Institut für Theoretische Physik
der Universität zu Köln

Prof. Dr. Simon Trebst
Moritz Ernst, Dr. Maria Hermanns

Klassische Theoretische Physik II

Blatt 5

WS 2012/13

Abgabe: Dienstag, den 13.11.2012 vor 10 Uhr im Holzkasten vor der Theorie
Besprechung: Donnerstag, den 15.11.2012 in den Übungsstunden
Website: http://www.thp.uni-koeln.de/trebst/Lectures/2012-KTP2.html
Fragestunde: Die Fragestunde zu den Übungen findet Donnerstags zwischen 13:30 und 14:30 im Foyer der physikalischen Institute statt.

19. Nabla- und Laplaceoperator in Zylinderkoordinaten *(4 Punkte)*

Sie haben schon des öfteren die Verzüge von geeigneten Koordinaten in Aktion gesehen. Hier werden Sie am Beispiel der Zylinderkoordinaten lernen, wie Sie die Ableitungsoperatoren auf ein gewähltes Koordinatensystem übertragen können.

a) Beginnen Sie damit aus $\mathbf{r} = (x, y, z)^T = (r\cos(\phi), r\sin(\phi), z)^T$ die partiellen Ableitungen nach r, ϕ, z zu bilden (jeweils unter Konstanthaltung der beiden verbleibenden Variablen), für diese gilt:

$$\frac{\partial \mathbf{r}}{\partial r}|_{\phi,z} = h_r \mathbf{e}_r, \quad \frac{\partial \mathbf{r}}{\partial \phi}|_{r,z} = h_\phi \mathbf{e}_\phi, \quad \frac{\partial \mathbf{r}}{\partial z}|_{r,\phi} = h_z \mathbf{e}_z,$$

dabei seien $\mathbf{e}_r, \mathbf{e}_\phi, \mathbf{e}_z$ Einheitsvektoren und h_r, h_ϕ, h_z positive Funktionen $\mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}$. Bestimmen Sie diese. Zeigen Sie außerdem, dass die so erhaltenen Einheitsvektoren ein rechthändiges Koordinatensystem bilden.

b) Man nennt für eine ortsabhängige Funktion df das Differential von f. Wählt man Koordinaten x_i und einen Koordinatenvektor $\mathbf{x}$ mit $\mathbf{x}_i = x_i$ kann man das Differential "durchziehen"

$$df(x_1, x_2, \ldots) = \sum_i \frac{\partial f}{\partial x_i} dx_i = d\mathbf{x} \cdot \nabla f.$$

Das Differential von $\mathbf{r}$ in Zylinderkoordinaten ist also $d\mathbf{r} = h_r \mathbf{e}_r dr + h_\phi \mathbf{e}_\phi d\phi + h_z \mathbf{e}_z dz$. Weiter gilt für eine beliebige Funktion f

$$df = \frac{\partial f}{\partial r} dr + \frac{\partial f}{\partial \phi} d\phi + \frac{\partial f}{\partial z} dz = d\mathbf{r} \cdot \nabla f.$$

Vergleichen Sie die Koeffizienten der Differentiale und finden Sie so die Darstellung von Nabla in Zylinderkoordinaten. (Ergebnis: $\nabla = \mathbf{e}_r \frac{\partial}{\partial r} + \mathbf{e}_\phi \frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial \phi} + \mathbf{e}_z \frac{\partial}{\partial z}$)

c) Zeigen Sie nun, dass der Laplaceoperator $\Delta = \nabla \cdot \nabla$ in Zylinderkoordinaten gegeben ist als

$$\Delta = \frac{\partial^2}{\partial r^2} + \frac{1}{r}\frac{\partial}{\partial r} + \frac{1}{r^2}\frac{\partial^2}{\partial \phi^2} + \frac{\partial^2}{\partial z^2}.$$

20. Bestimmung der Greenfunktion durch zweifache Fouriertransformation - 1. Teil

(4 Punkte)

In der Vorlesung wurde Ihnen die Lösung der Helmholtzgleichung präsentiert, Sie sollen diese nun durch explizites Nachrechnen finden.
Beachten Sie, dass diese Vorgehensweise nicht streng mathematisch ist. Behandeln Sie die Distributionen im üblichen Physikersinn.

a) Beginnen Sie, indem Sie die folgende partielle Differentialgleichung sowohl zeitlich, als auch räumlich Fourier-transformieren:

$$\Box G(\mathbf{r}, t) = -\delta(\mathbf{r})\, \delta(t),$$

beachten Sie, dass die Fourier-Transformation Ableitungen algebraisiert.

b) Nachdem Sie geeignet umgeformt haben, erhalten Sie

$$\tilde{G}(\mathbf{k}, \omega) = -\frac{1}{k^2 - \frac{\omega^2}{c^2}}.$$

Um nun $G(\mathbf{r}, t)$ zu bestimmen, müssen Sie diese Gleichung nun wieder in den Ortsraum transformieren.

$$G(\mathbf{r}, t) = -\int \frac{d^3 k}{(2\pi)^3} \int \frac{d\,\omega}{2\pi} \frac{1}{(k^2 - \frac{\omega^2}{c^2})} \mathrm{e}^{i(\mathbf{k}\cdot\mathbf{r} - \omega t)}$$

Konzentrieren Sie sich auf die k-Integration und definieren Sie:

$$G_\omega(\mathbf{r}) = \int \frac{d^3 k}{(2\pi)^3} \frac{\mathrm{e}^{i\mathbf{k}\cdot\mathbf{r}}}{k^2 - \frac{\omega^2}{c^2}}.$$

Wählen Sie für die Volumenintegration Kugelkoordinaten r, ϕ, θ und machen Sie sich klar, dass Sie θ so wählen können, dass $\mathbf{k}\cdot\mathbf{r} = k\, r\, \cos(\theta)$.
Was geschieht mit der ϕ-Integration?

c) Berechnen Sie nun das θ-Integral:

$$G_\omega(\mathbf{r}) = \frac{1}{4\pi^2} \int_0^\infty d\,k \frac{k^2}{k^2 - \frac{\omega^2}{c^2}} \int_0^\pi d\,\theta \sin(\theta)\, \mathrm{e}^{ikr\cos(\theta)}$$

21. Bestimmung der Greenfunktion durch zweifache Fouriertransformation - 2. Teil

(4 Punkte)

Wenn Sie Aufgabe 20 korrekt gelöst haben, erhalten Sie

$$G_\omega(\mathbf{r}) = \frac{i}{4\pi^2 r}\int_{-\infty}^{\infty} d\,k \frac{k\,\mathrm{e}^{-ikr}}{k^2 - \frac{\omega^2}{c^2}}.$$

a) Für die k-Integration müssen Sie zunächst den quadratischen Nenner durch Partialbruchzerlegung linearisieren.
Leider tun sich hier größere Abgründe auf, die in der Theorie der partiellen Differentialgleichungen verstanden werden. Ignorieren Sie diese und behandeln Sie alles wie gewöhnliche Integrale.

b) Bringen Sie nun das Integral auf geeignete Form und verwenden Sie $\int dx\,\frac{\mathrm{e}^{ix}}{x} = -i\pi$.
Das Zwischenergebnis finden Sie in Aufgabe 21, dort $\frac{\omega}{c} = k$.

c) Zuletzt müssen Sie auch den Frequenzteil zurücktransformieren.

$$G(\mathbf{r}, t) = \frac{1}{2}\int d\,\omega\,\left(G^+(\mathbf{r},\omega) + G^-(\mathbf{r},\omega)\right)$$

22. Greenfunktion als Lösung der Helmholtzgleichung

(4 Punkte)

a) Zeigen Sie für $\mathbf{r} \neq \mathbf{r}'$:

$$\Delta_r \frac{1}{|\mathbf{r} - \mathbf{r}'|} = 0$$

b) Berechnen Sie nun für eine beliebig kleine Kugel um den Ursprung das Volumenintegral

$$\int_V \Delta \frac{1}{r}\,dV,$$

indem Sie den Satz von Gauss verwenden.
Folgern Sie, dass nun für beliebige Vektoren gilt:

$$\Delta_r \frac{1}{|\mathbf{r} - \mathbf{r}'|} = -4\pi\,\delta(\mathbf{r} - \mathbf{r}').$$

c) Mit diesem Handwerkszeug sollen Sie nun beweisen, dass die in der Vorlesung vorgestellte Greenfunktion

$$G^\pm(\mathbf{r} - \mathbf{r}') = \frac{1}{8\pi^2}\frac{\mathrm{e}^{\pm i\,k\,|\mathbf{r}-\mathbf{r}'|}}{|\mathbf{r} - \mathbf{r}'|}$$

tatsächlich die Helmholtzgleichung

$$(\Delta_r + k^2)\,G(\mathbf{r} - \mathbf{r}') = -\frac{1}{2\pi}\delta(\mathbf{r} - \mathbf{r}')$$

löst. Es genügt, wenn Sie dies für die retardierte Funktion tun.