{1 + i \frac{4\pi \sigma_n}{\varepsilon \omega}} =: n(\omega) + ik(\omega)$$

$n(\omega)$  ist der Brechungsindex,  $k(\omega)$  der Extinktionskoeffizient.

Tatsächlich sind i.a.  $\varepsilon, \mu, \sigma$   $\omega$ - (und eigentlich auch  $k$ -)abhängig ("Dispersion") und i.a. **komplex**. Bei  $\mathbf{k}$  in  $x$ -Richtung (z.B.) ergibt sich daher

$$e^{i(kx - \omega t)} = e^{-\omega k x / c} e^{i\omega n(x - ct/n)/c}.$$

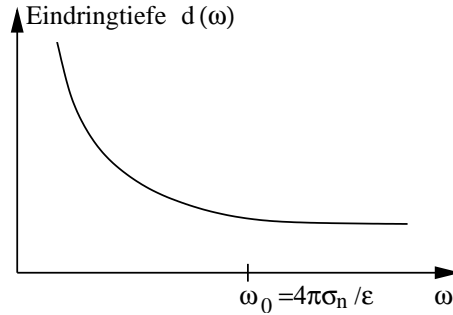
$d = c/\omega k$  ist die **Eindringtiefe**,  $v_{ph} = c/n$  ist die **Phasengeschwindigkeit**. Mit  $\omega_0 = 4\pi\sigma_n/\varepsilon$  wird  $\frac{ck}{\omega} = \sqrt{\varepsilon\mu}\sqrt{1+i(\omega_0/\omega)}$ , betrachte jetzt Grenzfälle

$$\omega_0 \ll \omega : \quad n + ik \approx \sqrt{\varepsilon\mu} \left( 1 + \frac{1}{2}i\frac{\omega_0}{\omega} \right), \quad d = \sqrt{\frac{\varepsilon}{\mu}} \frac{c}{2\pi\sigma_n}$$

(unter der Annahme, dass  $\sigma, \varepsilon, \mu$  reell sind und keine Dispersion zeigen).

$$\omega_0 \gg \omega : \quad n + ik \approx \sqrt{\varepsilon\mu} \frac{\omega_0}{\omega} i = \sqrt{\frac{2\pi\sigma_n\mu}{\omega}} (1 + i)$$

$$n \approx k \quad d = \sqrt{2}\delta\omega = \frac{c}{(2\pi\mu\sigma_n\omega)^{1/2}}.$$



**Skin-Effekt:** hochfrequente Wellen dringen wenig in das Material an.

Abschätzung: Metalle  $\omega_0 = 4\pi\sigma_n/\varepsilon \approx 10^{18} \text{ sec}^{-1}$ , dieses  $\omega_0$  entspricht elektromagnetischen Wellen mit  $\lambda_0 = 2\pi c/\omega_0 \simeq 10 \text{ \AA} \sim$  Wellenlänge harter Röntgenstrahlen.

Hierbei beträgt die asymptotische Eindringtiefe:  $d = \sqrt{\frac{\varepsilon}{\mu}} \frac{c}{2\pi\sigma_n} = \frac{1}{(\varepsilon\mu)^{1/2}} \frac{2c}{\omega_0} \simeq 3 \text{ \AA}$ .

Bisher wurde die Dispersion (i.e. die  $\omega$ -Abhängigkeit von  $\varepsilon, \mu, \sigma_n$ ) der Materialkonstante vernachlässigt. Wird Dispersion zugelassen, so ist der Zusammenhang zwischen  $\omega$  und  $k$  i.a. nicht linear (siehe auch oben  $\omega_0 \gg \omega$ ).

Betrachte Wellenpaket, das sich in  $x$ -Richtung bewegt:

$$\begin{aligned} \mathbf{E}(x, t) &= \int_k \tilde{\mathbf{E}}(k) e^{i(kx - \omega t)} \\ \tilde{\mathbf{E}}(k) &= \tilde{\mathbf{E}}(\bar{k}) e^{-(k - \bar{k})^2 / 2\Delta} \end{aligned}$$

Mittelwert  $\bar{k}$ , Breite  $\sqrt{\Delta} \ll \bar{k}$

$$\omega(k) = \omega(\bar{k}) + (k - \bar{k})\omega'(\bar{k}) + \frac{1}{2}(k - \bar{k})^2\omega''(\bar{k})$$

Entwicklung kann hier abgebrochen werden, wenn

$$\omega(\bar{k}) \gg \sqrt{\Delta}|\omega'(\bar{k})|, \quad \Delta|\omega''(\bar{k})|,$$

damit wird

$$\begin{aligned}
 \mathbf{E}(x, t) &= \tilde{\mathbf{E}}(\bar{k}) e^{i(\bar{k}x - \omega(\bar{k})t)} \times \\
 &\times \int_k e^{-\frac{(k-\bar{k})^2}{2\Delta} [1 + i\Delta\omega''(\bar{k})t] + i(k-\bar{k})[x - \omega'(\bar{k})t]} \\
 &\stackrel{\text{nach Gauss-Integration}}{=} \tilde{\mathbf{E}}(\bar{k}) e^{i(\bar{k}x - \omega(\bar{k})t)} \times \\
 &\times \frac{\Delta}{\left(2\pi[1 - i\Delta\omega''(\bar{k})t]\right)^{1/2}} \exp\left(-\frac{\Delta[x - \omega'(\bar{k})t]^2}{2[1 + i\Delta\omega''(\bar{k})t]}\right),
 \end{aligned}$$

d.h. das **Wellenpaket** ist charakterisiert durch: die **Phasengeschwindigkeit**  $v_{ph} = \omega(\bar{k})/\bar{k}$ , die Geschwindigkeit des Schwerpunkts: **Gruppengeschwindigkeit**  $v_{gr} = \left.\frac{d\omega(k)}{dk}\right|_{k=\bar{k}}$ , die **Breite des Wellenpakets**  $\Delta x = \sqrt[4]{\Delta^{-2} + [\omega''(\bar{k})t]^2} \approx \sqrt{\omega''(\bar{k})t}$ .

Aus (s.o.)

$$\begin{aligned}
 \frac{ck}{\omega} &= n(\omega) + ik(\omega) \\
 \frac{c^2 k^2}{\omega^2} &= \mu(\omega) \left( \varepsilon(\omega) + i \frac{4\pi\sigma_n(\omega)}{\omega} \right) = \mu(\omega)\eta(\omega)
 \end{aligned}$$

folgt für  $k \ll n$  (sonst keine Propagation) und  $\mu \simeq 1$  ( $\chi_m \sim 10^{-5} \dots 10^{-9}$ )

$$n^2(\omega) \simeq \text{Re } \eta(\omega)$$

Phasengeschwindigkeit:

$$v_{ph}(\omega) = \frac{\omega(k)}{k} = \frac{c}{n(\omega)} = \frac{c}{(\text{Re } \eta(\omega))^{1/2}}.$$

Gruppengeschwindigkeit:

$$v_g = \frac{d\omega}{dk} = c \left[ n(\omega) + \omega \frac{dn}{d\omega} \right]^{-1}.$$

Oder

$$v_g = v_{ph} \left[ 1 + \frac{1}{2} \frac{d \ln \text{Re } \eta}{d \ln \omega} \right]^{-1}$$

da  $\frac{dk}{d\omega} = \frac{n(\omega)}{c} + \frac{\omega}{c} \frac{dn}{d\omega}$ .

Normale Dispersion  $dn/d\omega > 0$ , anormale Dispersion  $dn/d\omega < 0$ .

## 4.5 Drude-Modell für $\varepsilon(\omega)$ , $\sigma_n(\omega)$

Das Drude-Modell ist ein einfaches Modell zur Frequenzabhängigkeit der Dielektrizitätskonstanten und der Leitfähigkeit.

Die Materie besteht aus freien und elastisch gebundenen Elektronen, Wechselwirkungen werden ersetzt durch Reibung.

Die Bewegungsgleichung des  $\alpha$ -ten Elektrons lautet:

$$m(\ddot{\mathbf{r}}_\alpha + \omega_\alpha^2 \mathbf{r}_\alpha + \tau_\alpha^{-1} \dot{\mathbf{r}}_\alpha) = e \mathbf{E}_{loc} \approx e \mathbf{E} \quad (4.8)$$

i.a. ist das lokale Feld verschieden von dem äußeren angelegten, i.a. hängen die Beziehungen von der Gitterstruktur ab, deshalb approximieren wir  $\mathbf{E}_{loc} \approx \mathbf{E}$ .  $\omega_\alpha = 0$  für freie Elektronen.

Betrachte monochromatisches Feld:  $\mathbf{E}(t) = \text{Re} \{ \tilde{\mathbf{E}}(\omega) e^{-i\omega t} \}$ . Ansatz:  $\mathbf{r}_\alpha(t) = \text{Re} \{ \tilde{\mathbf{r}}_\alpha(\omega) e^{-i\omega t} \}$ , dann

$$\tilde{\mathbf{r}}_\alpha = \frac{e/m}{\omega_\alpha^2 - \omega^2 - i\omega/\tau_\alpha} \tilde{\mathbf{E}}(\omega) \quad (4.9)$$

$n$  ist die Zahl der Moleküle/Volumeneinheit;  $n f_0 = n_0$  ist die Zahl der freien Elektronen/Volumeneinheit;  $f_\nu$  ( $\nu \neq 0$ ) ist die Zahl der Elektronen mit Frequenz  $\omega_\nu$ , Dämpfung  $\tau_\nu$  pro Molekül;  $\sum_\nu f_\nu =: z$  ist die Zahl der (wirksamen) Elektronen/Molekül.

Das Dipolmoment des  $\alpha$ -ten Elektrons ist:  $\mathbf{p}_\alpha = e \mathbf{r}_\alpha$ , damit ist die Polarisation:

$$\tilde{\mathbf{P}}(\omega) = \sum_{\alpha}^{\text{geb. E.}} \frac{e^2/m}{\omega_\alpha^2 - \omega^2 - i\omega/\tau_\alpha} \tilde{\mathbf{E}}(\omega) = n \frac{e^2}{m} \sum_{\nu} \frac{f_\nu}{\omega_\nu^2 - \omega^2 - i\omega/\tau_\nu} \tilde{\mathbf{E}}(\omega)$$

also ist die frequenzabhängige dielektrische Konstante

$$\varepsilon(\omega) = 1 + \frac{4\pi n e^2}{m} \sum_{\nu} \frac{f_\nu}{\omega_\nu^2 - \omega^2 - i\omega/\tau_\nu}. \quad (4.10)$$

Mit der Stromdichte der freien Elektronen:  $\mathbf{j} = \sum_{\alpha}^{\text{freie E.}} e \dot{\mathbf{r}}_\alpha$  folgt aus (4.9)

$$\begin{aligned} \tilde{\mathbf{j}}(\omega) &= -i\omega \sum_{\alpha}^{\text{freie E.}} \frac{e^2/m}{\omega_\alpha^2 - \omega^2 - i\omega/\tau_\alpha} \tilde{\mathbf{E}}(\omega) \\ &= -i\omega n \frac{e^2}{m} \frac{f_0}{-\omega^2 - i\omega/\tau_0} \tilde{\mathbf{E}}(\omega) \\ &= n_0 \frac{e^2}{m} \frac{\tau_0}{1 - i\omega\tau_0} \tilde{\mathbf{E}}(\omega), \end{aligned}$$

also ist die frequenzabhängige Leitfähigkeit:

$$\sigma(\omega) = \frac{\sigma_0}{1 - i\omega\tau_0}, \quad \sigma_0 = \frac{n_0 e^2}{m} \tau_0. \quad (4.11)$$

Bei hohen Frequenzen: physikalisch kein Unterschied zwischen freien und gebundenen Elektronen, sowie

$$\nabla \times \mathbf{H} = \frac{4\pi}{c} \mathbf{j} + \frac{1}{c} \frac{\partial}{\partial t} \mathbf{D} = \left( \frac{4\pi}{c} \sigma - \frac{i\omega}{c} \varepsilon \right) \mathbf{E} =: -\frac{i\omega}{c} \eta \mathbf{E}$$

mit komplexer DK (Dielektr. Konstante):

$$\begin{aligned} \eta(\omega) &:= \varepsilon(\omega) + i \frac{4\pi\sigma(\omega)}{\omega} \\ &= 1 + \frac{4\pi n e^2}{m} \sum_{\lambda} \frac{f_\lambda}{\omega_\lambda^2 - \omega^2 - i\omega/\tau_\lambda}, \quad \lambda = 0, \nu \end{aligned} \quad (4.12)$$

”Kleine”  $\omega$ :  $\eta(\omega) = \varepsilon_0 + i4\pi\sigma_0/\omega$  mit statischer DK

$$\varepsilon_0 = 1 + \frac{4\pi ne^2}{m} \sum_{\nu} \frac{f_{\nu}}{\omega_{\nu}^2} \quad (4.13)$$

$$n = (1/4\pi)3(1/r_s^3)$$

$$\chi_{el} \approx \frac{ne^2}{m} \sum_{\nu} \frac{f_{\nu}}{\omega_{\nu}^2} \approx \frac{fn\hbar^2 e^2 a_B^2}{me^4} \approx na_B^3 z$$

$$\hbar\omega_{\nu} \approx \frac{e^2}{a_B}, \quad a_B \approx \frac{\hbar^2}{me^2}$$

$$na_B^3 \approx 1.5 \cdot 10^{-2} \hat{=} r_s = 2,5 a_B \sim \text{Alkali-Metalle}$$

Eigentlich haben wir hier  $n\alpha$  berechnet, Voraussetzung für  $n\alpha \approx \chi$  war  $\frac{4\pi}{3}n\alpha \ll 1$ .

”Grosse”  $\omega$ :  $\eta(\omega) = 1 - (\omega_p/\omega)^2$ .

Für  $\omega \gg \omega_p$  wird Metall durchlässig ( $\sigma \rightarrow 0$ )  $\lambda_p = 2\pi c/\omega_p \approx 1500 \dots 3200 \text{Å}$  (UV!!) bei Alkali-Metallen.

Plasmafrequenz:

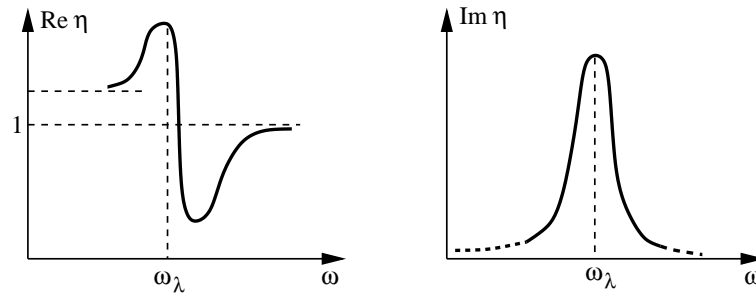
$$\omega_p = \sqrt{\frac{4\pi Ne^2}{m}}, \quad (4.14)$$

$N := n \sum_{\lambda} f_{\lambda}$  ist die Elektronendichte.

$\omega \approx \omega_{\lambda}$ ,  $\omega_{\lambda}$  Eigenfrequenz: ( $|\omega_{\lambda}\tau_{\lambda}| \gg 1$ )

$$\eta(\omega) = \frac{1}{\eta_{\lambda}} + \frac{4\pi ne^2}{m} \frac{f_{\lambda}/\omega_{\lambda}^2}{[1 - (\omega/\omega_{\lambda})^2] - i/(\omega_{\lambda}\tau_{\lambda})}$$

$\eta_{\lambda}$  gibt den Beitrag aller anderen Osz. bei  $\omega_{\lambda}$  an.



$$\frac{d \text{Re } \eta(\omega)}{d\omega} < 0 \quad \text{anomale Dispersion}$$

sowie ”grosser”  $\text{Im } \eta(\omega)$ .

$$v_{gr} = c(\text{Re } \eta)^{-1/2} \left( 1 + \frac{1}{2} \frac{d \ln \text{Re } \eta(\omega)}{d \ln \omega} \right)^{-1}$$

$v_{gr}$  kann im Gebiet der anomalen Dispersion grösser als  $c$  werden, was auf vereinfachende Annahme bei der Berechnung von  $\eta$  zurückzuführen ist. Zudem verliert die

genäherte Entwicklung von  $\omega(k)$  um  $(\bar{k})$  und die daraus resultierende Def. von  $v_{gr}$  ihre Bedeutung.

### Energieabsorbtion

Mittlere Leistung: gemittelt über Periode  $T = 2\pi/\omega$

$$\begin{aligned}
 W &:= \frac{1}{T} \int_0^T dt \sum_{\alpha} e\mathbf{r}_{\alpha}(t) \mathbf{E}(t) \\
 &= \frac{1}{T} \int_0^T dt \operatorname{Re} \left[ -i\omega \frac{\eta(\omega) - 1}{4\pi} \tilde{\mathbf{E}}(\omega) e^{-i\omega t} \right] \operatorname{Re} [\tilde{\mathbf{E}}(\omega) e^{-i\omega t}] \\
 &= \frac{1}{16\pi} \left[ -i\omega(\eta(\omega) - 1) + i\omega(\eta(\omega) - 1)^* \right] |\tilde{\mathbf{E}}(\omega)|^2 \\
 &= \frac{1}{8\pi} \omega \operatorname{Im} \eta(\omega) |\tilde{\mathbf{E}}(\omega)|^2
 \end{aligned}$$

mit elektromagnetische Energiedichte  $u(\omega) = \frac{1}{8\pi} |\tilde{\mathbf{E}}(\omega)|^2$ .

Energieabsorbtion/Zeiteinheit:

$$W(\omega) = u(\omega) \omega \operatorname{Im} \eta(\omega) \quad (4.15)$$

## 4.6 Kramers-Kronig Relationen

Im Weiteren betrachten wir ein Dielektrikum ( $\sigma(\omega = 0) = 0$ ).

Die frequenzabhängige Dielektrische Konstante  $\varepsilon(\omega)$ , bzw. die frequenzabhängige Suszeptibilität  $\chi(\omega) = (\varepsilon(\omega) - 1)/4\pi$  bedeutet mit

$$\begin{aligned}
 \text{Polarisation } \mathbf{P}(\mathbf{r}, t) &= \int_{\omega} \tilde{\mathbf{P}}(\mathbf{r}, \omega) e^{-i\omega t} \\
 \text{elektr. Feld } \mathbf{E}(\mathbf{r}, t) &= \int_{\omega} \tilde{\mathbf{E}}(\mathbf{r}, \omega) e^{-i\omega t} \\
 \tilde{\mathbf{P}}(\mathbf{r}, \omega) &= \chi(\omega) \tilde{\mathbf{E}}(\mathbf{r}, \omega)
 \end{aligned} \quad (4.16)$$

Also:

$$\mathbf{P}(t) = \int_{\omega} \chi(\omega) \tilde{\mathbf{E}}(\omega) e^{-i\omega t} = \int_{-\infty}^{\infty} dt' \mathbf{E}(t') \int_{\omega} \chi(\omega) e^{-i\omega(t-t')}$$

mit

$$\hat{\chi}(t) := \int_{\omega} \chi(\omega) e^{-i\omega t} \quad (4.17)$$

$$\mathbf{P}(\mathbf{r}, t) = \int_{-\infty}^{\infty} dt' \hat{\chi}(t-t') \mathbf{E}(\mathbf{r}, t'), \quad (4.18)$$

es liegt also eine zeitliche Nahwirkung vor.

**Kausalität:**

Die Polarisation wird nur bestimmt von elektr. Feldern zu **früheren** Zeiten

$$\hat{\chi}(t) = 0 \quad \text{für } t < 0 \quad (4.19)$$

mit komplexen  $z$ :

$$\chi(z) := \int_{-\infty}^{\infty} dt e^{izt} \hat{\chi}(t) = \int_0^{\infty} dt e^{izt} \hat{\chi}(t) \quad (4.20)$$

→  $\chi(z)$  ist eine analytisch (differenzierbare) komplexe Funktion für  $\text{Im } z > 0$ , da

1. Integral existiert für  $\text{Im } z = 0$ ,  $\text{Re } z = \omega$ .
2. Konvergenz des Integrals verbessert durch

$$|e^{izt}| = e^{-t \text{Im } z} < 1.$$

Ausserdem:  $\chi(\omega) \sim 1/\omega^2$  für  $|\omega| \rightarrow \infty$ .

(Die Antwort der Ladungsträger für große Frequenzen wird bestimmt durch die Beschleunigung:  $m_\alpha \ddot{\mathbf{r}}_\alpha + \dots = e_\alpha \mathbf{E}(t)$ .)

Bzw. für  $|z| \rightarrow \infty$  bei  $\text{Im } z > 0$ :

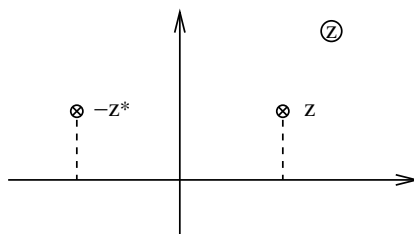
$$\chi(z) = \int_0^{\infty} dt e^{izt} \cdot [\hat{\chi}(0) + t\hat{\chi}'(0) + \dots] = \frac{i\hat{\chi}(0)}{z} - \frac{\hat{\chi}'(0)}{z^2} + \dots$$

("Kurzzeit-Entwicklung") mit Stetigkeit von  $\hat{\chi}(t)$ :

$$\chi(z) = -\frac{\hat{\chi}'(0)}{z^2} + O(z^{-3}) \quad (4.21)$$

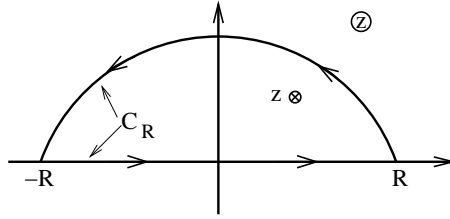
$\mathbf{E}, \mathbf{P}$  sind reell. Damit ist  $\hat{\chi}(t)$  auch reell. Also

$$\chi(z)^* = \chi(-z^*) \quad (4.22)$$



Damit folgt die Darstellung als Cauchy-Integral:

$$\chi(z) = \frac{1}{2\pi i} \oint_{C_R} \frac{\chi(z')}{z' - z}$$

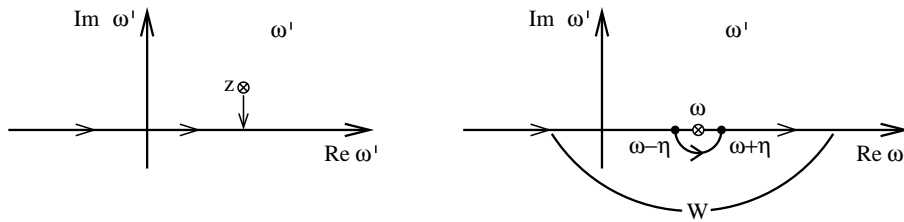


Für  $R \rightarrow \infty$ : Integral über Halbkreis  $\rightarrow 0$

$$\chi(z) = \frac{1}{2\pi i} \int_{-\infty}^{\infty} d\omega' \frac{\chi(\omega')}{\omega' - z} \quad (4.23)$$

Für  $z$  gegen reelle Achse:  $z \rightarrow \omega + i\varepsilon$ ,  $\varepsilon \rightarrow +0$

$$\chi(\omega) = \frac{1}{2\pi i} \int_{-\infty}^{\infty} d\omega' \frac{\chi(\omega')}{\omega' - \omega - i\varepsilon} = \frac{1}{2\pi i} \int_W d\omega' \frac{\chi(\omega')}{\omega' - \omega}$$



Integral über kleinen Halbkreis ( $\omega' = \omega + \eta e^{i\phi}$ )

$$\int d\omega' \frac{\chi(\omega')}{\omega' - \omega} \approx \chi(\omega) \int \frac{d(\eta e^{i\phi})}{\eta e^{i\phi}} = i\chi(\omega) \int_{\pi}^{2\pi} d\phi = i\pi\chi(\omega)$$

also

$$\begin{aligned} \chi(\omega) &= \frac{1}{2\pi i} \int_{-\infty}^{\infty} d\omega' \frac{\chi(\omega')}{\omega' - \omega - i\varepsilon} \\ &\stackrel{\text{für } \varepsilon \rightarrow +0}{=} \frac{1}{2\pi i} \lim_{\eta \rightarrow 0} \left( \int_{-\infty}^{\omega - \eta} + \int_{\omega + \eta}^{\infty} \right) d\omega' \frac{\chi(\omega')}{\omega' - \omega} + \frac{1}{2} \chi(\omega) \\ &=: \frac{1}{2\pi i} \mathcal{P} \int_{-\infty}^{\infty} d\omega' \frac{\chi(\omega')}{\omega' - \omega} + \frac{1}{2} \chi(\omega) \end{aligned}$$

( $\mathcal{P}$  ist Hauptwert des Integrals).

Kurzform:

$$\frac{1}{x - i\varepsilon} = \frac{\mathcal{P}}{x} + i\pi\delta(x). \quad (4.24)$$

Also:

$$\chi(\omega) = \frac{1}{\pi i} \mathcal{P} \int_{-\infty}^{\infty} d\omega' \frac{\chi(\omega')}{\omega' - \omega}, \quad (4.25)$$

sowie

$$\chi(z) = \frac{1}{\pi} \int_{-\infty}^{\infty} d\omega' \frac{\text{Im} \chi(\omega')}{\omega' - z}.$$

Zerlegung in Real- und Imaginärteil:

### Kramers-Kronig Relationen

$$\text{Re} \chi(\omega) = \frac{1}{\pi} \mathcal{P} \int_{-\infty}^{\infty} d\omega' \frac{\text{Im} \chi(\omega')}{\omega' - \omega} \quad (4.26)$$

$$\text{Im} \chi(\omega) = -\frac{1}{\pi} \mathcal{P} \int_{-\infty}^{\infty} d\omega' \frac{\text{Re} \chi(\omega')}{\omega' - \omega} \quad (4.27)$$

Aus

$$\chi(\omega) = \text{Re} \chi(\omega) + i \text{Im} \chi(\omega) = \chi(-\omega)^* = \text{Re} \chi(-\omega) - i \text{Im} \chi(-\omega)$$

folgt

$$\text{Re} \chi(\omega) = \text{Re} \chi(-\omega) \quad (4.28)$$

$$\text{Im} \chi(\omega) = -\text{Im} \chi(-\omega) \quad (4.29)$$

Speziell

$$\int_{-\infty}^{\infty} d\omega' \frac{\text{Im} \chi(\omega')}{\omega' - \omega} = \int_0^{\infty} d\omega' \text{Im} \chi(\omega') \left( \frac{1}{\omega' - \omega} + \frac{1}{\omega' + \omega} \right) = \int_0^{\infty} d\omega' \text{Im} \chi(\omega') \frac{2\omega'}{\omega'^2 - \omega^2}$$

also

$$\text{Re} \chi(\omega) = \frac{2}{\pi} \mathcal{P} \int_0^{\infty} d\omega' \frac{\omega' \text{Im} \chi(\omega')}{\omega'^2 - \omega^2}. \quad (4.30)$$

**Passives System:** absorbiert Energie

$$\frac{W(\omega)}{u(\omega)} = \omega \text{Im} \chi(\omega) \geq 0$$

$$\text{also: } \chi(0) = \text{Re} \chi(0) = \frac{2}{\pi} \int_0^{\infty} d\omega' \frac{\text{Im} \chi(\omega')}{\omega'} \geq 0$$

$$\chi_0 := \chi(0) = \frac{2}{\pi} \int_0^{\infty} d\omega \frac{\text{Im} \chi(\omega)}{\omega} \geq 0, \quad \text{bzw. } \varepsilon_0 \geq 1 \quad (4.31)$$

typisches "Response-Dissipationstheorem".

Für  $\omega \rightarrow \infty$  mit **Plasmafrequenz**  $\omega_p$

$$\chi(\omega) = \frac{1}{4\pi} (\varepsilon(\omega) - 1) = -\frac{1}{4\pi} \left( \frac{\omega_p}{\omega} \right)^2 + \dots$$

$$\omega_p^2 = -4\pi \lim_{\omega \rightarrow \infty} [\omega^2 \text{Re} \chi(\omega)] = -8\mathcal{P} \int_0^{\infty} d\omega' \lim_{\omega \rightarrow \infty} \left[ \frac{\omega^2}{\omega'^2 - \omega^2} \right] \omega' \text{Im} \chi(\omega')$$

also

$$\omega_p^2 = 8 \int_0^{\infty} d\omega \omega \operatorname{Im} \chi(\omega) \quad (4.32)$$

Darstellungen für  $\chi_0$  und  $\omega_p^2$ : **Summenregeln**

Für elektronisches System

**Oszillatorstärke**

$$f(\omega) := \frac{2}{\pi} \frac{m}{e^2} \omega \operatorname{Im} \chi(\omega), \quad (4.33)$$

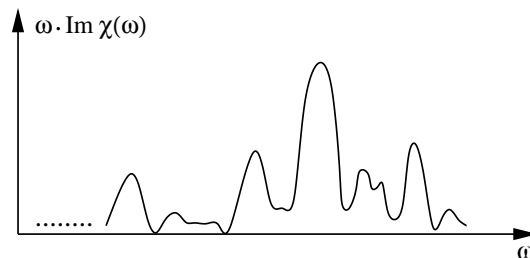
wobei  $f(\omega) = f(-\omega)$ . Dann ist

$$\omega_p^2 = 4\pi \frac{e^2}{m} \int_0^{\infty} d\omega f(\omega) = \frac{4\pi n e^2}{m}$$

( $n$  ist die Elektronendichte). Damit:  $f$ -Summenregel

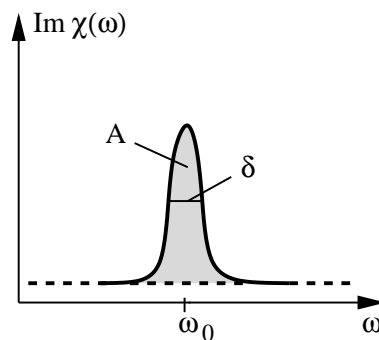
$$n = \int_0^{\infty} d\omega f(\omega). \quad (4.34)$$

Typisches Absorptionsspektrum



In Umgebung einer "Linie"

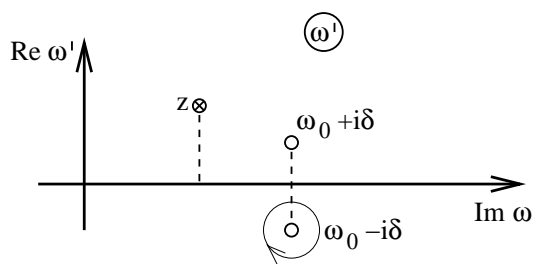
$$\operatorname{Im} \chi(\omega) = \operatorname{Im} \bar{\chi}(\omega) - \frac{A\delta}{(\omega - \omega_0)^2 + \delta^2} \stackrel{\omega \approx \omega_0}{\approx} \text{const.} \quad (4.35)$$



Damit:

$$\begin{aligned}\chi(z) - \bar{\chi}(z) &= \frac{A\delta}{\pi} \int_{-\infty}^{\infty} d\omega' \frac{1}{(\omega' - z)[(\omega' - \omega_0)^2 + \delta^2]} \\ &= \frac{A\delta}{\pi} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{d\omega'}{(\omega' - z)(\omega' - \omega_0 - i\delta)(\omega' - \omega_0 + i\delta)}\end{aligned}$$

Pole:



”Verbiegung” des Integrationsweges längs reeller  $\omega'$ -Achse zu einem Kreis um Pol  $\omega' = \omega_0 - i\delta$ ; Auswertung mit Residuen-Satz:

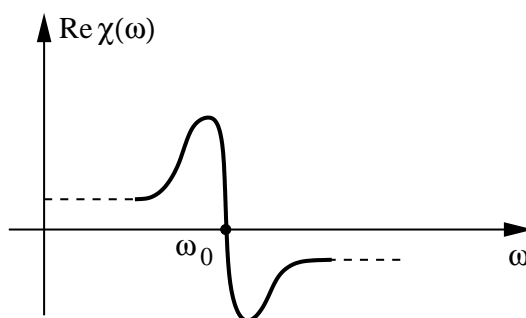
$$\chi(z) - \bar{\chi}(z) = \frac{A\delta}{\pi} (-2\pi i) \frac{1}{(\omega_0 - i\delta - z)(-2i\delta)}$$

Für  $z \rightarrow \omega$ :

$$\chi(z) - \bar{\chi}(z) = \frac{A}{(\omega_0 - \omega) - i\delta} = A \frac{(\omega - \omega_0) + i\delta}{(\omega - \omega_0)^2 + \delta^2}$$

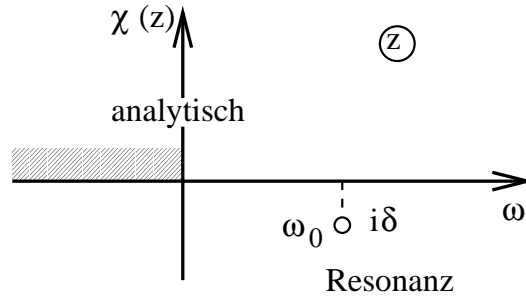
und damit

$$\operatorname{Re} \chi(\omega) = \operatorname{Re} \bar{\chi}(\omega) + \frac{A(\omega - \omega_0)}{(\omega - \omega_0)^2 + \delta^2} \quad (4.36)$$



$$\chi(z) - \bar{\chi}(z) = \frac{A}{(\omega_0 - i\delta) - z}$$

Absorptionslinie (”Resonanz”) entspricht Pol in unterer Halbebene:



## 4.7 Einige Bemerkungen zum Para- und Diamagnetismus

Verwende im Folgenden quasi-klassische Betrachtung. Kapitel 2.2.2: Zusammenhang zwischen magnetischem Moment  $m$  und Bahndrehimpuls  $\mathbf{L}_B$ , angewandt auf Elektronen auf Kreisbahn um Kern ("magneto-mechanische Analogie")

$$\mathbf{m} = \frac{q}{2Mc} \mathbf{L}_B = -\frac{e}{2m_e c} \mathbf{L}_B.$$

Auch die Eigendrehung des Elektrons – der Spin – liefert ein magnetisches Moment  $\mathbf{m} = -\frac{e}{m_e c} \mathbf{L}_s$  (lässt sich nur quanten-mechanisch erklären):

$$\mathbf{m} = -g \left( \frac{e}{2m_e c} \right) \mathbf{L}, \quad g_B = 1, g_s = 2$$

Quantenmechanik:  $\Delta L_z = \hbar, \quad L_z = m\hbar, \quad -l \leq m \leq l$

$$m_z = -g \frac{e\hbar}{2m_e c} m = -gm\mu_B.$$

**Bohrsches Magneton**  $\mu_B = \frac{e\hbar}{2m_e c} = 0.927 \cdot 10^{-20} \text{ erg/G.}$

$c \rightarrow \infty, \mu_B = ea_B \frac{e^2}{2\hbar c} = \frac{1}{2} ea_B \frac{e^2}{\hbar c}$ , d.h. das typische magnetische Dipolmoment ist ca. 2 Größenordnungen kleiner ( $e^2/\hbar c = 1/137$ ) als das typische elektrische Dipolmoment  $(1/2)ea_B \approx p$ ,  $a_B$  ist der Bohrsche Radius.

**Paramagnetismus:** Für  $g\mu_B H \ll k_B T$  erhält man (analog zum in 4.2.2 besprochenen elektrischen Fall) durch die Ausrichtung der **bereits existierenden magnetischen Dipole**  $\mathbf{m}$  für die paramagnetische Suszeptibilität

$$\chi_{\text{magn}} \approx \frac{1}{3} \frac{\mathbf{m}^2}{k_B T} n = \frac{1}{3} n (g\mu_B)^2 \frac{l(l+1)}{k_B T} \sim \left( \frac{e^2}{\hbar c} \right)^2 \chi_{\text{elekt}},$$

d.h. die paramagnetische Suszeptibilität ist um ca. 4 Größenordnungen kleiner als die entsprechende elektrische Suszeptibilität, typische Werte für  $\chi_{\text{magn}}$  sind bei Raumtemperatur  $10^{-2} \dots 10^{-3}$ .  $n$  ist die Dichte der magnetischen Ionen. Typische Werte für  $g\sqrt{l(l+1)}$  sind  $1 \dots 10$ . Daneben existieren in Metallen noch der **Pauli-Paramagnetismus**, der im wesentlichen Temperatur unabhängig ist und eine rein

quantenmechanische Erklärung besitzt (Kopplung des magn. Moments der Spins an das Feld)

$$\chi_{\text{Pauli}} = \mu_B^2 \tilde{g}(E_F),$$

$\tilde{g}(E_F)$  ist die Zustandsdichte an der Fermikante.

Freie Elektronen  $\tilde{g}(E_F) = \frac{mk_F}{\hbar^2 \pi^2} = \frac{(3\pi^2 n)^{1/3} m}{\hbar^2 \pi^2}$

$$\chi_{\text{Pauli}} = \frac{1}{4} \left( \frac{e^2}{\hbar c} \right)^2 \frac{\sqrt{3\pi^2}}{\pi^2} (a_B^3 n)^{1/3} = 0.078 \left( \frac{e^2}{\hbar c} \right)^2 (a_B^3 n)^{1/3}$$

$$\left. \begin{array}{l} n \approx 10^{23} \text{ cm}^{-3} \\ a_B \approx 5,3 \cdot 10^{-9} \text{ cm} \end{array} \right\} \left. \begin{array}{l} a_B^3 n \approx 1,5 \cdot 10^{-2} \\ (a_B^3 n)^{1/3} \approx 0,25 \end{array} \right\} \chi_{\text{Pauli}} \approx 10^{-6}$$

Zum Vergleich hier noch einmal eine Abschätzung für den Paramagnetismus von Isolatoren

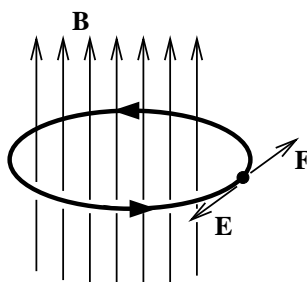
$$\chi_{\text{magn}} \approx \frac{1}{3} \frac{e^2}{k_B T a_B} (n a_B^3) \left( \frac{e^2}{\hbar c} \right)^2 g^2 l(l+1)$$

$$\frac{e^2}{a_B} = 4,35 \cdot 10^{-11} \text{ erg} \hat{=} 2,7 \cdot 10 \text{ eV}$$

$$k_B T_c \Big|_{0^\circ \text{C}} = 2,35 \cdot 10^{-2} \text{ eV}$$

$$\chi_{\text{magn}} \approx \frac{1}{3} \frac{2,7}{2,35} 10^3 \cdot 1,5 \cdot 10^{-2} (137)^{-2} \cdot 25 \approx 7,65 \cdot 10^{-3}.$$

**Diamagnetismus:** Wir betrachten jetzt das durch ein äußeres Feld **induzierte magnetische Moment**. Dies ist wichtig in Molekülen, in denen keine spontanen Momente **m** vorhanden sind (Kreiströme verschiedener Elektronen kompensieren sich).



Der Einfachheit halber sei das Elektron auf einer Kreisbahn senkrecht zum Feld **B**. Wird **B** vergrößert,  $\dot{\mathbf{B}} > 0$ , dann wird nach dem Induktionsgesetz ein **E**-Feld senkrecht zu **B** erzeugt

$$\int da \left[ \nabla \times \mathbf{E} + \frac{1}{c} \frac{\partial \mathbf{B}}{\partial t} \right] = 0 \quad E = -\frac{r}{2c} \dot{B}$$

$$2\pi r E + \frac{1}{c} \frac{\partial}{\partial t} \pi r^2 B = 0$$

Das so erzeugte  $\mathbf{E}$ -Feld bewirkt ein Drehmoment  $dL/dt$

$$-reE = \frac{dL}{dt} = \frac{r^2}{2c}e\dot{B}$$

nach  $t$ -Integration

$$\begin{aligned}\Delta\mathbf{L} &= \frac{er^2}{2c}\mathbf{B} \\ \Delta\mathbf{m} &= -\frac{e}{4m_e c}\Delta\mathbf{L} = -\frac{e^2r^2}{4m_e c^2}\mathbf{B} \\ \Delta M &= n\Delta m.\end{aligned}$$

Larmor oder Langevin Diamagnetismus

$$\chi_{\text{diamagn}} = -\frac{e^2r^2}{4m_e c^2}n.$$

Abschätzung ( $r \approx a_B$ ):

$$\begin{aligned}\chi_{\text{diamagn}} &\approx -\frac{e^2}{4m_e c^2 a_B}na_B^3 = -\frac{e^2 m_e e^2}{4m_e c^2 \hbar^2}na_B^3 \\ &\approx -\frac{1}{4}\left(\frac{e^2}{\hbar c}\right)^2 na_B^3 \\ &\approx -\frac{1}{4}(137)^{-2} \cdot 1,5 \cdot 10^{-2} \approx 10^{-7}\end{aligned}$$

Für Silber:  $\chi_{\text{magn}} \approx -2 \cdot 10^{-6}$ .



## Kapitel 5

# Elektromagnetische Strahlung

### 5.1 Die Greensche Funktion für die inhomogene Wellengleichung

Eigentlich ist uns die allgemeine Lösung (durch Erraten) bereits aus 1.4 bekannt. Wir stellen hier aber noch einmal den systematischen Weg zum Auffinden der Lösung dar.

Die Wellengleichung mit Lorentzbeziehung  $\partial_\mu A_\mu = 0$  lautet

$$\square \tilde{A} = \partial_\mu^2 \tilde{A} = -\frac{4\pi}{c} \tilde{j} \quad (5.1)$$

$$\tilde{x} = (\mathbf{x}, ict), \quad \tilde{j} = (\mathbf{j}, ic\rho), \quad \tilde{A} = (\mathbf{A}, i\phi).$$

Die allgemeine Lösung von (5.1) setzt sich zusammen aus der allgemeinen Lösung der homogenen Gleichung (siehe 2.8) und einer speziellen Lösung der inhomogenen Gleichung.

Betrachte Einheitspunkt-Ladung

$$\begin{aligned} \square G(\tilde{x}) &= -4\pi\delta(\tilde{x}), \quad \delta(\tilde{x}) = \delta(\mathbf{x})\delta(ct) \\ \tilde{A}(\tilde{x}) &= \frac{1}{ic} \int d^4x' G(\tilde{x} - \tilde{x}') \tilde{j}(\tilde{x}') \end{aligned}$$

mit  $G(\tilde{x}) = \frac{1}{2\pi} \int d\omega e^{-i\omega t} \tilde{G}(\mathbf{x}, \omega)$ ,  $\int_\omega = \int d\omega/2\pi$ . Dann

$$\int_\omega \left[ \Delta \tilde{G}(\mathbf{x}, \omega) + \frac{\omega^2}{c^2} \tilde{G}(\mathbf{x}, \omega) \right] e^{-i\omega t} = -4\pi\delta(\mathbf{x})\delta(ct).$$

Wir multiplizieren mit  $e^{i\Omega t}$  und integrieren über  $dt \rightarrow$

$$\Delta \tilde{G}(\mathbf{x}, \Omega) + \frac{\Omega^2}{c^2} \tilde{G}(\mathbf{x}, \Omega) = -4\pi\delta(\mathbf{x})/c. \quad (5.2)$$

In Kugelkoordinaten hat der Laplaceoperator folgende Gestalt

$$\Delta = \frac{1}{r} \frac{\partial^2}{\partial r^2} r + \frac{1}{r^2 \sin\theta} \frac{\partial}{\partial\theta} \left( \sin\theta \frac{\partial}{\partial\theta} \right) + \frac{1}{r^2 \sin^2\theta} \frac{\partial^2}{\partial\varphi^2}$$

Bei räumlicher Isotropie folgt

$$\frac{1}{r} \frac{\partial^2}{\partial r^2} r \tilde{G}(r, \Omega) + \frac{\Omega^2}{c^2} \tilde{G} = -4\pi \delta(\mathbf{x})/c$$

Wenn  $r \neq 0$  folgt nach multiplizieren mit  $r$

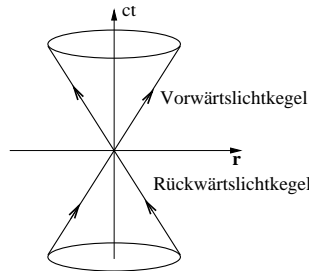
$$r \tilde{G}(r, \Omega) = a e^{i\Omega r/c} + b e^{-i\Omega r/c},$$

$a, b$  sind Konstanten. Für  $\Omega r/c \rightarrow 0$  ist  $\Delta \tilde{G}(\Omega, \mathbf{x}) = -4\pi \delta(\mathbf{x})/c$ . Abschätzung der Vorfaktoren in (5.2)  $\tilde{G}(\Omega, r) = 1/cr$  (siehe Statik).

$$\begin{aligned} \tilde{G}(\mathbf{x}, \omega) &= a \tilde{G}_+(\mathbf{x}, \omega) + b \tilde{G}_-(\mathbf{x}, \omega) \\ \tilde{G}_\pm(\mathbf{x}, \omega) &= \frac{1}{cr} e^{\pm i\omega r/c}, \quad a + b = 1 \end{aligned} \quad (5.3)$$

$$G_\pm(\mathbf{x}, t) = G_\pm(\tilde{x}) = \int_\omega e^{-i\omega t} \tilde{G}_\pm(\mathbf{x}, \omega) = \frac{1}{r} \delta(ct \mp r)$$

$$\begin{aligned} G_+(\tilde{x} - \tilde{x}') \neq 0 &\quad \text{für } t = t' + \frac{1}{c} |\mathbf{x} - \mathbf{x}'| : \quad \text{retardiert} \\ G_-(\tilde{x} - \tilde{x}') \neq 0 &\quad \text{für } t = t' - \frac{1}{c} |\mathbf{x} - \mathbf{x}'| : \quad \text{avanciert} \end{aligned}$$



Vorwärtslichtkegel: Ausstrahlung - wird als physikalisch sinnvoll betrachtet.

Rückwärtslichtkegel: Einstrahlung: Lösung für  $G$  muss im Unendlichen loslaufen und bei Ladung eintreffen wenn diese sich zu bewegen beginnt.

Kausalität: Ausstrahlungsbedingung  $\tilde{A}(\mathbf{x}, t) = 0$  solange  $\tilde{j}(\mathbf{x}', t') = 0 \rightarrow$

$$G(\tilde{x}) = G_+(\tilde{x}) := G_{\text{ret}}(\tilde{x})$$

damit Symmetriebrechung in der Zeit

$$\begin{aligned} \delta(\tilde{x}^2) &= \delta(r^2 - c^2 t^2) = \frac{1}{2r} \begin{cases} \delta(r - ct) & t > 0 \\ \delta(r + ct) & t < 0 \end{cases} \\ &= \frac{1}{2r} [\delta(r - ct) + \delta(r + ct)] \end{aligned}$$

$$\boxed{G_\pm(\tilde{x}) = 2\theta(\pm t) \delta(\tilde{x}^2) = \frac{1}{r} \delta(ct \mp r)} \quad (5.4)$$

→ Lorentzinvarianz von  $G$ . Wenn  $t \leq 0$ , dann ist für  $\tilde{x}^2 = 0$  auch in jedem anderen Inertialsystem  $t' \leq 0$

$$\tilde{A}(\tilde{x}) = \frac{1}{ic} \int d^4x' G_+(\tilde{x} - \tilde{x}') \tilde{j}(\tilde{x}')$$

$$\tilde{A}(\mathbf{r}, t) = \int d^3r' \frac{1}{c|\mathbf{r} - \mathbf{r}'|} \tilde{j}(\mathbf{r}', t - \frac{1}{c}|\mathbf{r} - \mathbf{r}'|) \quad (5.5)$$

Diese Lösung hatten wir bereits auf S.20 erraten und in den Übungen geprüft.

$c \rightarrow \infty$ : nur das statische Potential verschwindet.

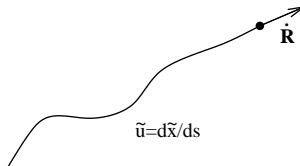
## 5.2 Das elektromagnetische Feld einer Punktladung

Bahn der Punktladung

$$\begin{aligned} \mathbf{r} &= \mathbf{R}(t) \\ \rho(\mathbf{r}, t) &= q\delta(\mathbf{r} - \mathbf{R}(t)) \\ \mathbf{j}(\mathbf{r}, t) &= q\dot{\mathbf{R}}(t)\delta(\mathbf{r} - \mathbf{R}(t)) \end{aligned}$$

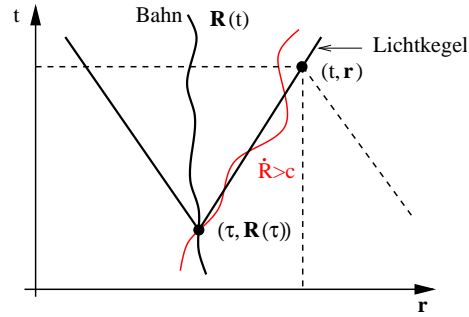
Zur Vereinfachung benutzen wir die Vierervektoren

$$\begin{aligned} \tilde{v} &= (\dot{\mathbf{R}}(t), ic) \\ \tilde{j} &= q\tilde{v}\delta(\mathbf{r} - \mathbf{R}(t)) \end{aligned}$$



$$\begin{aligned} \tilde{A}(\tilde{x}) &= \frac{1}{c} \int d^4x' G_+(\tilde{x} - \tilde{x}') \tilde{j}(\tilde{x}') \\ &= \int d^3r' dt' \delta(c(t-t') - |\mathbf{r} - \mathbf{r}'|) \frac{1}{|\mathbf{r} - \mathbf{r}'|} q\tilde{v}(t') \delta(\mathbf{r}' - \mathbf{R}(t')) \\ &= \int dt' \frac{1}{|\mathbf{r} - \mathbf{R}(t')|} \delta(c(t-t') - |\mathbf{r} - \mathbf{R}(t')|) q\tilde{v}(t') \\ &= \frac{q\tilde{v}(\tau)}{|\mathbf{r} - \mathbf{R}(\tau)|} \cdot \left| \frac{d}{d\tau} [c(t-\tau) - |\mathbf{r} - \mathbf{R}(\tau)|] \right|^{-1} \end{aligned}$$

$(\delta(f(x)) = \frac{1}{f'(x)}\delta(x))$ , wobei  $\tau$  die **retardierte** Zeit  $\tau = t - \frac{1}{c}|\mathbf{r} - \mathbf{R}(\tau)|$  ist. (Da  $|\dot{\mathbf{R}}| < c$  ist  $\tau$  eindeutig.)



Mit

$$\frac{d}{d\tau} (\mathbf{r} - \mathbf{R}(\tau))^2 = 2(\mathbf{r} - \mathbf{R}(\tau)) \frac{d}{d\tau} (\mathbf{r} - \mathbf{R}(\tau)) = -2\dot{\mathbf{R}}(\tau) (\mathbf{r} - \mathbf{R}(\tau))$$

wird

$$\frac{d}{d\tau} (c\tau + |\mathbf{r} - \mathbf{R}(\tau)|) = c - \frac{\dot{\mathbf{R}}(\tau) (\mathbf{r} - \mathbf{R}(\tau))}{|\mathbf{r} - \mathbf{R}(\tau)|}$$

und damit

$$\tilde{A}(\tilde{x}) = q\tilde{v}(\tau) \frac{1}{c|\mathbf{r} - \mathbf{R}(\tau)| - \dot{\mathbf{R}}(\tau) (\mathbf{r} - \mathbf{R}(\tau))}, \quad (5.6)$$

oder

$$\Phi(\mathbf{r}, t) = q \frac{1}{|\mathbf{r} - \mathbf{R}(\tau)| - (1/c)\dot{\mathbf{R}}(\tau) (\mathbf{r} - \mathbf{R}(\tau))} \quad (5.7)$$

$$\mathbf{A}(\mathbf{r}, t) = q \frac{\dot{\mathbf{R}}(\tau)}{c} \frac{1}{|\mathbf{r} - \mathbf{R}(\tau)| - (1/c)\dot{\mathbf{R}}(\tau) (\mathbf{r} - \mathbf{R}(\tau))} \quad (5.8)$$

$\tau$  ist die retardierte Zeit. Diese sind die **Liénard-Wiechert Potentiale**.

$\sim$  Verallgemeinerung des Coulomb-Potentials für  $\dot{\mathbf{R}} \neq 0$ . Denn  $\dot{\mathbf{R}}/c \ll 1$ : Biot-Savart-Gesetz.

Aus (5.7) und (5.8) lassen sich die Felder  $\mathbf{E}$  und  $\mathbf{B}$  durch Differentiation ausrechnen.

Benutze die Abkürzungen  $\mathbf{n} = (\mathbf{r} - \mathbf{R})/|\mathbf{r} - \mathbf{R}|$ ,  $\boldsymbol{\beta} = \dot{\mathbf{R}}/c$ .

$$\mathbf{E}(\mathbf{r}, t) = \frac{q}{(1 - \mathbf{n}\boldsymbol{\beta})^3} \left\{ \frac{(1 - \beta^2)(\mathbf{n} - \boldsymbol{\beta})}{|\mathbf{r} - \mathbf{R}|^2} + \frac{1}{c} \frac{\mathbf{n} \times [(\mathbf{n} - \boldsymbol{\beta}) \times \dot{\boldsymbol{\beta}}]}{|\mathbf{r} - \mathbf{R}|} \right\}_{\text{ret}} \quad (5.9)$$

$$\mathbf{B}(\mathbf{r}, t) = \mathbf{n} \times \mathbf{E}(\mathbf{r}, t), \quad (5.10)$$

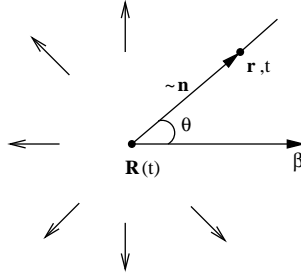
überall mit retardierten Zeiten.

Anteile:  $\sim 1/|\mathbf{r} - \mathbf{R}|^2$ : mitgeführtes quasistatisches Feld

$\sim (\ddot{\mathbf{R}}/c)/|\mathbf{r} - \mathbf{R}|$ : abgestrahltes Beschleunigungsfeld.

**Energiestrom des Strahlungsfeldes:**

$$\begin{aligned} \mathbf{s} &= \frac{c}{4\pi} (\mathbf{E} \times \mathbf{B})_{\text{strahlung}} = \frac{c}{4\pi} (\mathbf{n}E^2 - \mathbf{E}(\mathbf{n} \cdot \mathbf{E}))_{\text{ret}} \\ &= \frac{q^2}{4\pi c} \left\{ \left| \frac{\mathbf{n} \times [(\mathbf{n} - \boldsymbol{\beta}) \times \dot{\boldsymbol{\beta}}]}{(1 - \mathbf{n} \cdot \boldsymbol{\beta})^3} \right|^2 \frac{\mathbf{n}}{|\mathbf{r} - \mathbf{R}|^2} \right\}_{\text{ret}} + O\left(\frac{1}{R^3}\right) \end{aligned}$$



**ns:** Energie pro Einheitsfläche und pro Einheitszeit am Beobachtungsort zum Zeitpunkt  $t$ , ausgestrahlt zur Zeit  $\tau = t - |\mathbf{r} - \mathbf{R}(t)|/c$ . Von der Punktladung abgegebene Energie pro (retardierter) Zeiteinheit in den Raumwinkel  $d\Omega = \sin\theta d\theta d\phi$  ist die Leistung  $dP = \frac{|\mathbf{ns}|dt}{d\tau} |\mathbf{r} - \mathbf{R}|^2 d\Omega$

- denn Energie ausgestrahlt von  $\tau = T_1$  bis  $\tau = T_2$ :

$$E(T_1, T_2) = \int_{t=T_1+|\mathbf{r}-\mathbf{R}(T_1)|/c}^{t=T_2+|\mathbf{r}-\mathbf{R}(T_2)|/c} \mathbf{ns} dt = \int_{\tau=T_1}^{\tau=T_2} \mathbf{ns} \frac{dt}{d\tau} d\tau;$$

- denn Gesamtleistung  $P = \int \frac{|\mathbf{ns}|dt}{d\tau} |\mathbf{r} - \mathbf{R}|^2 d\Omega$

$$\frac{dt}{d\tau} = \frac{d(\tau + (1/c)|\mathbf{r} - \mathbf{R}(\tau)|)}{d\tau} = 1 - \mathbf{n}\boldsymbol{\beta}.$$

**Nebenbemerkung:** Ein gleichförmig bewegtes geladenes Teilchen strahlt für  $v < c$  keine elektromagnetische Wellen ab. Mit obigem Ausdruck für  $\mathbf{s}$  und  $\dot{\boldsymbol{\beta}} = 0$  folgt

$$\lim_{V \rightarrow \infty} \int_{\partial V} \mathbf{s} d\mathbf{a} = 0 = \int_V d^3r \left\{ \frac{\partial}{\partial t} \frac{1}{8\pi} (\mathbf{E}^2 + \mathbf{B}^2) + \mathbf{j}\mathbf{E} \right\}$$

$$d\mathbf{a} = |\mathbf{r} - \mathbf{R}|^2 d\Omega.$$

$$\boxed{\frac{dP}{d\Omega} = \frac{q^2}{4\pi c} \frac{|\mathbf{n} \times [(\mathbf{n} - \boldsymbol{\beta}) \times \dot{\boldsymbol{\beta}}]|^2}{(1 - \mathbf{n}\boldsymbol{\beta})^5}} \quad (5.11)$$

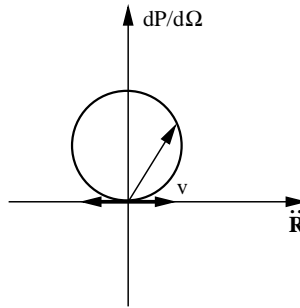
Keine Abstrahlung, wenn  $\dot{\boldsymbol{\beta}} = 0$ , d.h. bei gleichförmiger Bewegung.

**Spezialfälle:**

(i)  $\beta = \dot{R}/c \ll 1$   $|\mathbf{n} \times \boldsymbol{\beta}| = \dot{R} \frac{1}{c} \sin\theta$  (Def. von  $\theta$ )

(nicht-relativistischer Fall) **Larmorsche Formel:**

$$\boxed{\begin{aligned} \frac{dP}{d\Omega} &= \frac{q^2}{4\pi c^3} \ddot{R}^2 \sin^2\theta \\ P &= \frac{2}{3} \frac{q^2}{c^3} \ddot{R}^2 \end{aligned}}$$



Beispiel: strahlender Dipol:  $R = l \sin \omega t \rightarrow \bar{P} \approx \frac{q^2 l^2 \omega^4}{3c^3} \sim \frac{q^2 l^2 c}{\lambda^4}$ .

$$T = \frac{2\pi}{\omega}, \quad \frac{1}{T} \int_0^T \sin^2 \omega t dt = \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} \sin^2 x dx = \frac{1}{2},$$

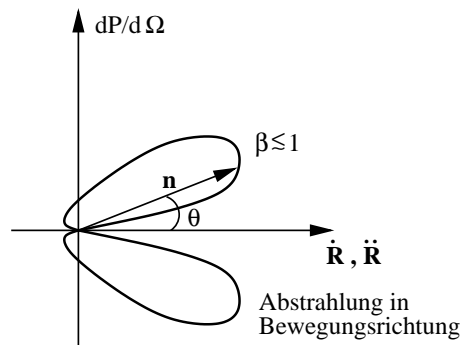
Atome in Atmosphäre als schwingende Dipole  $\rightarrow$  "Himmelsblau"

(ii)  $\dot{\beta} \parallel \beta$  (geradlinig beschleunigte Bewegung) "Bremstrahlung":

$$\beta \times \dot{\beta} = 0$$

$$|\mathbf{n} \times \dot{\beta}| = (\ddot{R}/c) \sin \theta, \quad \mathbf{n} \cdot \beta = (\dot{R}/c) \cos \theta$$

$$\frac{dP}{d\Omega} = \frac{q^2}{4\pi c^3} \ddot{R}^2 \frac{\sin^2 \theta}{(1 - (\dot{R}/c) \cos \theta)^5} \quad (5.13)$$



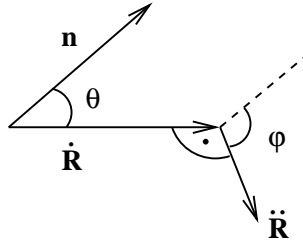
$$\theta_{\max} = \arccos \left[ \frac{1}{3\beta} (\sqrt{1 + 15\beta^2} - 1) \right]$$

für kleine  $\beta$ :  $\cos \theta_{\max} = (5/2)(\dot{R}/c)$

(iii) Kreisbewegung (nach einigen Umrechnungen, siehe Stumpf & Schuler, S. 90)

$$\dot{\mathbf{R}}\ddot{\mathbf{R}} = 0$$

$$\frac{dP}{d\Omega} = \frac{q^2 \ddot{R}^2}{4\pi c} \frac{1}{(1 - (\dot{R}/c) \cos \theta)^3} \left[ 1 - \frac{(1 - \dot{R}^2/c) \cos^2 \varphi}{(1 - (\dot{R}/c) \cos \theta)^2} \right]$$



$\theta = \angle(\mathbf{n}, \dot{\mathbf{R}})$ ,  $\varphi = \angle(\mathbf{n}, \ddot{\mathbf{R}})$ . Maximum, wenn  $\varphi = \pi/2, (3/2)\pi$ ;  $\theta = 0, \pi$ . In der Ebene der Kreisbahn.

(iv) Aus  $dP/d\Omega$  folgt im allgemeinen Fall nach Integration über  $\Omega$  (ohne Beweis):  
Abgestrahlte Leistung (Liénard 1898)

$$P = \frac{2}{3} \frac{q^2}{c} (1 - \beta^2)^{-3} [\dot{\boldsymbol{\beta}}^2 - (\boldsymbol{\beta} \times \dot{\boldsymbol{\beta}})^2] \quad (5.14)$$

Jackson 14.26. Bei **linearem Beschleuniger**  $\dot{\boldsymbol{\beta}} \parallel \boldsymbol{\beta} \rightarrow P = \frac{2}{3} q^2 c (1 - \beta^2)^{-3} \dot{\boldsymbol{\beta}}^2$ . Wir können deshalb

$$P = \frac{2}{3} \frac{q^2}{m_0^2 c^3} \left( \frac{d\mathbf{p}}{dt} \right)^2$$

schreiben:

$$\begin{aligned} \frac{d}{dt} \mathbf{p} &= \frac{d}{dt} \frac{m_0 \mathbf{v}}{(1 - \beta^2)^{1/2}} = m_0 \frac{1}{(1 - \beta^2)^{3/2}} \left( \dot{\mathbf{v}}(1 - \beta^2) - \frac{1}{2} \mathbf{v}(-2\boldsymbol{\beta} \cdot \dot{\boldsymbol{\beta}}) \right) \\ &= m_0 \frac{1}{(1 - \beta^2)^{3/2}} \dot{\mathbf{v}} \end{aligned}$$

$\frac{dp}{dt} = \frac{dE}{dx}$  Energieänderung des Teilchens pro Einheitslänge  $\rightarrow$  abgestrahlte Energie/Zeit hängt nur von äußerer Kraft, **nicht** von momentanem Impuls (oder Energie) ab.

Das Verhältnis von abgestrahlter zu zugeführter Leistung beträgt

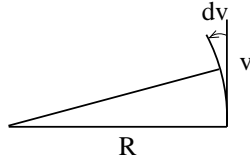
$$\begin{aligned} \frac{P}{dE/dt} &= \frac{2}{3} \frac{q^2}{m_0^2 c^3} \left( \frac{dE}{dx} \right)^2 \frac{dt}{dE} = \frac{2}{3} \frac{q^2}{m_0^2 c^3} \frac{1}{v} \frac{dE}{dx} \xrightarrow{\beta \rightarrow 1} \frac{2}{3} \frac{q^2}{m_0^2 c^4} \frac{dE}{dx} \\ r_{\text{class}} &= q^2 / m_0 c^2 = \frac{2}{3} \frac{d(E/m_0 c^2)}{d(x/r_{\text{class}})}, \end{aligned}$$

d.h. der Strahlungsverlust ist vernachlässigbar, solange der Energiegewinn auf der Strecke  $r_{\text{class}}$  ( $10^{-13}$  cm beim Elektronen) nicht von der Ordnung  $m_0 c^2$  ( $\sim 0,5 \cdot 10^6$  eV beim Elektronen) ist.

Bei Elektronen entspricht dies Feldern von  $2 \cdot 10^{20}$  eV/m, während typische experimentelle Werte bei  $10^7$  eV/m liegen. Stanford (SLinear Collider)  $\sim 100$  eV  $\sim 10^{11}$  eV ( $3\text{km} \sim 3 \cdot 10^3$  m).

Bei **Kreisbeschleunigern** (Synchrotron, Betatron) ist die Situation sehr verschieden ( $\boldsymbol{\beta} \times \dot{\boldsymbol{\beta}})^2 = \beta^2 \dot{\boldsymbol{\beta}}^2$

$$\frac{dv}{v} = \frac{R d\varphi}{R}$$



$$\frac{d\mathbf{v}}{dt} = v \cdot \omega = R\omega^2, \quad \dot{\beta} = \beta\omega = c\beta^2/R,$$

die abgestrahlte Leistung hängt vom momentanen Impuls ab, die tangentielle Beschleunigung wird vernachlässigt!

$$\begin{aligned} P &= \frac{2}{3} \frac{q^2}{c} \frac{\dot{\beta}^2}{(1-\beta^2)^2} = \frac{2}{3} \frac{q^2}{c^3 m_0^2} \frac{1}{(1-\beta^2)} \omega^2 \mathbf{p}^2 \\ &= \frac{2}{3} \frac{q^2 c}{R^2} \beta^4 (1-\beta^2)^{-2} \end{aligned}$$

Strahlungsverlust/Umlauf:

$$\delta E = \frac{2\pi R}{c\beta} P = \frac{4\pi}{3} \frac{q^2}{R} \beta^3 (1-\beta^2)^{-2}, \quad E^2 = \frac{(m_0 c^2)^2}{1-\beta^2}$$

Wenn  $\beta \approx 1$ , dann

$$\begin{aligned} \delta E &\approx \frac{4\pi}{3} \frac{q^2}{R} (1-\beta^2)^{-2} = \frac{4\pi}{3} (m_0 c^2)^{-4} \frac{q^2}{R} E^4 \\ &= \frac{4\pi}{3} \frac{q^2}{R} \left( \frac{E}{m_0 c^2} \right)^4 \end{aligned}$$

in Zahlen  $\delta E (10^6 \text{ eV}) = 8,85 \cdot 10^{-2} \frac{[E(10^9 \text{ eV})]^4}{\rho(\text{m})}$ .

Large Elektron Positron (Collider) Genf 200GeV (27km Umfang)

$$E = 50 \text{ GeV} : \quad \delta E = 400 \text{ MeV/Umlauf} \approx 0.8\%$$

$$E = 100 \text{ GeV} : \quad \delta E = 3 \text{ GeV/Umlauf} \approx 3\%$$

(iv) gleichförmige Bewegung, Cerenkor-Strahlung

Teilchen Weg (in Formeln für Liénard-Wiechert-Potentiale):

$$\mathbf{R}(t) = \mathbf{R}_0 + \mathbf{v}t.$$

Retardierte Zeit:

$$\begin{aligned} \tau = t - \frac{1}{c} |\mathbf{r} - \mathbf{R}(\tau)| &= t - \frac{1}{c} |\mathbf{r} - \mathbf{R}_0 - \mathbf{v}(\tau - t) - \mathbf{v}t| \\ &= t - \frac{1}{c} |\mathbf{r} - \mathbf{R}(t) - \mathbf{v}(\tau - t)| = t - \frac{1}{c} |\mathbf{x}(t) - \mathbf{v}(\tau - t)| \end{aligned}$$

$$c^2(t - \tau)^2 = \mathbf{x}^2 - 2\mathbf{x}\mathbf{v}(\tau - t) + v^2(\tau - t)^2$$

$$(t - \tau)^2(c^2 - v^2) - 2\mathbf{x}\mathbf{v}(t - \tau) - \mathbf{x}^2 = 0,$$

quadratische Gleichung für  $t - \tau$ .

$$(t - \tau) = (c^2 - v^2)^{-1} \left\{ \mathbf{x}\mathbf{v} \pm |\mathbf{x}|c \left( 1 - \frac{v^2}{c^2} \sin^2 \alpha \right)^{1/2} \right\}, \quad \alpha = \sphericalangle(\mathbf{x}, \mathbf{v}) \quad (5.15)$$

$t - \tau$  reell und positiv.

1.  $v < c \rightarrow ( )^{1/2}$  reell,  $\pm \rightarrow +$  in (5.15)

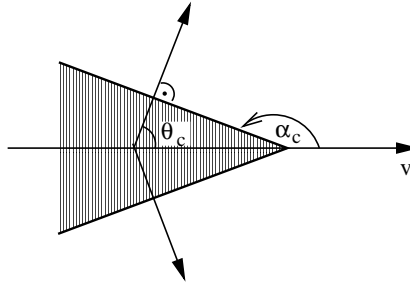
$$\Phi(\mathbf{r}, t) = \frac{q}{|\mathbf{x}(t)|} \left( 1 - \frac{v^2}{c^2} \sin^2 \alpha \right)^{-1/2} \quad (5.16)$$

$$\mathbf{A}(\mathbf{r}, t) = \frac{\mathbf{v}}{c} \varphi(\mathbf{r}, t). \quad (5.17)$$

2.  $v > c$ ?: Teilchen in Medium, so dass Phasengeschwindigkeit  $c \rightarrow c' = c/n$  in (5.15), d.h.  $c > v > c'$  möglich.

Nach einigen Zwischenschritten: damit (5.15) reelle Lösungen hat, muss  $\pi - \arcsin(c'/v) < \alpha \leq \pi$  erfüllt sein. Liénard-Wiechert-Potentiale existieren nur im schraffierten Bereich, außerhalb verschwinden sie. am Rande des Kegels werden die Potentiale singular, i.e. dort wo  $\alpha \rightarrow \alpha_c$  geht.

$\rightarrow$  Potentiale bilden Wellenfront, sie sich in Richtung  $\theta_c = \alpha_c - (\pi/2)$  fortbewegt. Die Geschwindigkeit der Wellenfront ist  $v \cos \theta_c = vc/nv = c'$ . Daher findet eine Abstrahlung in diesem Winkel statt, dies ist die sogenannte Cerenkov-Strahlung.

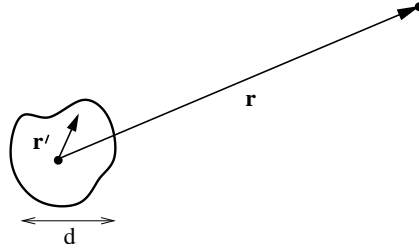


### 5.3 Felder in der Fernzone

Betrachte jetzt beliebige aber lokalisierte Viererstromverteilung mit typischer räumlicher Ausdehnung  $d$  für große Abstände  $r \gg d$ . Wir nehmen später ferner an, dass die zeitlichen Änderungen von  $\tilde{j}(t)$  hinreichend schnell ablaufen, so dass  $r \gg \lambda = 2\pi/h = 2\pi c/\omega \approx cT$ , hier ist  $T$  die typische Zeitskala, auf der die Änderung von  $\tilde{j}$  abläuft. Also: Auswertung von

$$\tilde{A}(\mathbf{r}, t) = \int d^3\mathbf{r}' \frac{1}{c} \frac{1}{|\mathbf{r} - \mathbf{r}'|} \tilde{j}(\mathbf{r}', t - \frac{1}{c}|\mathbf{r} - \mathbf{r}'|) \quad (5.18)$$

unter der Annahme  $r \gg \lambda, d$



Nenner:  $|\mathbf{r} - \mathbf{r}'| \approx r$

Zähler:  $t' = t - \frac{1}{c}|\mathbf{r} - \mathbf{r}'| \approx t - \frac{r}{c} + \frac{\mathbf{r}\mathbf{r}'}{r} = t - \frac{r}{c} + \frac{1}{c}\mathbf{n}\cdot\mathbf{r}'$  da  $\frac{1}{c}|\mathbf{r} - \mathbf{r}'| = \frac{1}{c}(\mathbf{r}^2 - 2\mathbf{r}\mathbf{r}' + \mathbf{r}'^2)^{1/2}$ ,  
 $\mathbf{n} = \mathbf{r}/r$

$$\tilde{A}(\mathbf{r}, t) = \int d^3\mathbf{r}' \frac{1}{cr} \tilde{j}(\mathbf{r}', t - \frac{r}{c} + \frac{1}{c}\mathbf{n}\cdot\mathbf{r}') \quad (5.19)$$

Bei der Feld-Berechnung berücksichtigen wir nur die Strahlungsanteile  $\sim 1/r$  (d.h. nur nach  $\mathbf{r}$  in  $\mathbf{j}$  wird abgeleitet)

$$\mathbf{B}_{\text{str}} = (\nabla \times \mathbf{A})_{\text{str}} \approx \frac{1}{cr} \int d^3\mathbf{r}' \nabla \times \mathbf{j}(\mathbf{r}', t'), \quad t' = t - \frac{r}{c} + \frac{1}{c}\mathbf{n}\cdot\mathbf{r}' \quad (5.20)$$

Nebenrechnung:

$$\begin{aligned} \varepsilon_{ijk} \partial_j j_k(\mathbf{r}', t') &= \frac{\partial}{c \partial t} j_k \varepsilon_{ijk} \frac{\partial}{\partial x_j} (-r + \mathbf{n}\mathbf{r}') \\ &= \frac{1}{c} \frac{\partial}{\partial t} j_k \varepsilon_{ijk} \left\{ -\frac{x_j}{r} + \frac{x'_j}{r} - (\mathbf{n}\cdot\mathbf{r}') \frac{x_j}{r^2} \right\} \approx -\frac{1}{c} \frac{\partial}{\partial t} j_k \varepsilon_{ijk} \frac{x_j}{r} \end{aligned}$$

damit

$$\begin{aligned} \mathbf{B}_{\text{str}} &\approx \frac{1}{c^2 r} \int d^3 r' \frac{\partial}{\partial t} \mathbf{j}(\mathbf{r}', t') \times \mathbf{n} = \frac{1}{c^2 r} \dot{\mathbf{N}} \times \mathbf{n} \quad (5.21) \\ \mathbf{N} &= \int \mathbf{j}(\mathbf{r}', t') d^3 r' = \mathbf{N}(t = r/c) \end{aligned}$$

$\mathbf{E}_{\text{str}}(\mathbf{r}, t)$  erhält man aus  $\nabla \times \mathbf{B} = \frac{4\pi}{c} \mathbf{j} + \frac{1}{c} \frac{\partial}{\partial t} \mathbf{E}$  da für  $r \gg d$   $\mathbf{j} = 0$ . Nach Bildung der Rotation von  $\mathbf{B}_{\text{str}}$  und  $t$ -Integration

$$\begin{aligned} \mathbf{E}_{\text{str}} &= \frac{1}{c^2 r} [(\mathbf{n}\cdot\dot{\mathbf{N}})\mathbf{n} - \dot{\mathbf{N}}] = \frac{1}{c^2 r} (\dot{\mathbf{N}} \times \mathbf{n}) \times \mathbf{n} \\ \mathbf{B}_{\text{str}} &= \frac{1}{c^2 r} \dot{\mathbf{N}} \times \mathbf{n}; \quad \mathbf{N} = \int d^3 r' \mathbf{j}(\mathbf{r}', t') \end{aligned} \quad (5.22)$$

$\mathbf{E}, \mathbf{B}, \mathbf{n}$  stehen senkrecht,  $|\mathbf{E}| = |\mathbf{B}|$ .

Poyntingvektor:

$$\mathbf{S}_{\text{str}} = \frac{c}{4\pi} \mathbf{E}_{\text{str}} \times \mathbf{B}_{\text{str}} = \frac{c}{4\pi} \mathbf{B}_{\text{str}} \times (\mathbf{n} \times \mathbf{B}_{\text{str}}) = \frac{1}{4\pi c^3 r^2} (\dot{\mathbf{N}} \times \mathbf{n})^2 \cdot \mathbf{n}$$

Abgestrahlte Leistung

$$P = \int \mathbf{S}_{\text{str}} d\mathbf{a} = \frac{1}{4\pi c^3} \int (\dot{\mathbf{N}} \times \mathbf{n})^2 d\Omega \quad (5.23)$$

Bisher haben wir nur  $d \ll r$  benutzt!

## 5.4 Multipolstrahlung

Weitere Auswertung von (5.22) unter der Voraussetzung  $r \gg \lambda \gg d$ .

$$\begin{aligned} \mathbf{N} &= \int d^3r' \mathbf{j}(\mathbf{r}', t - \frac{r}{c} + \frac{1}{c} \mathbf{n} \cdot \mathbf{r}') \\ &= \int d^3r' \left\{ \mathbf{j}(\mathbf{r}', t - r/c) + \frac{1}{c} \frac{\partial}{\partial t} \mathbf{j}(\mathbf{r}', t - r/c) \mathbf{n} \cdot \mathbf{r}' + \dots \right\} \end{aligned}$$

Umformung des 1. Terms  $j_i = \partial_j(x_i j_j) - x_i \partial_j j_j$ , dann

$$\begin{aligned} \int d^3r' j_i(\mathbf{r}', t - r/c) &= \int d^3r' \{ \nabla' (x'_i \mathbf{j}) - x'_i \nabla' \cdot \mathbf{j} \} \\ \int \mathbf{j}(\mathbf{r}', t - r/c) d^3r' &= - \int d^3r' \mathbf{r}' (\nabla' \cdot \mathbf{j}) = \int d^3r' \mathbf{r}' \dot{\rho}(\mathbf{r}', t - r/c) = \dot{\mathbf{p}} \end{aligned}$$

dies ist die Zeitableitung des Dipolmoments.

Analoges gilt für den 2. Term. Alternativ-Weg:

$$\begin{aligned} \int d^3r' (\mathbf{n} \cdot \mathbf{r}') \mathbf{j} &\rightarrow \sum_i (\mathbf{n} \cdot \mathbf{r}') (q \mathbf{v}) \\ \mathbf{v}(\mathbf{r}' \cdot \mathbf{n}) &= \frac{1}{2} \frac{\partial}{\partial t} \mathbf{r}' (\mathbf{n} \cdot \mathbf{r}') + \frac{1}{2} \mathbf{v} (\mathbf{n} \cdot \mathbf{r}') - \frac{1}{2} \mathbf{r}' (\mathbf{n} \cdot \mathbf{v}) \\ &= \frac{1}{2} \frac{\partial}{\partial t} \mathbf{r}' (\mathbf{n} \cdot \mathbf{r}') + \frac{1}{2} [\mathbf{r}' \times \mathbf{v}] \times \mathbf{n} \end{aligned}$$

→ 2. Term in  $\mathbf{N}(t)$ -Entwicklung

$$\frac{\partial}{\partial t} \int d^3r' \left\{ \frac{1}{2} [\mathbf{r}' \times \mathbf{j}] \times \mathbf{n} + \frac{1}{2} \mathbf{j} \frac{\partial}{\partial t} (\mathbf{n} \cdot \mathbf{r}') \right\} = c \dot{\mathbf{m}} \times \mathbf{n} + \frac{1}{6} \frac{\partial^2}{\partial t^2} \mathbf{Q}.$$

**Magnetisches Dipolmoment:**

$$\mathbf{m} = \frac{1}{2c} \int d^3r' [\mathbf{r}' \times \mathbf{j}] \times \mathbf{n} \quad (5.24)$$

**Elektrisches Quadrupolmoment:**

$$(\mathbf{Q})_i = \sum_j Q_{ij} n_j, \quad Q_{ij} = \int d^3r' [3x'_i x'_j - r'^2 \delta_{ij}] \rho(\mathbf{r}', t) \quad (5.25)$$

(addiere  $\int d^3r' r'^2 \rho(\mathbf{r}', t) \mathbf{n}$  zu  $\mathbf{N}$  → ändert  $\mathbf{B}$  nicht!).

Damit

$$\mathbf{N}(t) \approx \dot{\mathbf{p}} + \frac{1}{6c} \frac{\partial^2}{\partial t^2} \mathbf{Q} + \dot{\mathbf{m}} \times \mathbf{n} \quad (5.26)$$

Es folgt

$$\begin{aligned} \mathbf{E}_{\text{str}} &= \frac{1}{c^2 r} \left\{ [\ddot{\mathbf{p}} \times \mathbf{n}] \times \mathbf{n} + \frac{1}{6c} [\ddot{\mathbf{Q}} \times \mathbf{n}] \times \mathbf{n} + \mathbf{n} \times \ddot{\mathbf{m}} \right\} \\ \mathbf{B}_{\text{str}} &= \frac{1}{c^2 r} \left\{ \dot{\mathbf{p}} \times \mathbf{n} + \frac{1}{6c} \ddot{\mathbf{Q}} \times \mathbf{n} + [\dot{\mathbf{m}} \times \mathbf{n}] \times \mathbf{n} \right\}, \end{aligned}$$

d.h. die Strahlungsfelder lassen sich in elektrische Dipol- und Quadrupolstrahlung und in magnetische Dipolstrahlung zerlegen.

Die (mühsame) Berechnung der abgestrahlten Leistung  $P$  ergibt

$$P = \frac{2}{3c^3} \dot{\mathbf{p}}^2 + \frac{1}{180c^5} \ddot{Q}_{ik}^2 + \frac{2}{3c^3} \ddot{\mathbf{m}}^2 \quad (5.27)$$

**Anmerkungen:**

- (i) Hertzscher Dipol  $\mathbf{p} = \mathbf{p}_0 \cos \omega t$ ,  $\dot{\mathbf{p}}^2 = p_0^2 \omega^4 \cos^2 \omega t$

$$P \sim p_0^2 \frac{\omega^4}{c^3} \sim cp_0^2 / \lambda^4 .$$

- (ii) Ein abgeschlossenes System, das aus Teilchen besteht, bei denen das Verhältnis von Masse zu Ladung konstant ist, kann keine Dipolstrahlung aussenden:

$$\mathbf{p} = \sum_i q_i \mathbf{r}_i = \frac{q}{m} \sum m_i \mathbf{r}_i = \frac{q}{m} \mathbf{R} \sum_i m_i$$

$\mathbf{R}$  Schwerpunkt. Da sich der Schwerpunkt eines abgeschlossenen Systems gleichförmig bewegt, folgt  $\dot{\mathbf{R}} = \dot{\mathbf{p}} = 0$ .

- (iii) Eine analoge Aussage gilt für die Aussendung von **Gravitationswellen**: schwere Massen senden Gravitationswellen aus, wobei in der Multipolentwicklung der erste nicht-verschwindene Term der Quadrupolterm ist.

Heuristisch lässt sich das so erklären: beim Übergang vom Coulomb- zum Gravitationsfeld werden die Ladungen  $q_i$  durch  $\sqrt{\gamma} m_i$  ersetzt,  $\gamma$  ist die Gravitationskonstante. Das elektrische Dipolmoment wird entsprechend durch das Massendipolmoment ersetzt

$$\mathbf{p} = \sum_i q_i \mathbf{r}_i \quad \rightarrow \quad \sqrt{\gamma} \sum_i m_i \mathbf{r}_i = \frac{1}{\sqrt{\gamma}} \mathbf{R} \sum_i m_i$$

und damit gilt wieder  $\dot{\mathbf{p}} = 0$ . In Wirklichkeit ist die Gravitationstheorie nicht-linear, die Aussage gilt aber trotzdem streng.  $\rightarrow$

$$p_G = \frac{4\gamma}{180c^5} \ddot{Q}_{ik}^2 ,$$

$Q_{ik}$  ist hier das Quadrupolmoment der Massenverteilung.

$$\frac{p_G}{p_{\text{el magn}}} \approx 4 \frac{\gamma m^2}{e^2} \Big|_{\text{Protonen}} = 4 \frac{6 \cdot 10^{-39}}{1/137} \approx 3,2 \cdot 10^{-36} !!!$$

(beachten Sie aber die Neutralität).

## 5.5 Strahlungsdämpfung, die Abraham-Lorentzgleichung

Bisheriges Resultat: Aus 5.2, 5.4: geladenes Teilchen strahlt Energie ab, wenn es beschleunigt wird,  $P = \frac{2}{3}(q^2/c^3)\ddot{\mathbf{R}}^2$ .

Aus 5.2 und 3.1: geladenes Teilchen führt Feld mit sich, das eine endliche Impulsdichte  $\mathbf{g}$  hat.

Auf Grund der **Linearität** der Maxwell'schen Gleichungen kann man bei der Behandlung eines abgeschlossenen Systems geladener Teilchen im Prinzip die Felder eliminieren, so dass nur ein System kompliziert gekoppelter effektiver **Bewegungsgleichungen für die Teilchenkoordinaten** übrigbleibt. Wir wollen dies am **Beispiel einer einzelnen Ladung**  $q$  mit dem Radius  $r_0$  demonstrieren. Wir wollen überdies heuristisch vorgehen, d.h. nicht die effektive Bewegungsgleichung aus dem exakten Gleichungssystem ableiten, was von Abraham & Lorentz gemacht worden ist (siehe Stumpf & Schuler, Jackson, etc.), sondern aufgrund der abgestrahlten Energie und des mitgeführten Feldimpulses Zusatzterme in der mechanischen Bewegungsgleichung plausibel machen und deren Einfluss dann diskutieren.

Die vermutete effektive (nicht-relativistische) Bewegungsgleichung hat die Form

$$m_{\text{eff}}\ddot{\mathbf{x}} = \mathbf{F}_{\text{ext}}(\mathbf{x}, t) + \mathbf{F}_{\text{str}}, \quad (5.28)$$

$\mathbf{F}_{\text{ext}}$  ist rein mechanischen Ursprungs. Für ungeladenen Teilchen gilt  $m_{\text{eff}} = m_0$ ,  $\mathbf{F}_{\text{str}} = 0$ .

(i)  $\mathbf{F}_{\text{str}}$  beschreibt die Bewegung dämpfende Kraft, die auf das Teilchen effektiv wirkt, da es – wenn beschleunigt – Energie abstrahlt. Man kann diese Kraft über die Arbeit, die die Kraft am Teilchen leistet, ausrechnen: Im Zeitintervall  $[t_1 - t_2]$  gilt ( $\mathbf{v} = \dot{\mathbf{x}}$ )

$$\int_{t_1}^{t_2} dt \mathbf{F}_{\text{str}} \mathbf{v} = - \int_{t_1}^{t_2} \frac{2}{3} \frac{q^2}{c^3} \dot{\mathbf{v}}^2 dt = - \frac{2}{3} \frac{q^2}{c^3} \left\{ - \int_{t_1}^{t_2} \mathbf{v} \cdot \ddot{\mathbf{v}} dt + \mathbf{v} \cdot \dot{\mathbf{v}} \Big|_{t_1}^{t_2} \right\}.$$

Wirkt die Beschleunigung nur kurze Zeit, so dass  $\mathbf{v}\dot{\mathbf{v}}(t_2) = \mathbf{v} \cdot \dot{\mathbf{v}}(t_1)$ , dann verschwindet der 2. Term auf der rechten Seite und wir bekommen

$$\int_{t_1}^{t_2} dt \mathbf{v} \left( \mathbf{F}_{\text{str}} - \frac{2}{3} \frac{q^2}{c^3} \ddot{\mathbf{v}} \right) = 0,$$

woraus wir  $\mathbf{F}_{\text{str}} = \frac{2}{3} \frac{q^2}{c^3} \ddot{\mathbf{v}}$  schlussfolgern.

(ii) Für eine mit konstanter Geschwindigkeit  $\mathbf{v}$  sich bewegende Ladung folgt nach elementarer Rechnung für den Feldimpuls  $\mathbf{p}_F$

$$\mathbf{p}_F = \int d^3r \mathbf{g} = \frac{1}{4\pi c} \int d^3r (\mathbf{E} \times \mathbf{B}) = \frac{2}{3} \frac{q^2}{r_0 c^2} \mathbf{v}. \quad (5.29)$$

Da die Selbstenergie einer Ladungskugel mit Radius  $r_0$ , bei der sich die Ladung sich auf der Oberfläche befindet  $W_{\text{el}} = \frac{1}{2} \frac{q^2}{r_0}$  ist, kann man dem Feld eine Masse  $m_F = W_{\text{el}}/c^2$  zuordnen. Folglich ist  $\mathbf{p}_F = \frac{4}{3} m_F \mathbf{v}$ . Die gesamte effektive Bewegungsgleichung ist deshalb

$$\left( m_0 + \frac{4}{3} m_F \right) \ddot{\mathbf{x}} - \frac{2}{3} \frac{q^2}{c^3} \ddot{\ddot{\mathbf{x}}} = \mathbf{F}_{\text{ext}}(\mathbf{x}, t) \quad (5.30)$$

$m_0 + (4/3)m_F = m_{\text{eff}}$ . Dies ist die Abraham-Lorentz-Gleichung. Im Prinzip treten, analog zur Entwicklung für  $P$ , noch weitere Terme mit höheren Zeitableitungen auf, die aber im Limes  $r_0 \rightarrow 0$  verschwinden (in diesem Limes divergiert aber  $m_F$ !). Zweckmässige Umschreibung:

$$m_{\text{eff}}(\ddot{\mathbf{x}} - \tau \ddot{\ddot{\mathbf{x}}}) = \mathbf{F}_{\text{ext}}(\mathbf{x}, t), \quad \tau = \frac{2}{3} \frac{q^2}{c^3 m_{\text{eff}}}.$$

Die Zeit  $\tau$  ist von der Grössenordnung  $\tau = r_0 r_{\text{cl}} / (r_0 + r_{\text{cl}}) \cdot c \approx \min(r_0, r_{\text{cl}}) c$ , wobei wir  $\frac{2}{3} \frac{m_0 c^2}{q^2} = 1/r_{\text{cl}}$  (in Anlehnung an den klassischen Elektronenradius) getauft haben.

$\tau$  ist sehr klein, für Elektronen von der Ordnung  $10^{-24}$  sec. Wenn  $\ddot{\mathbf{x}}$  mit  $\ddot{\mathbf{x}}/T$  abzuschätzen ist, dann ist die Wirkung des Dämpfungsterms klein, solange  $\tau/T \ll 1$  gilt, d.h. die Strahlungsdämpfung ist nur dann gross, wenn  $T$  von der Ordnung  $\tau$  ist. Als Beispiel betrachten wir einen Oszillator mit  $\mathbf{F}_{\text{ext}} = -m_{\text{eff}} \omega_0^2 \mathbf{x}$ , d.h.

$$\ddot{\mathbf{x}} - \tau \ddot{\ddot{\mathbf{x}}} + \omega_0^2 \mathbf{x} = 0. \quad (5.31)$$

Der Ansatz  $\mathbf{x} = \mathbf{x}_0 e^{-\alpha t}$  führt auf  $\alpha^2 + \tau \alpha^3 + \omega_0^2 = 0$

$$\begin{aligned} \frac{\alpha^2}{\omega_0^2} + \tau \omega_0 \left( \frac{\alpha}{\omega_0} \right)^3 + 1 &= 0, \quad \frac{\alpha}{\omega_0} = y, \quad \omega_0 \tau \ll 1 \\ y^2 + \omega_0 \tau y^3 + 1 &= 0, \quad y = i + \varepsilon \quad \rightarrow \quad \alpha \approx \frac{\Gamma}{2} \pm i(\omega_0 + \Delta\omega) \\ 2i\varepsilon + \varepsilon^2 + \omega_0 \tau (i^3 + 3i^2\varepsilon + 3i\varepsilon^2 + \varepsilon^3) &= 0, \quad \Gamma = \omega_0^2 \tau, \quad \Delta\omega = -\frac{5}{8} \omega_0^2 \tau^2 \end{aligned}$$

d.h.

$$\mathbf{x} = \mathbf{x}_0 e^{-\omega_0^2 \tau t} e^{\pm i(\omega_0 + \Delta\omega)t}. \quad (5.32)$$

D.h. der Oszillator führt eine gedämpfte Bewegung aus. Es gibt aber auch unphysikalische Lösungen, z.B. für den Fall, wenn  $\mathbf{F}_{\text{ext}} = 0$ . Dann  $\ddot{\mathbf{x}}(t) = \begin{cases} 0 \\ \ddot{\mathbf{x}}(0) \exp(t/\tau) \end{cases}$ , d.h. Selbstbeschleunigung des Systems.

Will man solche Lösungen ausschliessen, so handelt man sich andere Schwierigkeiten ein (akausales Verhalten, s. Jackson, Stumpf & Schuler).

Nachteile der Abraham-Lorentz-Gleichung:

1. nicht-relativistisch, führt auf akausale Lösungen;
2. Feldmasse hat falschen Vorfaktor  $4/3$ ;
3. es gibt Terme höherer Ordnung, die verschwinden, wenn  $r_0 \rightarrow 0$ , aber dann divergiert  $m_F$ .