Institut für Theoretische Physik
der Universität zu Köln

Prof. Dr. Simon Trebst
Dr. Maria Hermanns

Klassische Theoretische Physik II

Blatt 8

WS 2013/14

Abgabe: Dienstag, den 10.12.2013 vor 10 Uhr in den Briefkästen vor der Theorie
Besprechung: Donnerstag, den 12.12.2013 in den Übungsstunden
Website: http://www.thp.uni-koeln.de/trebst/Lectures/2013-KTP2.html

28. Makroskopische ED I: Vorbereitung *(4 Punkte)*

Analog zu der in der Vorlesung berechneten gemittelten Ladungsdichten lassen sich auch die mikroskopischen Stromdichten $\mathbf{j}_\mu$ mitteln.
Final sollen Sie zeigen, dass der Mittelwert durch

$$\langle \mathbf{j}_\mu \rangle \approx \left\langle q_e \sum_i \dot{\mathbf{r}}_i \, \delta(\mathbf{r} - \mathbf{r}_i) \right\rangle + \left\langle \sum_m q_m \dot{\mathbf{r}}_m \, \delta(\mathbf{r} - \mathbf{r}_m) \right\rangle + \dot{\mathbf{P}} + c \nabla \times \mathbf{M}$$

gegeben ist. $\left(\mathbf{M} = \left\langle \sum_m \delta(\mathbf{r} - \mathbf{r}_m) \frac{1}{2c} \sum_j q_{m,j} \, \mathbf{a}_{m,j} \times \dot{\mathbf{a}}_{m,j} \right\rangle = \frac{1}{2c} \sum_{m,j} q_{m,j} \, \mathbf{a}_{m,j} \times \dot{\mathbf{a}}_{m,j} \, g(\mathbf{r} - \mathbf{r}_m) \right)$

Um ein nachvollziehbares Vorgehen zu ermöglichen bedarf es einiger Vorbereitung.

a) Berechnen Sie die zeitliche Ableitung der Polarisation $\mathbf{P}$. Beachten Sie, dass $\mathbf{r}_m = \mathbf{r}_m(t)$.

$$\dot{\mathbf{P}} = \frac{d}{dt} \sum_m g(\mathbf{r} - \mathbf{r}_m) \, \mathbf{d}_m$$

b) Überzeugen Sie sich durch Nachrechnen, dass

$$\nabla g(\mathbf{r} - \mathbf{r}_m) \times (\mathbf{d}_m \times \dot{\mathbf{r}}_\mathbf{m}) = (\nabla g(\mathbf{r} - \mathbf{r}_m) \cdot \dot{\mathbf{r}}_m) \, \mathbf{d}_m - (\nabla g(\mathbf{r} - \mathbf{r}_m) \cdot \mathbf{d}_m) \, \dot{\mathbf{r}}_m.$$

c) Verwenden Sie, dass

$$\frac{|\nabla g(\mathbf{r} - \mathbf{r}_m) \times (\mathbf{d}_m \times \dot{\mathbf{r}}_\mathbf{m})|}{\left|\dot{\mathbf{P}}\right|} \approx \frac{v}{c},$$

wobei v, eine typische Geschwindigkeit von geladenen Teilchen im Festkörpern sei, um zu begründen, dass Sie für $\dot{\mathbf{P}}$ schreiben können:

$$\dot{\mathbf{P}} = \sum_m \left[g(\mathbf{r} - \mathbf{r}_m) \, \dot{\mathbf{d}}_m - (\nabla g(\mathbf{r} - \mathbf{r}_m) \cdot \mathbf{d}_m) \, \dot{\mathbf{r}}_m \right].$$

29. Makroskopische ED II: Gemittelte Stromdichten *(4 Punkte)*

Gut vorbereitet können Sie sich nun an die Arbeit machen.

a) Beginnen Sie, indem Sie die Stromdichte in einen gebundenen und einen freien Teil aufspalten; $\mathbf{j} = \mathbf{j}_b + \mathbf{j}_f$. Warum vertauscht der Mittelungsprozess mit der Addition?

b) Erläutern Sie, dass für die freien Ströme gilt: $\mathbf{j}_f = q_e \langle \sum_i \dot{\mathbf{r}}_i \, \delta(\mathbf{r} - \mathbf{r}_i) \rangle$.

c) Betrachten Sie nun die gebundenen Ströme, $\mathbf{j}_b = \sum_{m,j} q_{m,j} \, (\dot{\mathbf{r}}_m + \dot{\mathbf{a}}_{m,j}) \, \delta(\mathbf{r} - \mathbf{r}_m - \mathbf{a}_{m,j})$. Diese werden mit der Gewichtsfunktion $g(\mathbf{r})$ gemittelt:

$$\langle \mathbf{j}_b(\mathbf{r}) \rangle = \int d\mathbf{r}' g(\mathbf{r}') \sum_{m,j} q_{m,j} \, (\dot{\mathbf{r}}_m + \dot{\mathbf{a}}_{m,j}) \, \delta(\mathbf{r} - \mathbf{r}' - \mathbf{r}_m - \mathbf{a}_{m,j})$$

Verwenden Sie nun die Deltadistribution, um das Integral zu berechnen und entwickeln Sie g bis zur ersten Ordnung in $\mathbf{a}_{m,j}$.
Ergebnis:

$$\langle \mathbf{j}_b(\mathbf{r}) \rangle = \sum_{m,j} q_{m,j} \left[g(\mathbf{r} - \mathbf{r}_m) - \nabla g(\mathbf{r} - \mathbf{r}_m) \cdot \mathbf{a}_{m,j} \right] (\dot{\mathbf{r}}_m + \dot{\mathbf{a}}_m)$$

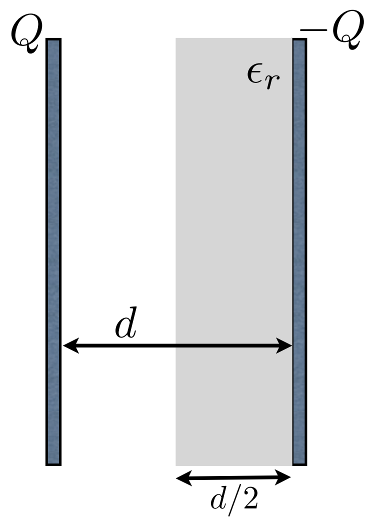
d) Wenn Sie sich das Ergebnis nun Term für Term genau anschauen, werden Sie unter Zuhilfenahme von Aufgabe 27 den oben angegebenen Mittelwert nahezu rekonstruieren können.
Der letzte Term (mit dem magnetischen Dipolmoment $\mathbf{M}$) ergibt sich, wenn Sie glauben, dass

$$\nabla \times \mathbf{M} = -\sum_{m,j} q_{m,j} \, \mathbf{a}_{m,j} \, (\dot{\mathbf{a}}_{m,j} \cdot \nabla g(\mathbf{r} - \mathbf{r}_m)) + \text{Quadrupolterme}.$$

Selbstverständlich steht es Ihnen frei, auch dieses zu überprüfen.

30. Dielektrikum im Kondensator *(4 Punkte)*

Ein Plattenkondensator mit Fläche A und Kapazität $C = \epsilon_0 A/d$ wird mithilfe einer Spannungsquelle U aufgeladen und von der Spannungsquelle getrennt. Dann wird er zur Hälfte mit einem Dielektrikum mit Dielektrizitätskonstante ϵ_r gefüllt (siehe Bild). Welche Randbedingungen gelten für das $\mathbf{E}$- und $\mathbf{D}$-Feld an der Oberfläche des Dielektrikums? Bestimmen Sie das E-Feld zwischen den Kondensatorplatten, sowie die Polarisation im Dielektrikum und die Ladungsdichte λ an der Oberfläche des Dielektrikums.



31. Dispersion *(4 Punkte)*

Gegeben sei ein eindimensionales Wellenpaket, das bei Zeit $t = 0$ eine Gaußform im Impulsraum hat:

$$\psi(k) = \psi_0 \exp\left[-\frac{\sigma^2}{4}(k-k_0)^2\right] .$$

Das Wellenpaket bewegt sich durch Materie, wobei wir die nichtlineare Abhängigkeit zwischen k und ω durch $\omega(k) = \omega_0 + v_g(k-k_0) + \frac{a^2}{2}(k-k_0)^2$ approximieren. Berechnen Sie die räumliche Verteilung des Wellenpaketes

$$\psi(x,t) = \int dk\, \psi(k) e^{-i(kx-\omega(k)t)}$$

als Funktion der Zeit.

a) Nehmen Sie zuerst $a = 0$ an. Bestimmen Sie $\psi(x,t)$ und skizzieren Sie die räumliche Verteilung des Wellenpaketes bei $t = 0$ und $t > 0$. Welche physikalische Bedeutung hat v_g?

b) Nun sei $a \neq 0$. Bestimmen Sie wieder $\psi(x,t)$ und schreiben Sie ihr Ergebnis wie in **a)**, dh. als Realteil multipliziert mit einer von x und t abhängigen Phase (Sie brauchen die Phase nicht explizit auszurechnen). Skizzieren Sie den Realteil bei $t = 0$ und $t = 1$ für $|a/\sigma^2| \ll 1$ und $|a/\sigma^2| \gg 1$. Welchen Effekt hat a? Welchen qualitativen Unterschied sehen Sie zwischen $|a/\sigma^2| \ll 1$ und $|a/\sigma^2| \gg 1$?