59. Freies Teilchen

a) Zylinderkoordinaten

$$\begin{aligned}
\mathcal{L}(r,\phi,z,\dot{r},\dot{\phi},\dot{z},t) &= \frac{m}{2}(\dot{r}^2 + r^2\dot{\phi}^2 + \dot{z}^2) \\
p_r &= \frac{\partial\mathcal{L}}{\partial\dot{r}} = m\dot{r} \\
p_\phi &= \frac{\partial\mathcal{L}}{\partial\dot{\phi}} = mr^2\dot{\phi} \\
p_z &= \frac{\partial\mathcal{L}}{\partial\dot{z}} = m\dot{z} \\
\mathcal{H}(r,\phi,z,p_r,p_\phi,p_z,t) &= p_r\dot{r} + p_\phi\dot{\phi} + p_z\dot{z} - \mathcal{L} \\
&= \frac{p_r^2}{2m} + \frac{p_\phi^2}{2mr^2} + \frac{p_z^2}{2m}\,.
\end{aligned}$$

b) Kugelkoordinaten

$$\begin{aligned}
\mathcal{L}(r,\phi,\theta,\dot{r},\dot{\phi},\dot{\theta},t) &= \frac{m}{2}(\dot{r}^2 + r^2\dot{\theta}^2 + r^2\sin^2\theta\dot{\phi}^2) \\
p_r &= \frac{\partial\mathcal{L}}{\partial\dot{r}} = m\dot{r} \\
p_\theta &= \frac{\partial\mathcal{L}}{\partial\dot{\theta}} = mr^2\dot{\theta} \\
p_\phi &= \frac{\partial\mathcal{L}}{\partial\dot{\phi}} = mr^2\sin^2\theta\dot{\phi} \\
\mathcal{H}(r,\theta,\phi.p_r,p_\theta,p_\phi,t) &= p_r\dot{r} + p_\theta\dot{\theta} + p_\phi\dot{\phi} - \mathcal{L} \\
&= \frac{p_r^2}{2m} + \frac{p_\theta^2}{2mr^2} + \frac{p_\phi^2}{2mr^2\sin^2\theta}
\end{aligned}$$

60. Geladenes Teilchen im Magnetfeld

$$\begin{aligned}
\mathcal{L}(\vec{r},\vec{v},t) &= -\frac{mc^2}{\gamma} - e\phi(\vec{r},t) + \frac{e}{c}\vec{v}\cdot\vec{A}(\vec{r},t) \\
p_j &= \frac{\partial\mathcal{L}}{\partial v_j} = \gamma m v_j + \frac{e}{c}A_j(\vec{r},t) \\
\mathcal{H}(\vec{r},\vec{p},t) &= \vec{p}\vec{v} - \mathcal{L}(\vec{r},\vec{v},t) \\
&= \gamma mc^2 + e\phi(\vec{r},t)
\end{aligned}$$

Mit

$$\gamma mc^2 = \sqrt{m^2c^4 + (\vec{p} - \frac{e}{c}\vec{A})^2c^2}$$

folgt

$$\mathcal{H}(\vec{r},\vec{p},t) = \sqrt{m^2c^4 + (\vec{p} - \frac{e}{c}\vec{A}(\vec{r},t))^2c^2} + e\phi(\vec{r},t)$$

61. Doppelpendel

$$\begin{aligned}
p_1 &= \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \dot{\phi}_1} = (m_1+m_2)l_1^2\dot{\phi}_1 + m_2 l_1 l_2 \dot{\phi}_2 \\
p_2 &= \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \dot{\phi}_2} = m_2 l_2^2 \dot{\phi}_2 + m_2 l_1 l_2 \dot{\phi}_1 \\
\begin{pmatrix} p_1 \\ p_2 \end{pmatrix} &= \begin{pmatrix} (m_1+m_2)l_1^2 & m_2 l_1 l_2 \\ m_2 l_1 l_2 & m_2 l_2^2 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} \dot{\phi}_1 \\ \dot{\phi}_2 \end{pmatrix}
\end{aligned}$$

Wir bekommen die Abhängigkeit von $\dot{\phi}_j(p_1,p_2)$ indem wir die 2x2 Matrix invertieren:

$$\begin{pmatrix} \dot{\phi}_1 \\ \dot{\phi}_2 \end{pmatrix} = \frac{1}{m_1 m_2 l_1^2 l_2^2} \begin{pmatrix} m_2 l_2^2 & -m_2 l_1 l_2 \\ -m_2 l_1 l_2 & (m_1+m_2)l_1^2 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} p_1 \\ p_2 \end{pmatrix}$$

$$\begin{aligned}
\mathcal{H}(\phi_j, p_j, t) &= p_1\dot{\phi}_1 + p_2\dot{\phi}_2 - \mathcal{L} \\
&= \frac{p_1^2}{2l_1^2 m_1} - \frac{p_1 p_2}{l_1 l_2 m_1} + \frac{p_2^2}{2l_2^2 m_1} + \frac{p_2^2}{2l_2^2 m_2} \\
&+ \frac{m_1+m_2}{2} g l_1 \phi_1^2 + \frac{m_2}{2} g l_2 \phi_2^2
\end{aligned}$$

62. Perle auf rotierendem Draht

Die Ortskoordinaten der Perle sind durch $\vec{r}(t) = r(t)(\cos(\omega t), \sin(\omega t))$ gegeben. Die potentielle Energie $V = 0$ und das System hat nur kinetische Energie:

$$\begin{aligned}
\mathcal{L}(r,\dot{r},t) = T &= \frac{m}{2}(\dot{r}^2 + r^2\omega^2) \\
p &= \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \dot{r}} = m\dot{r} \\
\mathcal{H} &= p\dot{r} - \mathcal{L} \\
&= \frac{p^2}{2m} - \frac{m}{2} r^2 \omega^2 \\
&\neq E
\end{aligned}$$

Im allgemeinen gilt, dass $\mathcal{H} = T + V = E$ für Systeme mit zeitunabhängigen, holonomen Zwangsbedingungen, ruhenden Koordinaten und konservativen Kräften. Im obrigen Beispiel ist die Zwangsbedingung, nämlich die Beziehung zwischen der x und der y Koordinate der Perle, zeitabhängig.

63. Rotierendes Bezugssystem

$$
\begin{aligned}
\mathcal{L}(\vec{r},\vec{v},t) &= \frac{m}{2}\vec{v}^2 + m\vec{v}(\vec{\Omega}\times\vec{r}) + \frac{m}{2}(\vec{\Omega}\times\vec{r})^2 - U(\vec{r},t) \\
p_j &= \frac{\partial\mathcal{L}}{\partial v_j} \\
&= mv_j + m\epsilon_{jkl}\Omega_k r_l \\
\mathcal{H}(\vec{r},\vec{p},t) &= \vec{p}\vec{v} - \mathcal{L} \\
&= m(\vec{v}+\vec{\Omega}\times\vec{r})\vec{v} - \frac{m}{2}\vec{v}^2 - m\vec{v}(\vec{\Omega}\times\vec{r}) - \frac{m}{2}(\vec{\Omega}\times\vec{r})^2 + U(\vec{r},t) \\
&= \frac{1}{2m}(\vec{p}-m\vec{\Omega}\times\vec{r})^2 - \frac{m}{2}(\vec{\Omega}\times\vec{r})^2 + U(\vec{r},t) \\
&= \frac{1}{2m}\vec{p}^2 - \vec{p}(\vec{\Omega}\times\vec{r}) + U(\vec{r},t)
\end{aligned}
$$