Institut für Theoretische Physik
der Universität zu Köln

Prof. Dr. Simon Trebst
Moritz Ernst, Dr. Maria Hermanns

Klassische Theoretische Physik II

Blatt 8

WS 2012/13

Abgabe: Dienstag, den 4.12.2012 vor 10 Uhr im Holzkasten vor der Theorie
Besprechung: Donnerstag, den 6.12.2012 in den Übungsstunden
Website: http://www.thp.uni-koeln.de/trebst/Lectures/2012-KTP2.html
Fragestunde: Die Fragestunde wurde verschoben und findet jetzt **donnerstags zwischen 13:30 und 14:30** im Foyer des Physikgebäudes statt.

31. Dispersion *(4 Punkte)*

Gegeben sei ein eindimensionelles Wellenpaket, das bei Zeit $t = 0$ eine Gaußform im Impulsraum hat:

$$\psi(k) = \psi_0 \exp\left[-\frac{\sigma^2}{4}(k-k_0)^2\right].$$

Das Wellenpaket bewegt sich durch Materie, wobei wir die nichtlineare Abhängigkeit zwischen k und ω durch $\omega(k) = \omega_0 + v_g(k-k_0) + \frac{a^2}{2}(k-k_0)^2$ approximieren. Berechnen Sie die räumliche Verteilung des Wellenpaketes

$$\psi(x,t) = \int dk\, \psi(k) e^{-i(kx-\omega(k)t)}$$

als Funktion der Zeit.

a) Nehmen Sie zuerst $a = 0$ an. Bestimmen Sie $\psi(x,t)$ und skizzieren Sie die räumliche Verteilung des Wellenpaketes bei $t = 0$ und $t > 0$. Welche physikalische Bedeutung hat v_g?

b) Nun sei $a \neq 0$. Bestimmen Sie wieder $\psi(x,t)$ und schreiben Sie ihr Ergebnis wie in **a)**, dh. als Realteil multipliziert mit einer von x und t abhängigen Phase (Sie brauchen die Phase nicht explizit auszurechnen). Skizzieren Sie den Realteil bei $t = 0$ und $t = 1$ für $|a/\sigma^2| \ll 1$ und $|a/\sigma^2| \gg 1$. Welchen Effekt hat a? Welchen qualitativen Unterschied sehen Sie zwischen $|a/\sigma^2| \ll 1$ und $|a/\sigma^2| \gg 1$?

32. Konduktivität *(4 Punkte)*

In der Vorlesung haben Sie die dielektrische Funktion für einen Isolator hergeleitet:

$$\epsilon(\omega) = 1 + 4\pi\frac{ne^2}{m_e}\sum_i \frac{f_i}{\omega_i^2 - \omega^2 - i\Gamma_i w}.$$

Hierbei ist n die Dichte der Atome und m_e die Masse der Elektronen. Gebundene Elektronen können durch ein (gedämpftes) Oszillatormodell beschrieben werden: f_i ist die Zahl der Elektronen mit Frequenzen ω_i und Dämpfung Γ_i.

a) Ein Metall kann man gut beschreiben, indem man eines der Elektronen als frei ansieht, dh. dessen Oszillatorfrequenz $\omega_i \to 0$, und die restlichen $Z-1$ Elektronen als gebunden. Zeigen Sie, dass die dielektrische Funktion eines Metalls damit durch

$$\epsilon(\omega) = 1 - \frac{4\pi n e^2}{m_e}\frac{1}{\omega(\omega + i\Gamma)} + 4\pi\frac{ne^2}{m_e}\sum_i \frac{f_i}{\omega_i^2 - \omega^2 - i\Gamma_i w}$$

gegeben ist.

b) Benutzen Sie

$$\vec{\nabla} \times \vec{H}(\vec{r}, t) - \frac{1}{c}\partial_t \vec{D}(\vec{r}, t) = \frac{4\pi}{c}\vec{j}_{ext}(\vec{r}, t)$$

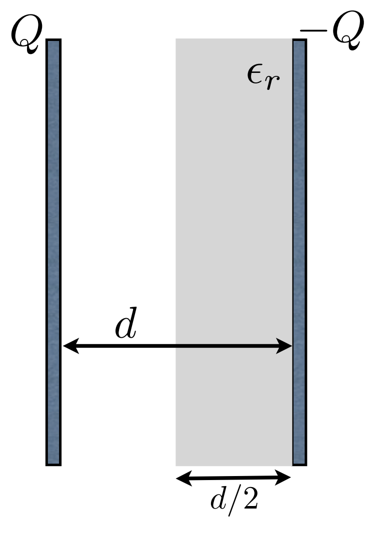
um den Einfluss der frei beweglichen Elektronen auf den elektrischen Strom herzuleiten. Machen Sie dafür zuerst eine Fouriertransformation in den Frequenzaum. Separieren Sie den Effekt von gebunden und freien Ladungen, indem Sie ihr Ergebnis in der folgenden Form

$$\vec{\nabla} \times \vec{H}(\vec{r}, \omega) + \frac{i\omega}{c}\epsilon_0(\omega)\vec{E}(\vec{r}, \omega) = \frac{4\pi}{c}(\vec{j}_{ext}(\vec{r}, \omega) + \sigma\vec{E}(\vec{r}, \omega))$$

schreiben, wobei $\epsilon_0(\omega)$ ausschließlich den Effekt der gebundenen Elektronen beschreibt und σ den Effekt der frei beweglichen. Leiten sie die Ausdrücke für ϵ_0 und σ her. Was ist die physikalische Interpretation von σ?

33. Dielektrikum im Kondensator *(4 Punkte)*

Ein Plattenkondensator mit Fläche A und Kapazität $C = \epsilon_0 A/d$ wird mithilfe einer Spannungsquelle U aufgeladen und von der Spannungsquelle getrennt. Dann wird er zur Hälfte mit einem Dielektrikum mit Dielektrizitätskonstante ϵ_r gefüllt (siehe Bild). Welche Randbedingungen gelten für das $\vec{E}$- und $\vec{D}$-Feld an der Oberfläche des Dielektrikums? Bestimmen Sie das E-Feld zwischen den Kondensatorplatten, sowie die Polarisation im Dielektrikum und die Ladungsdichte λ an der Oberfläche des Dielektrikums.



34. Skin-Effekt

(4 Punkte)

a) Benutzen Sie die dielektrische Funktion für ein Metall

$$\epsilon(\omega) = 1 - \frac{4\pi n e^2}{m_e} \frac{1}{\omega(\omega + i\Gamma)} + 4\pi \frac{n e^2}{m_e} \sum_i \frac{f_i}{\omega_i^2 - \omega^2 - i\Gamma_i w}$$

um die Wellengleichung für das $\vec{E}$-Feld bei Frequenz ω in einem Metall herzuleiten. Nehmen Sie dafür $\vec{j}_{ext} = 0$ und die Permeabilität μ als konstant an.

b) Zeigen Sie, dass $(\vec{k})^2 = \omega^2 \frac{\mu\epsilon(\omega)}{c^2}$.

c) Berechnen Sie den Wellenvektor $\vec{k}$ in der Näherung $\omega \ll \Gamma$ und zeigen Sie, dass der Wellenvektor eine komplexe Komponente hat.

d) Wie sehen die Lösungen für das $\vec{E}$-Feld aus? Welchen physikalischen Effekt hat die komplexe Komponente von $\vec{k}$?