Institut für Theoretische Physik
der Universität zu Köln

Prof. Dr. Simon Trebst
Dr. Maria Hermanns

Klassische Theoretische Physik II

Blatt 4

WS 2013/14

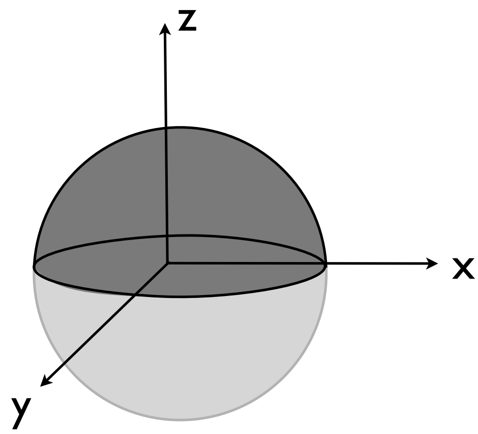
Abgabe: Dienstag, den 12.11.2013 vor 10 Uhr in den Briefkästen vor der Theorie
Besprechung: Donnerstag, den 14.11.2013 in den Übungsstunden
Website: http://www.thp.uni-koeln.de/trebst/Lectures/2013-KTP2.html

13. Maxwell'scher Spannungstensor *(4 Punkte)*

Gegeben sei eine homogen geladene Kugel mit Ladung Q und Radius R. Berechnen Sie mithilfe des Maxwell'schen Spannungstensor die Kraft, die die Ladung der südlichen Halbkugel auf die nördliche Halbkugel ausübt. Tipp: Benutzen Sie, dass

$$\frac{d}{dt}\left(\vec{p}_{\text{mech}} + \vec{p}_{\text{Feld}}\right)_j = \int_{\partial V} df\, \vec{n} \cdot \vec{T}_j$$

für beliebige Volumen V gilt, solange sie (nur) die Gesamtladung Q beinhalten. Sie können die Rechnung deutlich vereinfachen, wenn Sie als Integrationsvolumen nicht das Volumen der Halbkugel wählen, sondern ein geeignetes (größeres) Volumen.

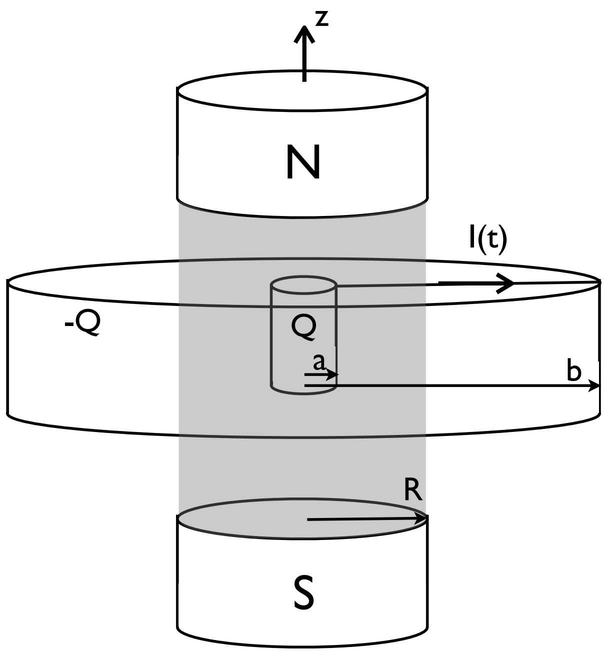


14. Drehimpuls im elektromagnetischen Feld *(4 Punkte)*

Gegeben sei ein Zylinderkondensator mit Kapazität C, bei dem die innere Kondensatorplatte einen Radius a, die äußere einen Radius b hat. Die Ladung auf den Kondensatorplatten ist Q bzw. $-Q$. Die Anordnung befindet sich in einem stückweise homogenen Magnetfeld in z-Richtung

$$\vec{B}(\vec{r}) = \begin{cases} B_0\hat{z} & \text{for } x^2+y^2 \le R \\ 0 & \text{for } x^2+y^2 > R \end{cases}$$

with $a < R < b$ (graue Region im Bild). Nun wird die Anordnung entladen, indem man die Kondensatorplatten mit einem Metallstab mit Widerstand R verbindet. Es fließt ein Entladungsstrom $I(t)$. Berechnen Sie den übertragenen Drehimpuls auf die Kondensatoranordnung als Funktion der Zeit. Nehmen Sie dabei an, dass die Kondensatorplatten fest gekoppelt sind und ignorieren Sie den Gegenstrom, der durch die Rotation induziert wird. Welchen Drehimpuls hat die Anordnung, wenn sich der Kondensator vollständig entladen hat. Vergleichen Sie mit dem Drehimpuls, der ursprünglich im elektromagnetischen Feld gespeichert war.



15. Levi-Civita-Tensor

(4 Punkte)

a) Das Levi-Civita-Symbol in n Dimensionen ist ein Tensor mit Rank n und definiert durch

$$\epsilon_{i,j,k,\ldots} = \begin{cases} 1 & \text{wenn } (i,j,k,\ldots) \text{ eine gerade Permutation von (1,2,3,..., n) ist} \\ -1 & \text{wenn } (i,j,k,\ldots) \text{ eine ungerade Permutation von (1,2,3,..., n) ist} \\ 0 & \text{in allen anderen Fällen} \end{cases}$$

In zwei Dimensionen ist zum Beispiel

$$\begin{aligned} \epsilon_{1,2} &= 1 \\ \epsilon_{2,1} &= -1 \\ \epsilon_{1,1} &= \epsilon_{2,2} = 0\,. \end{aligned}$$

Berechnen Sie für $n = 3$ Dimensionen folgende Ausdrücke: $\epsilon_{i,j,k} \cdot \epsilon_{i,m,n}$, $\epsilon_{i,j,k} \cdot \epsilon_{i,j,m}$ und $\epsilon_{i,j,k} \cdot \epsilon_{i,j,k}$. Dabei gilt die Einstein'sche Summenkonvention: es wird über alle Indizes summiert, die zweimal vorkommen, dh. zum Beispiel:

$$\epsilon_{i,j} \cdot \epsilon_{i,k} = \epsilon_{1,j} \cdot \epsilon_{1,k} + \epsilon_{2,j} \cdot \epsilon_{2,k} \qquad \text{für alle } j,k\,.$$

b) Zeigen Sie nun folgende Identität, die für die Herleitung des Maxwell'schen Spannungstensors benötigt wurde:

$$\left[(\vec{\nabla} \cdot \vec{A})\vec{A} - \vec{A} \times (\vec{\nabla} \times \vec{A})\right]_j = \frac{\partial}{\partial_j} \left[A_i A_j - \frac{\delta_{i,j}}{2} \vec{A} \cdot \vec{A}\right]$$

für ein beliebiges Vektorfeld $\vec{A}$. Tipp: benutzen Sie das Ergebnis von Teilaufgabe **a)** und

$$[\vec{a} \times \vec{b}]_i = \epsilon_{i,j,k} a_j b_k\,.$$

c) Zeigen Sie, dass

$$\epsilon_{i,j,k,l} \cdot (\partial_i F_j(\vec{r}))(\partial_k F_l(\vec{r}))$$

invariant ist unter $F_j \to F_j + \partial_j \Lambda(\vec{r})$, wobei $\vec{r} \in \mathbb{R}^4$ und $(\partial_i) = (-\partial_1, \partial_2, \partial_3, \partial_4)$. Nehmen Sie nun an, dass $\vec{r} = (ct, x, y, z)$ und dass $\vec{F}$ durch das skalare Potential ϕ und das Vektorpotential $\vec{A}$ ausgedrückt werden kann (siehe auch Aufgabe 18): $\vec{F}(\vec{r}) = (\phi(\vec{r}), \vec{A}(\vec{r}))$. Welcher physikalischen Grösse entspricht $\epsilon_{i,j,k,l} \cdot (\partial_i F_j(\vec{r}))(\partial_k F_l(\vec{r}))$?
Tipp: Versuchen Sie den vier-dimensionalen Levi-Civita-Tensor auf drei-dimensionale zurückzuführen, deren Index nur über (2,3,4) läuft. Das Minuszeichen in der Zeitkomponente der Ableitungen ist ein erstes Beispiel für den metrischen Tensor, den Sie in der Relativitätstheorie kennenlernen werden.

16. Eichfelder *(4 Punkte)*

a) Die elektromagnetischen Felder $\vec{B}(\vec{r}, t)$ und $\vec{E}(\vec{r}, t)$ können mithilfe des Vektorpotentiales $\vec{A}(\vec{r}, t)$ und des skalaren Potentiales $\phi(\vec{r}, t)$ dargestellt werden.

$$\vec{B}(\vec{r}, t) = \vec{\nabla} \times \vec{A}(\vec{r}, t)$$
$$\vec{E}(\vec{r}, t) = -\frac{1}{c}\partial_t \vec{A}(\vec{r}, t) - \vec{\nabla}\phi(\vec{r}, t)\,.$$

Die Potentiale $\vec{A}(\vec{r}, t)$ und $\phi(\vec{r}, t)$ sind dadurch nicht vollständig bestimmt. Sogenannte Eichtransformationen

$$\vec{A}(\vec{r}, t) \to \vec{A}(\vec{r}, t) + \vec{\nabla}\Lambda(\vec{r}, t)$$
$$\phi(\vec{r}, t) \to \phi(\vec{r}, t) - \frac{1}{c}\partial_t \Lambda(\vec{r}, t)$$

ändern das magnetische und elektrische Feld nicht. In der Vorlesung haben Sie die Lorenz Eichung kennengelernt, die durch

$$\vec{\nabla} \cdot \vec{A}(\vec{r}, t) + \frac{1}{c}\partial_t \phi(\vec{r}, t) = 0$$

definiert ist. Hier diskutieren wir eine andere wichtige Eichung, die Coulomb Eichung, welche durch

$$\vec{\nabla} \cdot \vec{A}(\vec{r}, t) = 0$$

definiert ist. Leiten Sie die Form der Maxwell-Gleichungen für dies Eichung her.

b) Im Falle der Lorenz Eichung kann man zwei entkoppelte Wellengleichungen für $\vec{A}(\vec{r}, t)$ und $\phi(\vec{r}, t)$ herleiten, nämlich:

$$\Delta\vec{A}(\vec{r}, t) - \frac{1}{c^2}\partial_t^2 \vec{A}(\vec{r}, t) = -\frac{4\pi}{c}\vec{j}(\vec{r}, t) \tag{1}$$
$$\Delta\phi(\vec{r}, t) - \frac{1}{c^2}\partial_t^2 \phi(\vec{r}, t) = -4\pi\rho(\vec{r}, t)\,. \tag{2}$$

Bestimmen Sie die definierende Gleichung für die Eichfunktion $\Lambda(\vec{r}, t)$ von der Lorenz zur Coulomb Eichung. Sie brauchen diese Gleichung **nicht** zu lösen. Bestimmen Sie danach, wie sich die Wellengleichungen für $\vec{A}$ und ϕ unter der Eichtransformation verhalten und zeigen Sie, dass das Ergebnis mit dem Resultat von **a)** konsistent ist.