Institut für Theoretische Physik
der Universität zu Köln

Prof. Dr. Simon Trebst
Moritz Ernst, Dr. Maria Hermanns

Klassische Theoretische Physik II

Blatt 4

WS 2012/13

Abgabe: Dienstag, den 13.11.2012 vor 10 Uhr im Holzkasten vor der Theorie
Besprechung: Donnerstag, den 15.11.2012 in den Übungsstunden
Website: http://www.thp.uni-koeln.de/trebst/Lectures/2012-KTP2.html
Fragestunde: Die Fragestunde wurde verschoben und findet jetzt **donnerstags zwischen 13:30 und 14:30** im Foyer des Physikgebäudes statt.

15. Levi-Civita-Tensor *(4 Punkte)*

a) Das Levi-Civita-Symbol in n Dimensionen ist ein Tensor mit Rank n und definiert durch

$$\epsilon_{i,j,k,\ldots} = \begin{cases} 1 & \text{wenn } (i,j,k,\ldots) \text{ eine gerade Permutation von (1,2,3,\ldots, n) ist} \\ -1 & \text{wenn } (i,j,k,\ldots) \text{ eine ungerade Permutation von (1,2,3,\ldots, n) ist} \\ 0 & \text{in allen anderen Fällen} \end{cases}$$

In zwei Dimensionen ist zum Beispiel

$$\begin{aligned} \epsilon_{1,2} &= 1 \\ \epsilon_{2,1} &= -1 \\ \epsilon_{1,1} &= \epsilon_{2,2} = 0\,. \end{aligned}$$

Berechnen Sie für $n = 3$ Dimensionen folgende Ausdrücke: $\epsilon_{i,j,k} \cdot \epsilon_{i,m,n}$, $\epsilon_{i,j,k} \cdot \epsilon_{i,j,m}$ und $\epsilon_{i,j,k} \cdot \epsilon_{i,j,k}$. Dabei gilt die Einstein'sche Summenkonvention: es wird über alle Indices summiert, die zweimal vorkommen, dh. zum Beispiel:

$$\epsilon_{i,j} \cdot \epsilon_{i,k} = \epsilon_{1,j} \cdot \epsilon_{1,k} + \epsilon_{2,j} \cdot \epsilon_{2,k} \qquad \text{für alle } j, k\,.$$

b) Zeigen Sie nun folgende Identität, die für die Herleitung des Maxwell'schen Spannungstensors benötigt wurde:

$$\left[(\vec{\nabla} \cdot \vec{A})\vec{A} - \vec{A} \times (\vec{\nabla} \times \vec{A})\right]_j = \frac{\partial}{\partial_j} \left[A_i A_j - \frac{\delta_{i,j}}{2} \vec{A} \cdot \vec{A}\right]$$

für ein beliebiges Vektorfeld $\vec{A}$. Tipp: benutzen Sie das Ergebnis von Teilaufgabe **a)** und

$$[\vec{a} \times \vec{b}]_i = \epsilon_{i,j,k} a_j b_k\,.$$

c) Zeigen Sie, dass

$$\epsilon_{i,j,k,l} \cdot (\partial_i F_j(\vec{r}))(\partial_k F_l(\vec{r}))$$

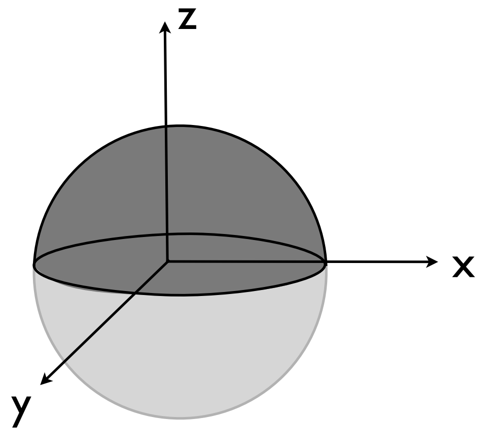
invariant ist unter $F_j \to F_j + \partial_j \Lambda(\vec{r})$, wobei $\vec{r} \in \mathbb{R}^4$. Nehmen Sie nun an, dass $\vec{r} = (ct, x, y, z)$ und dass $\vec{F}$ durch das skalare Potential ϕ und das Vektorpotential $\vec{A}$ ausgedrückt werden können (siehe auch Aufgabe 18): $\vec{F}(\vec{r}) = (\phi(\vec{r}), \vec{A}(\vec{r}))$. Welcher physikalischen Grösse entspricht $\epsilon_{i,j,k,l} \cdot (\partial_i F_j(\vec{r}))(\partial_k F_l(\vec{r}))$? Tipp: Versuchen Sie den vier-dimensionalen Levi-Civita-Tensor auf drei-dimensionale zurückzuführen, deren Index nur über (2,3,4) läuft.

16. Maxwell'scher Spannungstensor *(4 Punkte)*

Gegeben sei eine homogen geladene Kugel mit Ladung Q und Radius R. Berechnen Sie mithilfe des Maxwell'schen Spannungstensor die Kraft, die die südliche Halbkugel auf die nördliche Halbkugel ausübt. Tipp: Benutzen Sie

$$\frac{d}{dt}\left(\vec{p}_{\text{mech}} + \vec{p}_{\text{Feld}}\right)_j = \int_{\partial V} df\, \vec{n} \cdot \vec{T}_j$$

mit einem geeigneten Volumen V.



17. Eichfelder *(4 Punkte)*

a) Die elektromagnetischen Felder $\vec{B}(\vec{r},t)$ und $\vec{E}(\vec{r},t)$ können mithilfe des Vektorpotentiales $\vec{A}(\vec{r},t)$ und des skalaren Potentiales $\phi(\vec{r},t)$ dargestellt werden.

$$\begin{aligned}\vec{B}(\vec{r},t) &= \vec{\nabla} \times \vec{A}(\vec{r},t)\\ \vec{E}(\vec{r},t) &= -\frac{1}{c}\partial_t \vec{A}(\vec{r},t) - \vec{\nabla}\phi(\vec{r},t)\,.\end{aligned}$$

Die Potentiale $\vec{A}(\vec{r},t)$ und $\phi(\vec{r},t)$ sind dadurch nicht vollständig bestimmt. Sogenannte Eichtransformationen

$$\begin{aligned}\vec{A}(\vec{r},t) &\to \vec{A}(\vec{r},t) + \vec{\nabla}\Lambda(\vec{r},t)\\ \phi(\vec{r},t) &\to \phi(\vec{r},t) - \frac{1}{c}\partial_t \Lambda(\vec{r},t)\end{aligned}$$

ändern das magnetische und elektrische Feld nicht. In der Vorlesung haben Sie die Lorenz Eichung kennengelernt, die durch

$$\vec{\nabla} \cdot \vec{A}(\vec{r},t) + \frac{1}{c}\partial_t \phi(\vec{r},t) = 0$$

definiert ist. Hier diskutieren wir eine andere wichtige Eichung, die Coulomb Eichung, welche durch

$$\vec{\nabla} \cdot \vec{A}(\vec{r},t) = 0$$

definiert ist. Leiten Sie die Form der Maxwell-Gleichungen für dies Eichung her.

b) Im Falle der Lorenz Eichung kann man zwei entkoppelte Wellengleichungen für $\vec{A}(\vec{r},t)$ und $\phi(\vec{r},t)$ herleiten, nämlich:

$$\Delta\vec{A}(\vec{r},t) - \frac{1}{c^2}\partial_t^2\vec{A}(\vec{r},t) = -\frac{4\pi}{c}\vec{j}(\vec{r},t) \tag{1}$$

$$\Delta\phi(\vec{r},t) - \frac{1}{c^2}\partial_t^2\phi(\vec{r},t) = -4\pi\rho(\vec{r},t)\,. \tag{2}$$

Bestimmen Sie die definierende Gleichung für die Eichfunktion $\Lambda(\vec{r},t)$ von der Lorenz zur Coulomb Eichung. Sie brauchen diese Gleichung **nicht** zu lösen. Bestimmen Sie danach, wie sich die Wellengleichungen für $\vec{A}$ und ϕ unter der Eichtransformation verhalten und zeigen Sie, dass das Ergebnis mit dem Resultat von **a)** konsistent ist.

18. Drehimpuls im elektromagnetischen Feld *(4 Punkte)*

Gegeben sei ein Zylinderkondensator mit Kapazität C, bei dem die innere Kondensatorplatte einen Radius a, die äußere einen Radius b hat. Die Ladung auf den Kondensatorplatten ist Q bzw. $-Q$. Die Anordnung befindet sich in einem stückweise homogenen Magnetfeld in z-Richtung

$$\vec{B}(\vec{r}) = \begin{cases} B_0\hat{z} & \text{for } x^2+y^2 \leq R \\ 0 & \text{for } x^2+y^2 > R \end{cases}$$

with $a < R < b$ (graue Region im Bild). Nun wird die Anordnung entladen, indem man die Kondensatorplatten mit einem Metallstab mit Widerstand R verbindet. Es fließt ein Entladungsstrom $I(t)$. Berechnen Sie den übertragenen Drehimpuls auf die Kondensatoranordnung als Funktion der Zeit. Nehmen Sie dabei an, dass die Kondensatorplatten fest gekoppelt sind und ignorieren Sie den Gegenstrom, der durch die Rotation induziert wird. Welchen Drehimpuls hat die Anordnung, wenn sich der Kondensator vollständig entladen hat. Vergleichen Sie mit dem Drehimpuls, der ursprünglich im elektromagnetischen Feld gespeichert war.