Institut für Theoretische Physik
der Universität zu Köln

Prof. Dr. Simon Trebst
Dr. Maria Hermanns

Klassische Theoretische Physik II

Blatt 6

WS 2013/14

Abgabe: Dienstag, den 26.11.2013 vor 10 Uhr in den Briefkästen vor der Theorie
Besprechung: Donnerstag, den 28.11.2013 in den Übungsstunden
Website: http://www.thp.uni-koeln.de/trebst/Lectures/2013-KTP2.html

20. Greensche Funktion und Helmholtz-Gleichung *(4 Punkte)*

Im vorigen Übungsblatt haben Sie die Form der Greenfunktion hergeleitet. In dieser Aufgaben sollen Sie zeigen, dass die Greenfunktion die Helmhotz-Gleichung löst.

a) Zeigen Sie zunächst für $\vec{r} \neq \vec{r}\,'$:

$$\Delta_r \frac{1}{|\vec{r} - \vec{r}\,'|} = 0$$

b) Berechnen Sie nun für eine beliebig kleine Kugel um den Ursprung das Volumenintegral

$$\int_V \Delta \frac{1}{r}\, dV,$$

indem Sie den Satz von Gauss verwenden.
Folgern Sie, dass nun für beliebige Vektoren gilt:

$$\Delta_r \frac{1}{|\vec{r} - \vec{r}\,'|} = -4\pi\, \delta(\vec{r} - \vec{r}\,').$$

c) Mit diesem Handwerkszeug sollen Sie nun beweisen, dass die in der Vorlesung vorgestellte Greenfunktion

$$G^{\pm}_{\omega}(\vec{r} - \vec{r}\,') = \frac{1}{8\pi^2} \frac{\mathrm{e}^{\pm i\,k\,|\vec{r} - \vec{r}\,'|}}{|\vec{r} - \vec{r}\,'|}$$

tatsächlich die Helmholtz-Gleichung

$$(\Delta_r + k^2)\, G(\vec{r} - \vec{r}\,') = -\frac{1}{2\pi} \delta(\vec{r} - \vec{r}\,')$$

löst. Es genügt, wenn Sie dies für die retardierte Funktion tun.

21. Multipolentwicklung *(4 Punkte)*

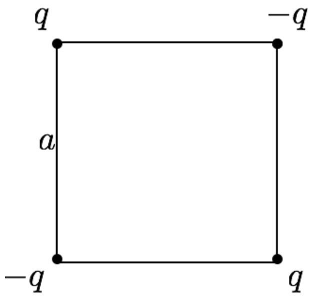
In dieser Aufgabe betrachten wir eine Ladungsverteilung $\rho(\vec{r})$ im Volumen V, dh. $\rho(\vec{r}) = 0$ für $\vec{r} \notin V$. Das Potential $\Phi(\vec{r})$ einer solchen Ladungsverteilung kann für $\vec{r} \notin V$ in der Basis der Kugelflächenfunktionen $Y_{l,m}(\theta, \phi)$ ausgedrückt werden:

$$\Phi(\vec{r}) = \sum_{l=0}^{\infty} \sum_{m=-l}^{l} \frac{4\pi}{2l+1} q_{lm} \frac{Y_{l,m}(\theta, \varphi)}{r^{l+1}}$$

wobei die Koeffizienten q_{lm} Multipolmomente genannt werden. Die Multipolmomente können mithilfe von

$$q_{lm} = \int d^3r'\, Y^{\star}_{l,m}(\theta', \varphi') r'^{l} \rho(\vec{r}\,')$$

berechnet werden.



a) Betrachten Sie nun eine Ladungsverteilung, die durch 4 Punktladungen mit $\pm q$ auf den Ecken eines Quadrates mit Seitenlänge a (siehe Bild) gegeben ist. Zeigen Sie, dass das Monopolmoment q_{00} dieser Anordnung verschwindet und erläutern Sie warum. Wie müssten Sie die Ladungsverteilung ändern, um ein endliches Monopolmoment zu erhalten?

b) Zeigen Sie, dass auch die Momente q_{1a} für $a = -1, 0, 1$ dieser Anordnung verschwinden und erläutern Sie, wie q_{1a} zu dem elektrischen Dipolmoment

$$\vec{p} = \int d^3r'\, \vec{r}\,' \rho(\vec{r}\,')$$

relatiert ist. Wie müssen Sie die Anordnung ändern, um ein endliches Dipolmoment zu erhalten?

c) Berechnen Sie zum Schluß die Quadrupolmomente ($l = 2$) dieser Anordnung.

Hinweis: Die Kugelfächenfunktionen bis einschließlich $l = 2$ sind durch

$$Y_{00}(\theta, \varphi) = \sqrt{\frac{1}{4\pi}} \qquad Y_{2,2}(\theta, \varphi) = \sqrt{\frac{15}{32\pi}} \sin^2\theta e^{i2\varphi}$$

$$Y_{11}(\theta, \varphi) = -\sqrt{\frac{3}{8\pi}} \sin\theta e^{i\varphi} \qquad Y_{2,1}(\theta, \varphi) = -\sqrt{\frac{15}{8\pi}} \sin\theta\cos\theta e^{i\varphi}$$

$$Y_{1,0}(\theta, \varphi) = \sqrt{\frac{3}{4\pi}} \cos\theta \qquad Y_{2,0}(\theta, \varphi) = \sqrt{\frac{5}{16\pi}} (3\cos^2\theta - 1)$$

und $Y_{l,-m}(\theta, \varphi) = (-1)^m Y^{\star}_{l,m}(\theta, \varphi)$ gegeben.

22. Elektrische Dipolfelder in der Fernfeldnäherung *(4 Punkte)*

In der Vorlesung haben Sie folgenden Ausdruck für das Vektorpotential hergeleitet:

$$\vec{A}(\vec{r}) = \frac{1}{c}\int d^3r' \, \frac{1}{|\vec{r}-\vec{r}\,'|}\vec{j}(\vec{r}\,')e^{ik|\vec{r}-\vec{r}\,'|}.$$

Betrachten Sie nun die Situation, dass die Stromdichte nur in einem Volumen $\sim d^3$ endlich ist und außerhalb des Volumens verschwindet. Desweiteren nehmen wir an, dass $r = |\vec{r}| \gg d$.

a) Entwickeln Sie das Vektorpotential in $\frac{r'}{r}$ und zeigen Sie, dass in 0. und 1. Ordnung gilt :

$$\vec{A}(\vec{r}) = \frac{e^{ikr}}{cr}\left[\int d^3r' \, \vec{j}(\vec{r}\,') + \left(\frac{1}{r} - ik\right)(\hat{e}_r \cdot \vec{r}\,')\vec{j}(\vec{r}\,')\right] + \mathcal{O}((\vec{r}\,'/r)^2)\,.$$

b) Zeigen Sie, dass

$$\int \vec{j}(\vec{r}\,')d^3r' = -i\omega \int \vec{r}\,'\rho(\vec{r}\,')d^3r'\,.$$

Benutzen Sie diese Identität, um einen expliziten Ausdruck für $\vec{A}$, $\vec{B}$ und $\vec{E}$ in 0. Ordnung als Funktion des elektrischen Dipolmomentes herzuleiten. Tipp: Formen Sie die obere Gleichung mit einer partiellen Integration um und benutzen Sie die Kontinuitätsgleichung.

23. Magnetische Dipolfelder in der Fernfeldnäherung *(4 Punkte)*

a) Zeigen Sie, dass

$$\int d^3r' \, (\hat{e}_r \cdot \vec{r}\,')\vec{j} = -c\,\hat{e}_r \times \vec{m} + \frac{1}{2}\int d^3r' \, (\hat{e}_r \cdot \vec{r}\,')\vec{j} + (\hat{e}_r \cdot \vec{j})\vec{r}\,'$$

wobei

$$\vec{m} = \frac{1}{2c}\int d^3r'(\vec{r}\,' \times j(\vec{r}\,'))$$

das magnetische Dipolmoment ist.

b) Ignorieren Sie den zweiten Term in der Identität aus **a)** (dieser Term entspricht einem elektrischen Quadrupolmoment) und leiten Sie explizite Ausdrücke für $\vec{A}$, $\vec{B}$ und $\vec{E}$ her, die durch das magnetische Dipolmoment entstehen. Welche Parallelen sehen Sie in den Ausdrücken für $\vec{A}$, $\vec{B}$ und $\vec{E}$ im Vergleich zu den Ergebnissen aus Aufgabe **22**.