Institut für Theoretische Physik
der Universität zu Köln

Prof. Dr. Simon Trebst
Moritz Ernst, Dr. Maria Hermanns

Klassische Theoretische Physik II

Blatt 6

WS 2012/13

Abgabe: Dienstag, den 27.11.2012 vor 10 Uhr im Holzkasten vor der Theorie
Besprechung: Donnerstag, den 29.11.2012 in den Übungsstunden
Website: http://www.thp.uni-koeln.de/trebst/Lectures/2012-KTP2.html
Fragestunde: Die Fragestunde wurde verschoben und findet jetzt **donnerstags zwischen 13:30 und 14:30** im Foyer des Physikgebäudes statt.

Übungsgruppenverteilung am Donnerstag, den 29.11.2012: Leider sind diesen Donnerstag mehrere Übungsgruppenleiter abwesend. Die Teilnehmer der Gruppe I gehen bitte zur Gruppe II im Seminarraum II. Physik. Die Übungsgruppen V, VI und VII werden zusammengelegt: Moritz Ernst hält um 16 Uhr eine Gemeinschaftsübung im Hörsaal III.

23. Multipolentwicklung des Vektorpotentials *(4 Punkte)*

In der Vorlesung haben Sie folgenden Ausdruck für das Vektorpotential für große Abstände $r \gg |\vec{r}'|$ hergeleitet:

$$\vec{A}(\vec{r}) = \frac{e^{ikr}}{cr} \int \vec{j}(\vec{r}')e^{-ik\hat{e}_r \cdot \vec{r}'} d^3r'$$

und in führender Ordnung in $\vec{r}'/r$ behandelt. Hier leiten wir die Ausdrücke in 1. Ordnung in $\vec{r}'/r$ her.

a) Zeigen Sie, dass in 0. und 1. Ordnung gilt :

$$\begin{aligned}\vec{A}(\vec{r}) = \frac{e^{ikr}}{cr} &\left[\int d^3r' \, \vec{j}(\vec{r}') + \left(\frac{1}{r} - ik \right) (\hat{e}_r \cdot \vec{r}') \vec{j}(\vec{r}') \right] \\ &+ \mathcal{O}((\vec{r}'/r)^2) \, .\end{aligned}$$

Die 0. Ordnung haben Sie schon in der Vorlesung gesehen.

b) Zeigen Sie, dass

$$\int \vec{j}(\vec{r}')d^3x = -i\omega \int \vec{r}' \rho(\vec{r}')d^3r' \, .$$

Benutzen Sie diese Identität, um einen expliziten Ausdruck für $\vec{A}$, $\vec{B}$ und $\vec{E}$ in 0. Ordnung als Funktion des elektrischen Dipolmomentes herzuleiten. Tipp: Formen Sie die obere Gleichung mit einer partiellen Integration um und benutzen Sie die Kontinuitätsgleichung.

c) Zeigen Sie, dass

$$\int d^3r' \, (\hat{e}_r \cdot \vec{r}')\vec{j} = -c \, \hat{e}_r \times \vec{m} + \frac{1}{2} \int d^3r' \, (\hat{e}_r \cdot \vec{r}')\vec{j} + (\hat{e}_r \cdot \vec{j})\vec{r}'$$

wobei

$$\vec{m} = \frac{1}{2c} \int d^3r' (\vec{r}' \times j(\vec{r}')) \, .$$

Leiten Sie daraus das Vektorpotential in 1. Ordnung in $\vec{r}'/r$ her:

$$\vec{A}(\vec{r}) = ik\frac{e^{ikr}}{r}\left(1-\frac{1}{ikr}\right)\hat{e}_r\times\vec{m}$$
$$-\frac{k^2e^{ikr}}{2r}\left(1-\frac{1}{ikr}\right)\int d^3r'\,(\hat{e}_r\cdot\vec{r}')\vec{r}'\rho(\vec{r}')\,.$$

d) Leiten Sie aus

$$\vec{A}(\vec{r}) = ik\frac{e^{ikr}}{r}\left(1-\frac{1}{ikr}\right)\hat{e}_r\times\vec{m}$$

einen Ausdruck für $\vec{B}$ und $\vec{E}$ in der Fernfeldnäherung her.
Ergebnis:

$$\vec{B}(\vec{r}) = k^2\frac{e^{ikr}}{r}\left[(\hat{e}_r\times\vec{m})\times\hat{e}_r\right]$$
$$\vec{E}(\vec{r}) = -k^2\frac{e^{ikr}}{r}(\hat{e}_r\times\vec{m})$$

e) Leiten Sie aus

$$\vec{A}(\vec{r}) = -\frac{k^2e^{ikr}}{2r}\left(1-\frac{1}{ikr}\right)\int d^3r'\,(\hat{e}_r\cdot\vec{r}')\vec{r}'\rho(\vec{r}')$$

einen Ausdruck für $\vec{B}$ und $\vec{E}$ in der Fernfeldnäherung her.
Ergebnis:

$$\vec{B}(\vec{r}) = -\frac{ik^3e^{ikr}}{6r}\hat{e}_r\times\vec{Q}(\hat{e}_r)$$
$$\vec{E}(\vec{r}) = \frac{ik^3e^{ikr}}{6r}\hat{e}_r\times(\hat{e}_r\times\vec{Q}(\hat{e}_r))$$

wobei $\mathbf{Q}$ der Quadrupoltensor ist

$$(\mathbf{Q})_{ij} = \int d^3x(3x_ix_j-\delta_{i,j}\vec{x}^2)\rho(\vec{x})$$

und $\vec{Q}(\hat{e}_r) = \mathbf{Q}\cdot\hat{e}_r$.

24. Antenne *(4 Punkte)*

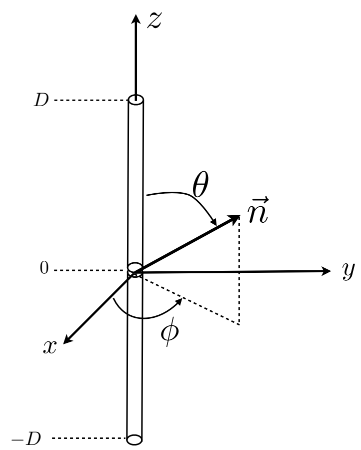
Gegeben sei eine lineare Antenne mit Länge $2D$ und Stromdichte

$$\vec{j}(\vec{r},t) = \mathrm{Re}\left[Ie^{-i\omega t}\sin(kD-k|z|)\delta(x)\delta(y)\hat{z}\right]$$

wobei z auf $|z|<D$ beschränkt ist. $k=2\pi/\lambda$ ist der Wellenvektor.
Berechnen Sie den Poyntingvektor $\vec{S}$ dieser Anordnung, sowie die Gesamtleistung

$$P = \int_S d\vec{a}\cdot\vec{S}\,,$$

in der Fernfeldnäherung für den Fall dass **a)** $2D=\lambda$ und **b)** $2D=\lambda/2$.
Tipp: Um die Integrale auszuwerten können Sie den Integralkosinus $Ci(x) = -\int_x^\infty\frac{\cos(t)}{t}dt$ benutzen.



25. Magnetischer Dipol *(4 Punkte)*

Betrachten Sie eine kreisförmige Leiterschleife mit Radius r_0, durch die ein Wechselstrom (gegeben in Zylinderkoordinaten $(x, y, z) = (\rho\cos\phi, \rho\sin\phi, z)$)

$$\vec{j}(\vec{r}, t) = \mathrm{Re}\left[j_0 e^{-i\omega t}\delta(z)\delta(\rho - r_0)\hat{\phi}\right]$$

fließt. Zeigen Sie, dass das elektrische Dipol- und Quadrupolmoment verschwinden und diese Anordnung damit ein gutes Modell für einen magnetischen Dipol ist. Berechnen Sie das elektrische und magnetische Feld in der Fernfeldnäherung und bestimmen Sie die abgestrahlte Leistung als Funktion des magnetischen Diplomomentes.

26. Multipolstrahlung *(4 Punkte)*

Eine Anordnung für Quadrupolstrahlung besteht aus einem Quadrat mit Seitenlänge a. An den Ecken sind abwechseln Ladungen q bzw. $-q$ angebracht.

$$\rho(\vec{r}, t) = \sum_{j=1}^{4}(-1)^j q\delta\left(x - \frac{a}{\sqrt{2}}\cos(\omega t + j\frac{\pi}{2})\right)\delta\left(y - \frac{a}{\sqrt{2}}\sin(\omega t + j\frac{\pi}{2})\right)\delta(z)$$

Die Anordnung rotiert mit Winkelgeschwindigkeit ω um eine Rotationsachse in $\hat{z}$-Richtung durch den Quadratmittelpunkt $M = (0, 0, 0)$. Zeigen Sie, dass das elektrische Monopol- und Dipolmoment, sowie das magnetische Dipolmoment verschwinden und das Vektorpotential in kleinster Ordnung durch den Quadrupolterm (siehe Aufgabe 23 e) gegeben ist. Berechnen Sie die Strahlungsleistung dieser Anordnung.
Tipp: Mitteln Sie die Strahlungsleistung über eine Periode, um die Ausdrücke zu vereinfachen.