Institut für Theoretische Physik
der Universität zu Köln

Prof. Dr. Simon Trebst
Dr. Maria Hermanns

Klassische Theoretische Physik II

Blatt 3

WS 2013/14

Abgabe: Dienstag, den 05.11.2013 vor 10 Uhr in den Briefkästen vor der Theorie
Besprechung: Donnerstag, den 07.11.2013 in den Übungsstunden
Website: http://www.thp.uni-koeln.de/trebst/Lectures/2013-KTP2.html

9. Gaußintegrale *(4 Punkte)*

a) Zeigen Sie

$$\int_{-\infty}^{\infty} dx \, \exp(-x^2) = \sqrt{\pi}.$$

Hinweis: Quadrieren Sie die Identität und bestimmen Sie das auftretende Zweifachintegral $\int dx \int dy \, \mathrm{e}^{-x^2-y^2}$, indem Sie auf Polarkoordinaten transformieren.

b) Zeigen Sie mittels a) und quadratischer Ergänzung

$$\int_{-\infty}^{\infty} dx \, e^{-ax^2+bx} = \sqrt{\frac{\pi}{a}} \exp\left[\frac{b^2}{4a}\right]$$

c) Die Fouriertransformation $\hat{f}(k)$ einer Funktion $f(x)$ ist definiert durch

$$\hat{f}(k) = \frac{1}{2\pi} \int dx f(x) e^{-ikx}$$

mit der Rücktransformation

$$f(x) = \int dk \hat{f}(k) e^{ikx} \, .$$

Verifizieren Sie, dass diese Definition konsistent ist, indem Sie die Fouriertransformierte von $\hat{f}(k)$ explizit ausrechnen.

d) Bestimmen Sie die Fourier-Transformierte $\hat{f}(k)$ der normierten Gaußfunktion

$$f(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi\sigma^2}} \exp\left[-\frac{x^2}{2\sigma^2}\right] \, .$$

10. Wellenpaket *(4 Punkte)*

a) Betrachten Sie ein Wellenpaket, welches sich in positive x-Richtung ausbreitet. Das **E**-Feld ist im Impulsraum durch eine Gaußfunktion

$$\mathbf{E}(k,0) = (0, E_y, 0)$$
$$E_y(k,0) = E_0 e^{-(k^2/(2\sigma_k^2)}$$

beschrieben. Bestimmen sie das zugehörige **B**-Feld.

b) Der Parameter σ_k wird 'Breite' genannt. Erläutern Sie diese Begriffsgebung.

c) Zeigen Sie, dass das **E** - Feld auch im Ortsraum durch eine Gaußfunktion gegeben ist. Bestimmen Sie die Breite σ_x im Ortsraum.

d) Zeigen Sie, dass die Breiten des Wellenpakets eine Unschärfe-Relation erfüllen, d.h. dass Sie das Produkt $\sigma_x \sigma_k$ nicht beliebig klein machen können.

e) Das Gauß'sche Wellenpaket erfüllt die Wellengleichung mit $w(k) = ck$. Geben Sie die Zeitentwicklung $\mathbf{E}(x,t)$ im Ortsraum an.

f) Zeichnen Sie $\mathrm{Re}(E_y)$ sowohl im Orts- als auch im Impulsraum für die Breiten $\sigma_k = 1$ und $\sigma_k = 2$ und zu den Zeiten $t = 0$ und $t = 1/c$.

11. Energiestrom einer gleichförmig bewegten Ladung *(4 Punkte)*

Eine Punktladung q bewegt sich mit konstanter nichtrelativistischer Geschwindigkeit $\mathbf{v}$. Berechnen Sie die Energiedichte u_{em} und den Poyntingvektor $\mathbf{S}$. Wie groß ist der Energiestrom $\oint_A d\mathbf{f} \cdot \mathbf{S}$ durch eine Kugeloberfläche A, in deren Zentrum sich momentan die Ladung befindet? Interpretieren Sie Ihr Resultat!

Hinweis: Das elektrische Feld einer bewegten Punktladung ist $\mathbf{E} = q\frac{\mathbf{r}}{r^3}(1 + O(\frac{v^2}{c^2}))$.
Finden Sie zunächst **B** und vernachlässigen Sie alle Terme quadratischer Ordnung in $\frac{v}{c}$.

12. Strahlungsdruck *(4 Punkte)*

a) Wie groß ist der Strahlungsdruck einer 100 Watt Glühbirne in $10cm$, $1m$ und $10m$ Entfernung? In welchen Verhältnis stehen diese zum Luftdruck?

b) Vielleicht wissen Sie schon, dass kleine Teilchen aus unserem Sonnensystem weggestoßen werden, oder, dass der Schweif eines Kometen immer von der Sonne wegzeigt. Der Sonnenwind spielt hier ebenfalls eine nicht zu vernachlässigende Rolle, jedoch sollen Sie sich hier auf den Strahlungsdruck konzentrieren.
Stellen Sie sich hierzu einen Würfel mit homogener Massendichte ρ und Kantenlänge L im Weltraum vor. Der Abstand zur Sonne sei R. Der Einfachheit halber sei der Würfel so ausgerichtet, dass der Verbindungsvektor zwischen den Schwerpunkten des Würfels und der Sonne genau parallel zu den Normalenvektoren zweier gegenüberliegender Seiten sei. Die Strahlung der Sonne trifft also auf eine der Würfelseiten und erzeugt über den Strahlungsdruck eine Kraft vom Betrag F_s. Daneben erfährt der Würfel auch eine Gravitationskraft F_g. Bestimmen Sie das Verhältnis der beiden Kräfte in Abhängigkeit der relevanten Parameter.
Unterhalb welcher Größe L_0 des Würfels überwiegt F_s? (Dichte $\rho = 1\frac{g}{cm^3}$)