

Crank-Nicolson Methode

In der letzten Vorlesung haben wir gesehen, wie wir ein Anfangswertproblem lösen können, indem wir die Rekursionsgleichungen, welche wir aus der Diskretisierung der partiellen DGL erhalten, explizit integrieren.

Vergegenwärtigen wir uns diese Herangehensweise noch einmal am Beispiel der Wärmeleitungsgleichung

$$\frac{\partial}{\partial t} T(x,t) = -\alpha \frac{\partial^2}{\partial x^2} T(x,t)$$

↓ Diskretisierung

$$\frac{1}{h_t} (T_{i,j+1} - T_{i,j}) = \frac{\alpha}{h_x^2} (T_{i+1,j} + T_{i-1,j} - 2T_{i,j}) \quad \begin{array}{l} \text{forward} \\ \text{Euler} \end{array}$$

$$\frac{1}{h_t} (T_{i,j+1} - T_{i,j}) = \frac{\alpha}{h_x^2} (\underline{T_{i+1,j+1}} + \underline{T_{i-1,j+1}} - 2\underline{T_{i,j+1}}) \quad \begin{array}{l} \text{backward} \\ \text{Euler} \end{array}$$

Das Crank-Nicolson Verfahren ist ein implizites Verfahren, welches die Lösung der partiellen DGL über eine schrittweise Entwicklung auf ein Matrixproblem abbildet.

Dazu betrachten wir bzgl. der obigen Diskretisierung der Wärmeleitungsgleichung den Mittelwert aus forward- und backward-Euler

$$\frac{1}{h_t} (T_{i,j+1} - T_{i,j}) = \frac{\alpha}{2h_x^2} \left[(T_{i+1,j} + T_{i-1,j} - 2T_{i,j}) + (T_{i+1,j+1} + T_{i-1,j+1} - 2T_{i,j+1}) \right]$$

Führen wir eine Konstante $c = \frac{\alpha}{2} \cdot \frac{h_t}{h_x^2}$ ein und ordnen die Terme nach ihrem Zeitschritt um:

$$\begin{aligned}
 & -c \cdot T_{i-1,j+1} + (1+2c) \cdot T_{i,j+1} - c \cdot T_{i+1,j+1} \\
 = & +c \cdot T_{i-1,j} + (1-2c) \cdot T_{i,j} + c \cdot T_{i+1,j}
 \end{aligned}$$

(*)

Aus dieser Beschreibung können wir nun einen impliziten Algorithmus zur Berechnung der Temperaturverteilung herleiten.

Dazu führen wir einen Vektor der Temperatur-Punkte im Raum ein

$$\vec{T}_j = (T_{1j}, T_{2j}, \dots, T_{Nj})$$

und

$$\vec{T}_{j+1} = (T_{1j+1}, T_{2j+1}, \dots, T_{Nj+1})$$

Damit können wir die obige Gleichung (*) in Matrixform schreiben als

$$\underbrace{\begin{pmatrix} 1+2c & -c & & & & \\ -c & 1+2c & -c & & & \\ & -c & 1+2c & -c & & \\ & & \ddots & \ddots & \ddots & \\ & & & & -c & \\ & & & & -c & 1+2c \end{pmatrix}}_{\text{matrix } M} \vec{T}_{j+1} = \underbrace{\begin{pmatrix} 1-2c & c & & & & \\ & c & 1-2c & c & & \\ & & c & 1-2c & c & \\ & & & \ddots & \ddots & \\ & & & & c & \\ & & & & c & 1-2c \end{pmatrix}}_{\text{vektor } \vec{v}} \vec{T}_j$$

$$\rightarrow \boxed{M \cdot \vec{T}_{j+1} = \vec{v}}$$

Der Vektor \vec{T}_{j+1} lässt sich also als Lösung dieses trigonalen Matrix-Problems lösen.

→ Die numerischen Verfahren hierzu werden wir im Algebra-Teil der Vorlesung kennenlernen.

Randwertprobleme: Relaxationsmethode

-3-

Die Relaxationsmethode ist ein relativ einfaches Verfahren, Randwertprobleme für partielle DGLs iterativ zu lösen.

Betrachten wir dazu das Beispiel der Poisson-Gleichung (in 2D):

$$\Delta \phi(x,y) = \left(\frac{\partial^2}{\partial x^2} + \frac{\partial^2}{\partial y^2} \right) \phi(x,y) = -4\pi g(x,y),$$

wobei $\phi(x,y)$ ein gesuchtes skalares Potential und $g(x,y)$ eine gegebene Ladungsdichte seien.

Diskretisieren wir diese DGL so erhalten wir

$$\frac{1}{h^2} \left(\phi_{i+1,j} + \phi_{i-1,j} + \phi_{i,j+1} + \phi_{i,j-1} - 4\phi_{ij} \right) = -4\pi g_{ij}$$

$h_x = h_y = h$

Aufgelöst nach ϕ_{ij} ergibt sich

$$\phi_{ij} = h^2 \pi g_{ij} + \frac{1}{4} \left(\phi_{i+1,j} + \phi_{i-1,j} + \phi_{i,j+1} + \phi_{i,j-1} \right)$$

Die Strategie des Relaxationsverfahrens ist nun, ebendiese Gleichung zu iterieren und schrittweise das gesuchte Potential anzunähern.

Dazu starten wir mit einem beliebig gewählten Potential $\phi_{ij}^{(n=0)}$, welches aber mit den Randbedingungen verträglich ist.

Bestimme $\phi_{ij}^{(n)}$ dann iterativ als

$$\phi_{ij}^{(n+1)} = (1-\omega) \phi_{ij}^{(n)} + \omega \cdot \left[h^2 \pi g_{ij} + \frac{1}{4} \left(\phi_{i+1,j}^{(n)} + \phi_{i-1,j}^{(n)} + \phi_{i,j+1}^{(n)} + \phi_{i,j-1}^{(n)} \right) \right]$$

Relaxationsparameter $1 \leq \omega \leq 2$

$\omega > 1 \rightarrow$ Überrelaxation

Relaxationsmethode - multigrid Ansatz

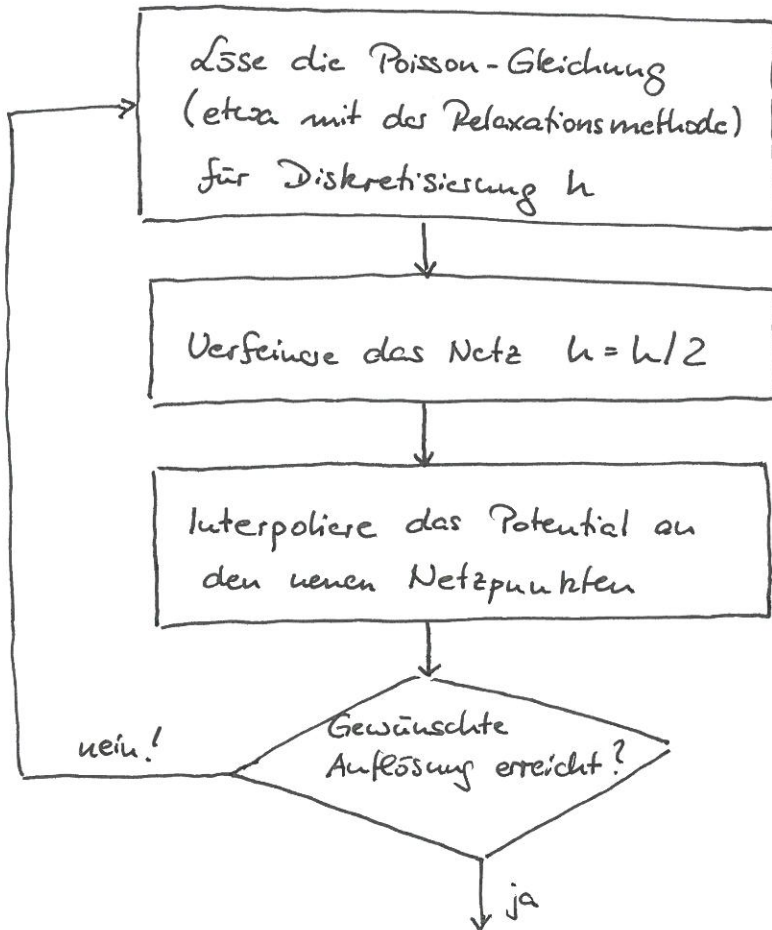
Multi-grid Methoden können die Konvergenz einer ganzen Reihe von iterativen Methoden dramatisch erhöhen.

Das Verfahren ist dabei relativ einfach, und sei am Relaxationsverfahren zur Lösung der Poisson-Gleichung erklärt.

Wir starten mit einem sehr groben Netz für die Diskretisierung

$$h = h_0 \quad (h_0 \text{ groß})$$

und iterieren dann:



Die Konvergenz im ersten Schritt ist schnell wegen des kleinen Gitters, in den weiteren Schritten bleibt die Konvergenz schnell da wir immer mit einem guten Vorschlag in die Relaxationsmethode gehen.