Institut für Theoretische Physik
der Universität zu Köln

Prof. Dr. Simon Trebst
Dr. Maria Hermanns

Klassische Theoretische Physik II

Blatt 9

WS 2013/14

Abgabe: Dienstag, den 17.12.2013 vor 10 Uhr bei den Briefkästen vor der Theorie
Besprechung: Donnerstag, den 19.12.2013 in den Übungsstunden
Website: http://www.thp.uni-koeln.de/trebst/Lectures/2013-KTP2.html

Fragestunde: Eine Fragestunde zu den Übungen findet Donnerstags zwischen 13:30 und 14:30 im Foyer der physikalischen Institute statt.

32. Konduktivität *(4 Punkte)*

In der Vorlesung haben Sie die dielektrische Funktion für einen Isolator hergeleitet:

$$\epsilon(\omega) = 1 + 4\pi \frac{ne^2}{m_e} \sum_i \frac{f_i}{\omega_i^2 - \omega^2 - i\Gamma_i w}\,.$$

Hierbei ist n die Dichte der Atome und m_e die Masse der Elektronen. Gebundene Elektronen können durch ein (gedämpftes) Oszillatormodell beschrieben werden: f_i ist die Zahl der Elektronen mit Frequenzen ω_i und Dämpfung Γ_i.

a) Ein Metall kann man gut beschreiben, indem man eines der Elektronen als frei ansieht, dh. dessen Oszillatorfrequenz $\omega_i \to 0$, und die restlichen $Z-1$ Elektronen als gebunden. Zeigen Sie, dass die dielektrische Funktion eines Metalls damit durch

$$\epsilon(\omega) = 1 - \frac{4\pi ne^2}{m_e} \frac{1}{\omega(\omega + i\Gamma)} + 4\pi \frac{ne^2}{m_e} \sum_i \frac{f_i}{\omega_i^2 - \omega^2 - i\Gamma_i w}$$

gegeben ist.

b) Benutzen Sie

$$\nabla \times \mathbf{H}(\mathbf{r},t) - \frac{1}{c}\partial_t \mathbf{D}(\mathbf{r},t) = \frac{4\pi}{c}\mathbf{j}_{ext}(\mathbf{r},t)$$

um den Einfluss der frei beweglichen Elektronen auf den elektrischen Strom herzuleiten. Machen Sie dafür zuerst eine Fouriertransformation in den Frequenzaum. Separieren Sie den Effekt von gebunden und freien Ladungen, indem Sie ihr Ergebnis in der folgenden Form

$$\nabla \times \mathbf{H}(\mathbf{r},\omega) + \frac{i\omega}{c}\epsilon_0(\omega)\mathbf{E}(\mathbf{r},\omega) = \frac{4\pi}{c}(\mathbf{j}_{ext}(\mathbf{r},\omega) + \sigma \mathbf{E}(\mathbf{r},\omega))$$

schreiben, wobei $\epsilon_0(\omega)$ ausschließlich den Effekt der gebundenen Elektronen beschreibt und σ den Effekt der frei beweglichen. Leiten sie die Ausdrücke für ϵ_0 und σ her. Was ist die physikalische Interpretation von σ?

33. Skin-Effekt *(4 Punkte)*

a) Benutzen Sie die dielektrische Funktion für ein Metall

$$\epsilon(\omega) = 1 - \frac{4\pi n e^2}{m_e}\frac{1}{\omega(\omega + i\Gamma)} + 4\pi\frac{ne^2}{m_e}\sum_i \frac{f_i}{\omega_i^2 - \omega^2 - i\Gamma_i w}$$

um die Wellengleichung für das **E**-Feld bei Frequenz ω in einem Metall herzuleiten. Nehmen Sie dafür $\mathbf{j}_{ext} = 0$ und die Permeabilität μ als konstant an.

b) Zeigen Sie, dass $(\mathbf{k})^2 = \omega^2 \frac{\mu\epsilon(\omega)}{c^2}$.

c) Berechnen Sie den Wellenvektor **k** in der Näherung $\omega \ll \Gamma$ und zeigen Sie, dass der Wellenvektor eine komplexe Komponente hat.

d) Wie sehen die Lösungen für das **E**-Feld aus? Welchen physikalischen Effekt hat die komplexe Komponente von **k**?

34. Galilei-Varianz einer Wellengleichung *(4 Bonus- Punkte)*

Sie wissen, dass die Gesetze der Mechanik unabhängig von der Wahl des Koordinatensystems gelten. Erlaubte Wechsel des Koordinatensystems sind die Galelei Transformationen.
Sei $\Phi(\mathbf{x}, t)$ eine Lösung der Wellengleichung

$$\left(\sum_{i=1}^{3} \frac{\partial^2}{\partial x_i^2} - \frac{1}{c^2}\frac{\partial^2}{\partial t^2}\right)\Phi(\mathbf{x}, t) = 0.$$

Zeigen Sie, dass die sehr einfache Galelei Transformation auf ein bewegtes Koordinatensystem

$$\mathbf{x}' = \mathbf{x} - \mathbf{v}t \qquad , \qquad t' = t$$

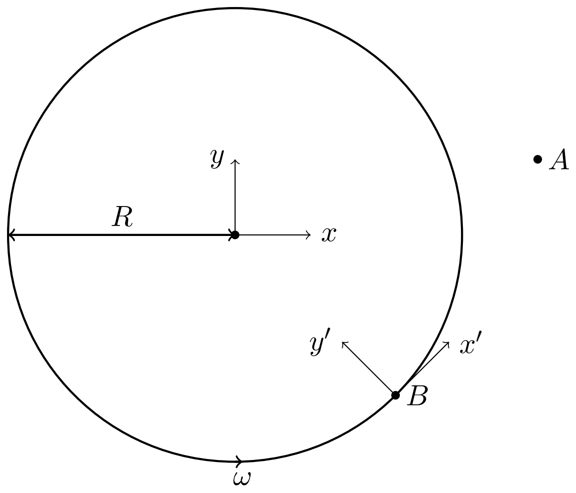
die Wellengleichung nicht invariant lässt, sondern in folgende Form überführt

$$\left[\Delta_{x'} - \frac{1}{c^2}\left(\mathbf{v}\cdot\nabla_{x'}\right)^2 + \frac{2}{c^2}\left(\mathbf{v}\cdot\nabla_{x'}\right) - \frac{1}{c^2}\frac{\partial^2}{\partial t'^2}\right]\Phi(\mathbf{x}', t') = 0$$

Können Sie Lösungen für diese Gleichung angeben?

35. Nicht inertiale Systeme *(4 Punkte)*

Ein Beobachter (B) sitze auf einer ortsfesten Scheibe, die sich mit Winkelgeschwindigkeit ω gegen den Uhrzeigersinn drehe. Am Mittelpunkt der Scheibe befinde sich ein fixes Koordinatensystem $\mathcal{B}$, dass von der Drehung entkoppelt sei. Der Beobachter führe sein eigenes Koordinatensystem mit sich $\mathcal{B}'$, welches er immer zum Mittelpunkt der Scheibe orientiere.



a) Der Ortsvektor vom Punkt A sei $\mathbf{a} = \begin{pmatrix} a_1 \\ a_2 \end{pmatrix}_{\mathcal{B}}$. Finden Sie seine Koordinaten im bewegten System $\mathcal{B}'$.
Beginnen Sie damit, die Koordinaten von B in $\mathcal{B}$ zu einem günstigen Zeitpunkt zu bestimmen. Wie ist der Verbindungsvektor von A und B? Beachten Sie schließlich, dass sich nicht nur B bewegt, sondern auch das Koordinatensystem $\mathcal{B}'$ gedreht wird.

b) B werfe nun zu einem Zeitpunkt t_0 einen Ball mit Geschwindigkeit $\mathbf{v}$ in eine beliebige Richtung. Geben Sie seine Bahnkurve in beiden Koordinatensystemen an.

c) Sie befinden sich selbst auch in einem nicht inertialen System. Wieso können Sie einen Ball dennoch geradeaus werfen?