Institut für Theoretische Physik
der Universität zu Köln

Prof. Dr. Simon Trebst
Moritz Ernst, Dr. Maria Hermanns

Klassische Theoretische Physik II

Blatt 3

WS 2012/13

Abgabe: Dienstag, den 06.11.2012 vor 10 Uhr im Holzkasten vor der Theorie
Besprechung: Donnerstag, den 08.11.2012 in den Übungsstunden
Website: http://www.thp.uni-koeln.de/trebst/Lectures/2012-KTP2.html

0. Sprechstunde *(2 Punkte)*

Wie Sie wissen, bieten wir zur Zeit jeden Freitag um 12:00 im Foyer der Physik eine Sprechstunde zu den Übungen an. Da dieses Angebot praktisch nicht wahr genommen wird, möchten wir Sie um Verbesserungsvorschläge bitten, z. B. Zeit, Raum, Format.

9. Energiestrom einer gleichförmig bewegten Ladung *(4 Punkte)*

Eine Punktladung q bewegt sich mit konstanter nichtrelativistischer Geschwindigkeit $\mathbf{v}$. Berechnen Sie die Energiedichte u_{em} und den Poyntingvektor $\mathbf{S}$. Wie groß ist der Energiestrom $\oint_A d\mathbf{f} \cdot \mathbf{S}$ durch eine Kugeloberfläche A, in deren Zentrum sich momentan die Ladung befindet?

Hinweis: Das elektrische Feld einer bewegten Punktladung ist $\mathbf{E} = q\frac{\mathbf{r}}{r^3}(1 + O(\frac{v^2}{c^2}))$.
Finden Sie zunächst $\mathbf{B}$ und vernachlässigen Sie alle Terme quadratischer Ordnung in $\frac{v}{c}$.

10. Koaxialkabel *(4 Punkte)*

Ein langes Koaxialkabel habe einen inneren Zylinder mit Radius a, der äußere Zylinder habe Radius b. Auf der einen Seite des Kabels sei eine Batterie angebracht mit Spannung V. Auf der anderen Seite befinde sich eine Glühlampe, die den Strom I benötige. Berechnen Sie mit Hilfe des Pointing-Vektors den durch das Kabel transportierten Energiestrom.

11. Fouriertransformation *(4 Punkte)*

Man definiert für absolut integrierbare Funktionen $f \in L^1(\mathbb{R})$ die Fouriertransformation

$$\hat{f} : \mathbb{R} \to \mathbb{C},\ k \mapsto \int_{-\infty}^{\infty} \exp(-ikx) f(x) dx.$$

Ist auch $\hat{f} \in L^1(\mathbb{R})$, so lässt sich $f(x)$ nach ebenen Wellen e^{ikx} gemäß

$$f(x) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} \exp(ikx) \hat{f}(k) dk$$

entwickeln.

a) Zeigen Sie, dass die Fouriertransformation die Differentiation algebraisiert, d.h. dass für eine absolut integrierbare Funktion, deren erste Ableitung auch stetig und integrierbar ist, die Beziehung

$$\widehat{(f')}(k) = ik\hat{f}(k)$$

gilt.
Hinweis: Es mag sich als hilfreich herausstellen, zunächst Aufgabe 12 zu bearbeiten.

b) Sind $f, g \in L^1(\mathbb{R})$, so liegt die Funktion $t \mapsto f(t)\, g(x-t)$ für fast alle $x \in \mathbb{R}$ ebenfalls in $L^1(\mathbb{R})$. Die Funktion

$$(f * g)(x) := \int_{-\infty}^{\infty} f(t)\, g(x-t) dt$$

ist dann für fast alle $x \in \mathbb{R}$ wohldefiniert und heißt Faltung von f mit g.
Beweisen Sie für $f, g \in L^1(\mathbb{R})$ den Faltungssatz

$$\widehat{f * g}\,(k) = \hat{f}(k)\, \hat{g}(k).$$

12. Gaußintegrale *(4 Punkte)*

a) Zeigen Sie

$$\int_{-\infty}^{\infty} \exp(-x^2) dx = \sqrt{\pi}.$$

Hinweis: Quadrieren Sie die Identität und bestimmen Sie das auftretende Zweifachintegral $\int dx \int dy\, \mathrm{e}^{-x^2-y^2}$, indem Sie auf Polarkoordinaten transformieren.

b) Berechnen Sie die Fouriertransformierte der Gaußfunktion $x \mapsto \exp(-x^2)$.
Hinweis: Quadratische Ergänzung

Nach **4a)** ist die Funktion (ein sog. Gauß'sches Wellenpaket)

$$u(x,t) = \int_{\mathbf{R}} \frac{dk}{2\pi} \frac{\sqrt{2\pi\sigma_0}}{2} \exp\left(-\sigma_0 \frac{k^2}{2}\right) \exp(i(kx - \omega(k)t))$$

mit Dispersionsrelation $\omega(k) = ck$ eine Lösung der Wellengleichung.

c) Berechnen Sie $u(x, 0)$. Was für eine Verteilung ergibt sich, welche Rolle spielt σ_0?

13. Fourier-Transformation von Distributionen *(4 Extra- Punkte)*

Sie erinnern sich vielleicht an die Diracsche Delta-Distribution, die eingeführt wurde, um die Ladungsdichte einer Punktladung der Größe Q am Orte x_0 zu beschreiben. Dazu wurde eine endliche und homogene Ladungsdichte

$$\rho_\epsilon(x) = \begin{cases} \frac{3Q}{4\pi\epsilon^3} & \text{falls } \|x - x_0\| \leq \epsilon; \\ 0 & \text{sonst.} \end{cases}$$

betrachtet, die nur innerhalb einer ϵ-Kugel nicht verschwindet, für die aber

$$\int_{\mathbb{R}3} \rho_\epsilon(x) d^3x = Q$$

gilt. Will man die Ladung nun in einem Punkt konzentrieren, so ist diese Beschreibung offensichtlich nicht mehr mit Hilfe einer Funktion möglich, da ρ_ϵ außerhalb von x_0 punktweise gegen 0 konvergiert und im Ursprung divergiert, das Integral also verschwinden würde.
Die Mathematik prägte daher die Begriffsbildung der Distribution: jedes ρ_ϵ definiert ein linear-stetiges Funktional

$$T_\epsilon[\phi] := \int_{\mathbb{R}3} \rho_\epsilon(x)\phi(x) d^3x,$$

das für $\epsilon \to 0$ gegen die sog. Delta-Distribution konvergiert, die die Ausblendeigenschaft

$$\delta_{x_0}[\phi] = \phi(x_0)$$

hat; Physiker schreiben dafür häufig $\int \delta(x - x_0)\, \phi(x)\, dx$, wobei man sich aber im Klaren sein muss, dass dies nur eine formale Schreibweise darstellt - wie oben bemerkt, existiert eine Funktion $\delta(x - x_0)$ nicht.
Nun können wir für temperierte Distributionen (die Dirasche ist eine solche), d.h. für linear-stetige Funktionale auf dem Raum $\mathcal{S}$ der schnell fallenden Funktionen, eine Fourier-Transformation definieren. Die oben definierte Fouriertransformation bildet $\mathcal{S}$ auf sich selbst ab, sodass folgende Definition sinnvoll ist: ist T eine temperierte Distribution, so wird ihre Fouriertransformation durch die Gleichung

$$\hat{T}(\hat{\phi}) = T(\phi) \quad \forall \phi \in \mathcal{S}$$

definiert.
Zeigen Sie mit Hilfe dieser Definition, dass für die Deltadistribution $\hat{\delta} = \frac{1}{2\pi}$ sowie $\hat{1} = \delta$ gilt. Beachten Sie, dass es sich hierbei um eine Gleichheit unter Distributionen handelt.

Bemerkung: Die jeweils einzeiligen Beweise liefern einen wasserdichten Rahmen für die mnemotechnische und vielfach verwendete Notation

$$\text{“}\delta(x) = \int_{\mathbb{R}} dk \, \exp(ikx)\text{“};$$

beachten Sie aber, dass dieses Integral als solches gar nicht existiert!

14. Strahlungsdruck *(4 Extra- Punkte)*

a) Wie groß ist der Strahlungsdruck einer 100 Watt Glühbirne in $10cm$, $1m$ und $10m$ Entfernung? In welchen Verhältnis stehen diese zum Luftdruck?

b) Vielleicht wissen Sie schon, dass kleine Teilchen aus unserem Sonnensystem weggestoßen werden, oder, dass der Schweig eines Kometen immer von der Sonne wegzeigt. Der Sonnenwind spielt hier ebenfalls eine nicht zu vernachlässigende Rolle, jedoch sollen Sie sich hier auf den Strahlungsdruck konzentrieren.
Stellen Sie sich hierzu einen Würfel mit homogener Massendichte ρ und Kantenlänge L im Weltraum vor. Der Abstand zur Sonne sei R. Der Einfachheit halber sei der Würfel so ausgerichtet, dass der Verbindungsvektor zwischen den Schwerpunkten des Würfels und der Sonne genau parallel zu den Normalenvektoren zweier gegenüberliegender Seiten sei. Die Strahlung der Sonne trifft also auf eine der Würfelseiten und erzeugt über den Strahlungsdruck eine Kraft vom Betrag F_s. Daneben erfährt der Würfel auch eine Gravitationskraft F_g. Bestimmen Sie das Verhältnis der beiden Kräfte in Abhängigkeit der relevanten Parameter.
Unterhalb welcher Größe L_0 des Würfels überwiegt F_s? (Dichte $\rho = 1\frac{g}{cm^3}$)