Institut für Theoretische Physik
der Universität zu Köln

Prof. Dr. Simon Trebst
Moritz Ernst, Dr. Maria Hermanns

Klassische Theoretische Physik II

Blatt 7

WS 2012/13

Abgabe: Dienstag, den 04.12.2012 vor 10 Uhr im Holzkasten vor der Theorie
Besprechung: Donnerstag, den 06.12.2012 in den Übungsstunden
Website: http://www.thp.uni-koeln.de/trebst/Lectures/2012-KTP2.html
Fragestunde: Die Fragestunde zu den Übungen findet Donnerstags zwischen 13:30 und 14:30 im Foyer der physikalischen Institute statt.

27. Makroskopische ED I: Vorbereitung *(4 Punkte)*

Analog zu der in der Vorlesung berechneten gemittelten Ladungsdichten lassen sich auch die mikroskopischen Stromdichten $\mathbf{j}_\mu$ mitteln.
Final sollen Sie zeigen, dass der Mittelwert durch

$$\langle \mathbf{j}_\mu \rangle \approx \left\langle q_e \sum_i \dot{\mathbf{r}}_i \, \delta(\mathbf{r} - \mathbf{r}_i) \right\rangle + \left\langle \sum_m q_m \dot{\mathbf{r}}_m \, \delta(\mathbf{r} - \mathbf{r}_m) \right\rangle + \dot{\mathbf{P}} + c \, \nabla \times \mathbf{M}$$

gegeben ist. $\left(\mathbf{M} = \left\langle \sum_m \delta(\mathbf{r} - \mathbf{r}_m) \frac{1}{2c} \sum_j q_{m,j} \, \mathbf{a}_{m,j} \times \dot{\mathbf{a}}_{m,j} \right\rangle = \frac{1}{2c} \sum_{m,j} q_{m,j} \, \mathbf{a}_{m,j} \times \dot{\mathbf{a}}_{m,j} \, g(\mathbf{r} - \mathbf{r}_m) \right)$

Um ein nachvollziehbares Vorgehen zu ermöglichen bedarf es einiger Vorbereitung.

a) Berechnen Sie die zeitliche Ableitung der Polarisation $\mathbf{P}$. Beachten Sie, dass $\mathbf{r}_m = \mathbf{r}_m(t)$.

$$\dot{\mathbf{P}} = \frac{d}{dt} \sum_m g(\mathbf{r} - \mathbf{r}_m) \, \mathbf{d}_m$$

b) Überzeugen Sie sich durch Nachrechnen, dass

$$\nabla g(\mathbf{r} - \mathbf{r}_m) \times (\mathbf{d}_m \times \dot{\mathbf{r}}_\mathbf{m}) = (\nabla g(\mathbf{r} - \mathbf{r}_m) \cdot \dot{\mathbf{r}}_m) \, \mathbf{d}_m - (\nabla g(\mathbf{r} - \mathbf{r}_m) \cdot \mathbf{d}_m) \, \dot{\mathbf{r}}_m.$$

c) Verwenden Sie, dass

$$\frac{|\nabla g(\mathbf{r} - \mathbf{r}_m) \times (\mathbf{d}_m \times \dot{\mathbf{r}}_\mathbf{m})|}{\left|\dot{\mathbf{P}}\right|} \approx \frac{v}{c},$$

wobei v, eine typische Geschwindigkeit von geladenen Teilchen im Festkörpern sei, um zu begründen, dass Sie für $\dot{\mathbf{P}}$ schreiben können:

$$\dot{\mathbf{P}} = \sum_m \left[g(\mathbf{r} - \mathbf{r}_m) \, \dot{\mathbf{d}}_m - (\nabla g(\mathbf{r} - \mathbf{r}_m) \cdot \mathbf{d}_m) \, \dot{\mathbf{r}}_m \right].$$

28. Makroskopische ED II: Gemittelte Stromdichten *(4 Punkte)*

Gut vorbereitet können Sie sich nun an die Arbeit machen.

a) Beginnen Sie, indem Sie die Stromdichte in einen gebundenen und einen freien Teil aufspalten; $\mathbf{j} = \mathbf{j}_b + \mathbf{j}_f$. Warum vertauscht der Mittelungsprozess mit der Addition?

b) Erläutern Sie, dass für die freien Ströme gilt: $\mathbf{j}_f = q_e \langle \sum_i \dot{\mathbf{r}}_i \, \delta(\mathbf{r} - \mathbf{r}_i) \rangle$.

c) Betrachten Sie nun die gebundenen Ströme, $\mathbf{j}_b = \sum_{m,j} q_{m,j} \, (\dot{\mathbf{r}}_m + \dot{\mathbf{a}}_{m,j}) \, \delta(\mathbf{r} - \mathbf{r}_m - \mathbf{a}_{m,j})$. Diese werden mit der Gewichtsfunktion $g(\mathbf{r})$ gemittelt:

$$\langle \mathbf{j}_b(\mathbf{r}) \rangle = \int d\mathbf{r}' g(\mathbf{r}') \sum_{m,j} q_{m,j} \, (\dot{\mathbf{r}}_m + \dot{\mathbf{a}}_{m,j}) \, \delta(\mathbf{r} - \mathbf{r}' - \mathbf{r}_m - \mathbf{a}_{m,j})$$

Verwenden Sie nun die Deltadistribution, um das Integral zu berechnen und entwickeln Sie g bis zur ersten Ordnung in $\mathbf{a}_{m,j}$.
Ergebnis:

$$\langle \mathbf{j}_b(\mathbf{r}) \rangle = \sum_{m,j} q_{m,j} \left[g(\mathbf{r} - \mathbf{r}_m) - \nabla g(\mathbf{r} - \mathbf{r}_m) \cdot \mathbf{a}_{m,j} \right] (\dot{\mathbf{r}}_m + \dot{\mathbf{a}}_m)$$

d) Wenn Sie sich das Ergebnis nun Term für Term genau anschauen, werden Sie unter Zuhilfenahme von Aufgabe 27 den oben angegebenen Mittelwert nahezu rekonstruieren können.
Der letzte Term (mit dem magnetischen Dipolmoment $\mathbf{M}$) ergibt sich, wenn Sie glauben, dass

$$\nabla \times \mathbf{M} = -\sum_{m,j} q_{m,j} \, \mathbf{a}_{m,j} \, (\dot{\mathbf{a}}_{m,j} \cdot \nabla g(\mathbf{r} - \mathbf{r}_m)) + \text{Quadrupolterme.}$$

Selbstverständlich steht es Ihnen frei, auch dieses zu überprüfen.

29. Galilei-Varianz einer Wellengleichung *(4 Bonus- Punkte)*

Sie wissen, dass die Gesetze der Mechanik unabhängig von der Wahl des Koordinatensystems gelten. Erlaubte Wechsel des Koordinatensystems sind die Galelei Transformationen.
Sei $\Phi(\mathbf{x}, t)$ eine Lösung der Wellengleichung

$$\left(\sum_{i=1}^{3} \frac{\partial^2}{\partial x_i^2} - \frac{1}{c^2} \frac{\partial^2}{\partial t^2} \right) \Phi(\mathbf{x}, t) = 0.$$

Zeigen Sie, dass die sehr einfache Galelei Transformation auf ein bewegtes Koordinatensystem

$$\mathbf{x}' = \mathbf{x} - \mathbf{v}t \qquad , \qquad t' = t$$

die Wellengleichung nicht invariant lässt, sondern in folgende Form überführt

$$\left[\Delta_{x'} - \frac{1}{c^2} (\mathbf{v} \cdot \nabla_{x'})^2 + \frac{2}{c^2} (\mathbf{v} \cdot \nabla_{x'}) - \frac{1}{c^2} \frac{\partial^2}{\partial t'^2} \right] \Phi(\mathbf{x}', t') = 0$$

Können Sie Lösungen für diese Gleichung angeben?

30. Sonnenlicht *(4 Punkte)*

Beantworten Sie folgende Fragen bitte schriftlich. Sie können sich auf Dipoleffekte beschränken.

a) Wieso ist der Taghimmel blau und der Sonnenuntergang rot?

b) Warum sehen Sie partiell polarisiertes Licht, wenn Sie in den blauen Himmel blicken?