Institut für Theoretische Physik
der Universität zu Köln

Prof. Dr. Simon Trebst
Dr. Maria Hermanns

Klassische Theoretische Physik II

Blatt 11

WS 2013/14

Abgabe: Dienstag, den 14.01.2014 vor 10 Uhr in den Briefkästen vor der Theorie
Besprechung: Donnerstag, den 16.01.2014 in den Übungsstunden
Website: http://www.thp.uni-koeln.de/trebst/Lectures/2013-KTP2.html

40. Zwillingsparadox *(4 Punkte)*

Castor möchte gerne die Welt erkunden und begibt sich an seinem 20. Geburtstag mit einem Raumschiff zu dem 4 Lichtjahre (1 Lichtjahr $\approx 9,5 \cdot 10^{15}\, m$) entfernten Stern α-Centauri. Sein Zwillingsbruder Pollux bleibt unterdessen auf der Erde. Castors Raumschiff fliegt mit halber Lichtgeschwindigkeit zu α-Centauri. Dort angekommen dreht er um und fliegt mit der gleichen Geschwindigkeit wieder zur Erde zurück. Von Pollux' Bezugssystem aus gesehen, bewegt sich Castor mit halber Lichtgeschwindigkeit und altert deshalb langsamer. Von Castors Bezugssystem aus gesehen, bewegt sich Pollux mit halber Lichtgeschwindigkeit und altert deshalb langsamer. Erklären Sie dieses Paradox und bestimmen Sie das Alter von Castor und Pollux bei Castors Heimkehr.

41. Relativistischer Dopplereffekt *(4 Extra-Punkte)*

a) Wir betrachten eine Lichtquelle, die sich mit Geschwindigkeit v auf einen Beobachter zu ($v > 0$) oder von ihm weg ($v < 0$) bewegt. Die Lichtquelle sendet in ihrem Ruhesystem Licht mit Frequenz f_0 aus. Zeigen Sie, dass der Beobachter die Frequenz

$$f' = f\sqrt{\frac{1+v/c}{1-v/c}}$$

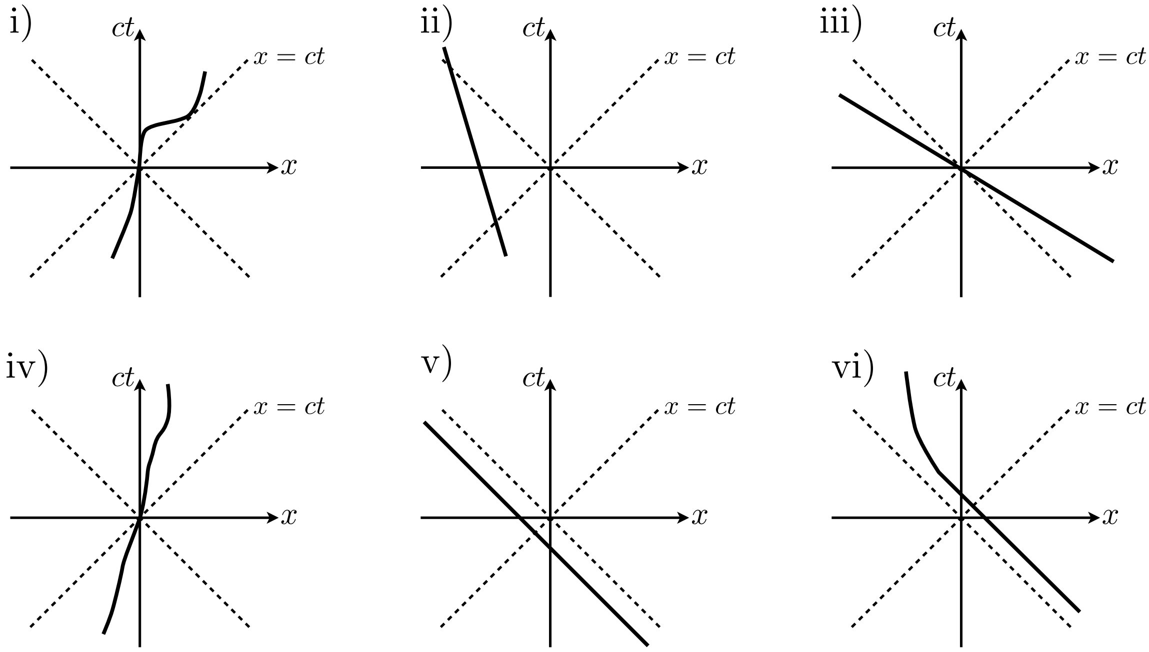
misst. Berechnen Sie dafür zunächst die Wellenlänge des Lichts im Bezugssytem des Beobachters, indem Sie den Zeitraum zwischen zwei Wellenfronten bestimmen sowie die Strecke, die die Lichtquelle in dieser Zeit zurück legt. Was geht schief, wenn man die (falsche) Annahme macht, dass $f' = 1/(\gamma\tau_0)$, wobei $\tau_0 = 1/f_0$ die Periode im Ruhesystem der Quelle ist?

b) Ein Autofahrer ist bei Rot über die Ampel gefahren. Zu seiner Verteidung behauptet er, dass er so schnell gefahren sei, dass ihm die Ampel grün erschienen ist. Wie schnell wäre der Autofahrer in dem Fall gefahren?

42. Raum-Zeit Diagramme *(4 Punkte)*

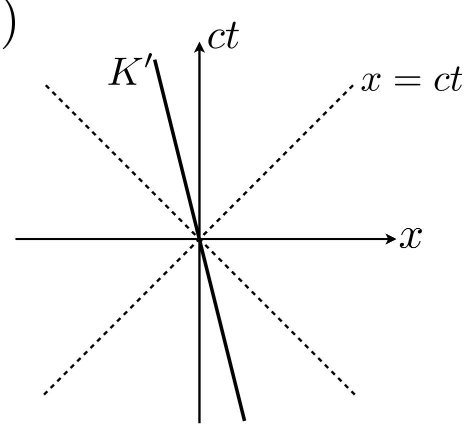
a) Welche der folgenden Raum-Zeit Diagramme in Bild **a)** sind gemäß der speziellen Relativitätstheorie erlaubt, welche nicht? Geben Sie eine kurze Begründung im Falle, dass ein Diagramm nicht erlaubt ist. Geben Sie eine kurze qualitative Beschreibung, welche physikalischen Prozesse die erlaubten Diagramme darstellen. Nehmen Sie außerdem an, dass alle Vorgänge im Vakuum stattfinden. Die gestrichelten Linien in den Diagrammen markieren den Lichtkegel.

a)



b) Zwei Inertialsysteme K und K' bewegen sich mit Geschwindigkeit v relativ zueinander. (x, t) beschreibe Ereignisse im Inertialsystem K, während (x', t') Ereignisse in K' beschreibt. Zum Zeitpunkt $t = t'$ fallen die beiden Koordinatenursprünge zusammen. Finden Sie die Menge der Ereignisse $\{(x, t)\}$, die für einen Beobachter im System K' bei t' = 0 stattfinden und skizzieren Sie diese in das Raumzeitdiagramm **b)** ein.

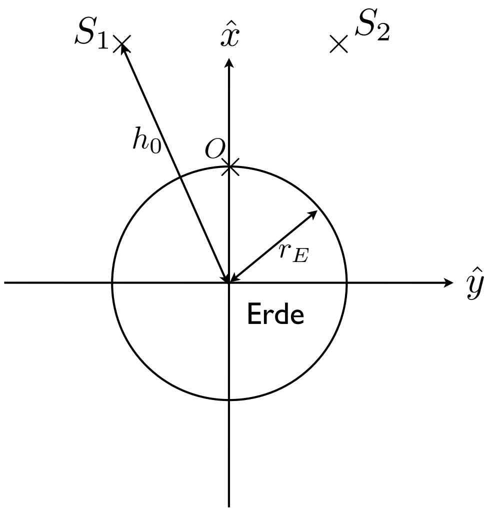
b)



43. GPS *(4 Punkte)*

Das Prinzip des Global Positioning Systems (GPS) basiert darauf, dass mehrere Satelliten ein Signal mit der aktuellen Position $\vec{r}_{sat}$ und die Sendezeit t_{sat} an einen GPS receiver senden. Dieser löst das Gleichungssystem $c(t - t^j_{sat}) = |\vec{r} - \vec{r}^j_{sat}|$, um die genaue Position $\vec{r}$ zu bestimmen, wobei t der Zeitpunkt ist, an dem die Signale empfangen werden.

a) Erläutern Sie, warum man im Prinzip 4 Satelliten braucht, um die Position genau zu bestimmen. Unter welchen Umständen können Sie auch mit 3 Satelliten auskommen?
Tipp: $|\vec{r} - \vec{r}_{sat}|$ beschreibt eine Kugeloberfläche mit Radius ct_{sat}. Überlegen Sie sich die Schnittfläche von 2 und 3 solcher Kugeloberflächen und zeigen Sie, dass immer mehr als einen Schnittpunkt gibt.



b) Das GPS muss mehrere relativistische Effekte kompensieren. Einer davon ist die Zeitdilatation der Satellitenuhren. Um den Effekt abzuschätzen nehmen Sie an dass die Satellitenuhren zur Zeit $t = 0$ mit der Erde synchronisiert sind, aber die Zeitdilatation nicht kompensiert wird. Um die Rechnung zu vereinfachen, betrachten wir nur eine eindimensionale 'Erdoberfläche' (siehe Bild) und sehen die Erde als perfekt rund an. Zwei Satelliten (warum genügen zwei in diesem Fall?) mit Bahnkurven

$$\vec{s}_1(t) = h_0 \left(\cos(\frac{2\pi t}{T} - \frac{\pi}{6}), \sin(\frac{2\pi t}{T} - \frac{\pi}{6}) \right)$$
$$\vec{s}_2(t) = h_0 \left(\cos(\frac{2\pi t}{T} + \frac{\pi}{6}), \sin(\frac{2\pi t}{T} + \frac{\pi}{6}) \right)$$

senden zur Zeit $t = 0$ ein Signal mit ihrer Position und der aktuellen Zeit. Ein Beobachter auf der Erde mit Position $\vec{x}_0 = r_E(1, 0)$ erhält zum Zeitpunkt t die Signale der Satelliten und bestimmt seine Position korrekt. Genau einen halben Tag später sind die Satelliten wieder in ihrer $t = 0$ Position und senden ein Signal. Welche Position würde ein Beobachter in $\vec{x}_0$ diesmal aus den Angaben berechnen? Nehmen Sie zur Einfachheit an, dass die Satelliten ihre Position aus der Eigenzeit und der gegebenen Bahnkurve berechnen. Wie ist der Effekt, wenn die Satelliten auf unabhängige Weise ihre Position bestimmen könnten, dh. die korrekte Position und die Eigenzeit als Signal senden.

Nehmen Sie die folgenden Größen an:

$$\begin{aligned} h_0 &= 26600\,km \\ T &= \frac{1}{2}d = 43200\,s \\ r_E &= 6400\,km \\ c &= 3 \cdot 10^8 \frac{m}{s} \end{aligned}$$

Kommentar: Die Zeitdilatation der speziellen Relativitätstheorie ist nur einer von mehreren relativistischen Effekten. Im Besonderen besagt die allgemeine Relativitätstheorie, dass Uhren in einem schwächeren Gravitationspotential *schneller* gehen. Dieser Effekt ist in 26000 km Höhe etwa 6-mal so größer als die Zeitdilatation, die Sie oben ausgerechnet haben. Effektiv laufen die Uhren der Satelliten also schneller als auf der Erde.