Institut für Theoretische Physik
der Universität zu Köln

Prof. Dr. Simon Trebst
Dr. Maria Hermanns

Klassische Theoretische Physik II

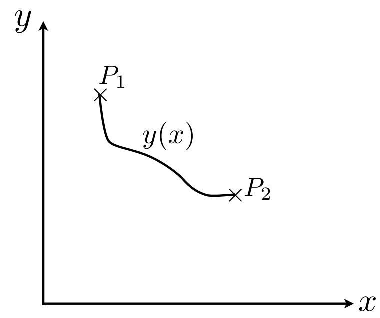
Blatt 13

WS 2013/14

Abgabe: Dienstag, den 28.01.2014 vor 10 Uhr in den Briefkästen vor der Theorie
Besprechung: Donnerstag, den 30.01.2014 in den Übungsstunden
Website: http://www.thp.uni-koeln.de/trebst/Lectures/2013-KTP2.html

48. Brachistochrone *(4 Punkte)*

Ein Körper der Masse m gleitet reibungsfrei auf der Bahnkurve $y(x)$ von $P_1 = (x_1, y_1)$ nach $P_2 = (x_2, y_2)$, wobei $y_2 < y_1$ und der Körper in P_1 ursprünglich in Ruhe ist. Bestimmen Sie die Bahnkurve $y(x)$, auf der der Körper am schnellsten von P_1 nach P_2 kommt.



Tipp: Zeigen Sie zunächst, dass für eine Lagrangefunction $\mathcal{L}(y, y', x)$, die nicht explizit von x abhängt — d.h. $\mathcal{L}(y, y', x) = \mathcal{L}(y(x), y'(x))$— gilt:

$$\mathcal{L} - y' \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial y'} = \text{ const.}$$

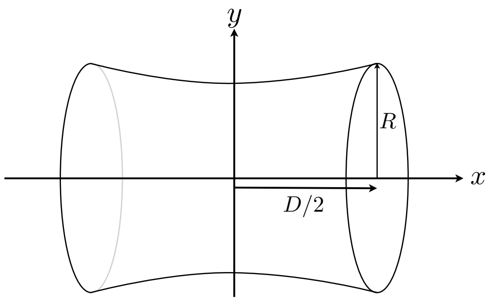
Zeigen Sie, dass diese Differentialgleichung durch

$$\begin{aligned} x &= c(\theta - \sin\theta) + x_0 \\ y &= -c(1 - \cos\theta) + y_0 \end{aligned}$$

gelöst wird und bestimmen Sid die Konstanten x_0, y_0 und c. Sie brauchen c nicht explizit auszurechnen. Skizzieren Sie die Lösung für die Fälle $(x_2 - x_1) < (y_1 - y_2)$, $(x_2 - x_1) > (y_1 - y_2)$ und $y_1 = y_2$.

49. Seifenhaut *(4 Punkte)*

Zwischen zwei parallelen Drahtkreisen mit Radius R spannt sich eine Seifenhaut. Die beiden Kreise stehen im Abstand D senkrecht auf der Verbindungslinie zwischen den Mittelpunkten. Bestimmen Sie die Form der Seifenhaut indem Sie die Oberfläche minimieren. Wie verhält sich die Haut beim langsamen Auseinanderziehen der Drahtringe?



50. Entropie *(4 Punkte)*

Wir betrachten ein System von N Teilchen mit Masse m in einem endlichen Volumen V. Jedes Teilchen hat einen Impulsvektor $\vec{p}_i$ und eine Ortskoordinate $\vec{q}_i$. Der Vielteilchenzustand wird durch die Zustandsdichte

$$\rho(\vec{p}_1, \ldots, \vec{p}_N, \vec{q}_1, \ldots, \vec{q}_N)$$

beschrieben. Die Zustandsdichte ist normiert: $\int \rho \, d\Gamma = 1$ mit $d\Gamma = d^3q_1 \ldots d^3q_N d^3p_1 \ldots d^3p_N$. Die Gesamtenergie des Systems ist konstant— $E = \int \rho H(q_1, \ldots, q_N, p_1, \ldots, p_N) d\Gamma$— wobei wir einfachheitshalber annehmen, dass die Teilchen nur kinetische Energie, aber keine potentielle Energie haben, dh.

$$H(q_1, \ldots, q_N, p_1, \ldots, p_N) = \sum_{i=1}^{N} \frac{p_i^2}{2m} .$$

Wir wollen die (normierte) Zustandsdichte finden, die die Entropy

$$S[\rho] = \int (\rho \ln \rho) d\Gamma$$

bei konstanter Energie maximiert.

51. Isoperimetrisches Problem *(4 Punkte)*

Die Enden eines Seils der Länge L sind bei den Punkten $(x_1, y_1) = (-d, 0)$ und $(x_2, y_2) = (d, 0)$ befestigt. Bestimmen Sie die Lage des Seils, so dass die Fläche zwischen dem Seil und der $x-$Achse maximal wird. Skizzieren Sie ihre Lösung für $L < \pi d$ und für $L > \pi d$.