Institut für Theoretische Physik
der Universität zu Köln

Prof. Dr. Simon Trebst
Moritz Ernst, Dr. Maria Hermanns

Klassische Theoretische Physik II

Blatt 2

WS 2012/13

Abgabe: Dienstag, den 23.10.2012 vor 10 Uhr gegenüber dem Prüfungsamt
Besprechung: Donnerstag, den 25.10.2012 in den Übungsstunden
Website: http://www.thp.uni-koeln.de/trebst/Lectures/2012-KTP2.html

5. Vektoridentitäten *(4 Punkte)*

Zeigen Sie für zwei Vektorfelder $\mathbf{A}(\mathbf{r})$ und $\mathbf{B}(\mathbf{r})$ gelten:

a) $\nabla \cdot (\mathbf{A} \times \mathbf{B}) = \mathbf{B} \cdot (\nabla \times \mathbf{A}) - \mathbf{A} \cdot (\nabla \times \mathbf{B})$.

b) $\nabla \times (\mathbf{A} \times \mathbf{B}) = (\mathbf{B} \cdot \nabla)\,\mathbf{A} - (\mathbf{A} \cdot \nabla)\,\mathbf{B} + \mathbf{A}(\nabla \cdot \mathbf{B}) - \mathbf{B}(\nabla \cdot \mathbf{A})$.

6. Satz von Poynting *(4 Punkte)*

In dieser Aufgabe sollen Sie den Energiesatz der Elektrodynamik herleiten.

a) Die Ladungs- und Stromverteilungen seien so, dass diese zu einer Zeit t die Felder E und B erzeugen. Machen Sie sich klar, dass die in einem Zeitschritt dt an einer Punktladung q verrichtete Arbeit gegeben ist als:

$$\mathbf{F} \cdot \mathbf{dl} = q\,(\mathbf{E} + \mathbf{v} \times \mathbf{B}) \cdot \mathbf{v}\, dt.$$

Integrieren Sie nun über den ganzen Raum, um die Änderung der Gesamtarbeit W zu erhalten. (Mit der Ladungsdichte ρ und $q = \rho\, dV$, sowie der Stromdichte $\mathbf{j} = \rho\,\mathbf{v}$)

b) Verwenden Sie nun eine geeignete Maxwellgleichung, um die Stromdichte zu entfernen. Durch geeignete Umformung erhalten Sie dann den Satz von Poynting:

$$\frac{dW}{dt} = \int_V \mathbf{E} \cdot \mathbf{j}\, dV = -\frac{d}{dt} \int_V \frac{1}{2} \left(\epsilon_0 E^2 + \frac{1}{\mu_0} B^2 \right) dV - \frac{1}{\mu_0} \int_F \mathbf{E} \times \mathbf{B} \cdot d\mathbf{f}.$$

Hinweis: Aufgabe 5, Satz von Gauß

c) Sie sehen, dass $U_{em} = \frac{1}{2}\left(\epsilon_0 E^2 + \frac{1}{\mu_0} B^2\right)$ die Energiedichte des elektromagnetischen Feldes ist. Wenn Sie nun den *Poynting Vektor* $\mathbf{S}$ (die Energiestromdichte) definieren als

$$\mathbf{S} = \frac{1}{\mu_0}(\mathbf{E} \times \mathbf{B}),$$

können Sie die differentielle Form des Satzes von Poynting gewinnen, tun Sie dies.

$$\dot{U}_{em} + \operatorname{div} \mathbf{S} = -\mathbf{j} \cdot \mathbf{E}$$

In welchem Sinne ist dies eine Kontinuitätsgleichung?

7. Elliptisch polarisiertes Licht *(4 Punkte)*

Betrachten Sie das folgende elektrische Feld einer elektromagnetischen ebenen Welle

$$\mathbf{E}(t, \mathbf{r}) = (\mathbf{E}_{0,1} + \mathbf{E}_{0,2})\, e^{i(\mathbf{k}\cdot\mathbf{r} - \omega t)}$$

mit

$$\mathbf{E}_{0,1} = (0, a, 0), \quad \mathbf{E}_{0,2} = (0, 0, b e^{i\pi/2}), \quad a \text{ und } b \text{ reell}, \quad \mathbf{k} = (k, 0, 0).$$

Bestimmen Sie die Zeitabhängigkeit der Polarisationsrichtungen des elektrischen und magnetischen Felds bei $\mathbf{r} = 0$. **Hinweis:** Verwenden Sie die Beziehung zwischen den Amplituden des elektrischen und magnetischen Feldes.

8. Stehende elektromagnetische Welle *(4 Punkte)*

Bei $x = 0$ und bei $x = x_0$ befinden sich Reflektoren. Mit Hilfe eines Lasers werde nun eine stehende Welle erzeugt. Man beschreibt eine stehende Welle als Superposition einer einlaufenden und einer auslaufenden Welle. E_0 sei die Amplitude des elektrischen Feldes, k der Wellenvektor und ω die Oszillationsfrequenz.

$$\mathbf{E}(x, t) = \begin{cases} \mathrm{Re}(E_0\, e^{i(kx - \omega t)}\, \mathbf{e}_z - E_0\, e^{-i(kx + \omega t)}\, \mathbf{e}_z), & x \in [0, x_0] \\ 0, & \text{sonst} \end{cases}$$

a) Wie sieht das magnetische Feld aus?

b) Berechnen Sie die Energiedichte, gibt es bemerkenswerte Stellen? Wie verhält sich der Energiestrom (siehe Aufgabe 6)? Wie sind die Mittelwerte?