Institut für Theoretische Physik
der Universität zu Köln

Prof. Dr. Simon Trebst
Dr. Maria Hermanns

Klassische Theoretische Physik II

Blatt 7

WS 2013/14

Abgabe: Dienstag, den 03.12.2013 vor 10 Uhr in den Briefkästen vor der Theorie
Besprechung: Donnerstag, den 05.12.2013 in den Übungsstunden
Website: http://www.thp.uni-koeln.de/trebst/Lectures/2013-KTP2.html

27. Sonnenlicht *(4 Punkte)*

Beantworten Sie folgende Fragen bitte schriftlich. Sie können sich auf Dipoleffekte beschränken.

a) Wieso ist der Taghimmel blau und der Sonnenuntergang rot?

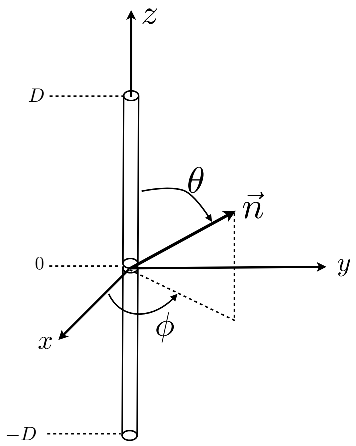
b) Warum sehen Sie partiell polarisiertes Licht, wenn Sie in den blauen Himmel blicken?

28. Antenne *(4 Punkte)*

Gegeben sei eine lineare Antenne mit Länge $2D$ und Stromdichte

$$\mathbf{j}(\mathbf{r}, t) = \mathrm{Re}\left[I e^{-i\omega t} \sin(kD - k|z|)\delta(x)\delta(y)\hat{z}\right]$$

wobei z auf $|z| < D$ beschränkt ist. $k = 2\pi/\lambda$ ist der Wellenvektor.



Berechnen Sie den Poyntingvektor $\mathbf{S}$ dieser Anordnung in der Fernfeldnäherung für den Fall dass **a)** $2D = \lambda$ und **b)** $2D = \lambda/2$.

29. Nabla- und Laplaceoperator in Zylinderkoordinaten *(4 Punkte)*

Sie haben schon des öfteren die Verzüge von geeigneten Koordinaten in Aktion gesehen. Hier werden Sie am Beispiel der Zylinderkoordinaten lernen, wie Sie die Ableitungsoperatoren auf ein gewähltes Koordinatensystem übertragen können.

a) Beginnen Sie damit aus $\mathbf{r} = (x, y, z)^T = (r\cos(\phi), r\sin(\phi), z)^T$ die partiellen Ableitungen nach r, ϕ, z zu bilden (jeweils unter Konstanthaltung der beiden verbleibenden Variablen), für diese gilt:

$$\frac{\partial \mathbf{r}}{\partial r}|_{\phi,z} = h_r \mathbf{e}_r, \qquad \frac{\partial \mathbf{r}}{\partial \phi}|_{r,z} = h_\phi \mathbf{e}_\phi, \qquad \frac{\partial \mathbf{r}}{\partial z}|_{r,\phi} = h_z \mathbf{e}_z,$$

dabei seien $\mathbf{e}_r, \mathbf{e}_\phi, \mathbf{e}_z$ Einheitsvektoren und h_r, h_ϕ, h_z positive Funktionen $\mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}$. Bestimmen Sie diese. Zeigen Sie außerdem, dass die so erhaltenen Einheitsvektoren ein rechthändiges Koordinatensystem bilden.

b) Man nennt für eine ortsabhängige Funktion df das Differential von f. Wählt man Koordinaten x_i und einen Koordinatenvektor $\mathbf{x}$ mit $\mathbf{x}_i = x_i$ kann man das Differential "durchziehen"

$$df(x_1, x_2, \ldots) = \sum_i \frac{\partial f}{\partial x_i} dx_i = d\mathbf{x} \cdot \nabla f.$$

Das Differential von $\mathbf{r}$ in Zylinderkoordinaten ist also $d\mathbf{r} = h_r \mathbf{e}_r dr + h_\phi \mathbf{e}_\phi d\phi + h_z \mathbf{e}_z dz$. Weiter gilt für eine beliebige Funktion f

$$df = \frac{\partial f}{\partial r} dr + \frac{\partial f}{\partial \phi} d\phi + \frac{\partial f}{\partial z} dz = d\mathbf{r} \cdot \nabla f.$$

Vergleichen Sie die Koeffizienten der Differentiale und finden Sie so die Darstellung von Nabla in Zylinderkoordinaten. (Ergebnis: $\nabla = \mathbf{e}_r \frac{\partial}{\partial r} + \mathbf{e}_\phi \frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial \phi} + \mathbf{e}_z \frac{\partial}{\partial z}$)

c) Zeigen Sie nun, dass der Laplaceoperator $\Delta = \nabla \cdot \nabla$ in Zylinderkoordinaten gegeben ist als

$$\Delta = \frac{\partial^2}{\partial r^2} + \frac{1}{r}\frac{\partial}{\partial r} + \frac{1}{r^2}\frac{\partial^2}{\partial \phi^2} + \frac{\partial^2}{\partial z^2}.$$

30. Instabilität des klassichen Atoms *(4 Punkte)*

In einem *klassischen* Wasserstoffatom läuft ein Elektron auf einer annähernd kreisförmigen Bahn vom Radius r mit Winkelgeschwindigkeit ω um ein als ortsfest angenommenes Proton. Aufgrund dieser Bewegung strahlt das Elektron beständig Energie in Form elektromagnetischer Wellen ab, verliert deshalb ständig an Energie und nähert sich somit dem Proton an.

Zeigen Sie, dass das Elektron innerhalb endlicher Zeit in das Proton stürzt. Bestimmen Sie diese Zeit für ein Elektron auf einer anfänglichen Kreisbahn mit einer Gesamtenergie von $E = -13.6\,eV$.

Hinweis: Stellen Sie Frequenz ω und Radius r der (annähernden) Kreisbahn des Elektrons als Funktion der (negativen) Gesamtenergie $E \equiv -U$ des Elektrons dar. Beachten Sie, dann, dass $U = U(t)$ und $\frac{dU(t)}{dt}$ durch die totale Strahlungsleistung gegeben ist. Letztere bestimmen Sie in Dipolnäherung mit Dipolmoment $p = er$.