Institut für Theoretische Physik
Universität zu Köln

Prof. Dr. S. Trebst
Carsten Bauer

Statistische Physik

Blatt 7

WS 2017/18

Abgabe: Freitag, **8. Dezember** 2017, 10 Uhr

Webseite: http://www.thp.uni-koeln.de/trebst/Lectures/2017-StatPhys.shtml

Aufgabe 21: Das ideale Bose-Gas (7 Punkte)

Bei endlichen Temperaturen verteilen sich Teilchen typischerweise auf unterschiedliche quantenmechanische Zustände. Handelt es sich, wie in der Vorlesung, um Fermionen, ist es aufgrund des Pauli-Prinzips sogar ausgeschlossen, dass sich mehrere Teilchen im gleichen Zustand aufhalten. Im Falle von Bosonen tritt jedoch unterhalb einer kritischen Temperatur T_c das Phänomen der *Bose-Einstein Kondensation* auf, bei dem eine makroskopische Anzahl von Bosonen den gleichen quantenmechanischen Zustand besetzen. Im Folgenden wollen wir die kritische Temperatur T_c dieses Übergangs bestimmen.

Videoempfehlung: http://toutestquantique.fr/en/bose-einstein-condensate/

Wir betrachten ein Gas aus N idealen Bosonen der Masse m in einer Box des Volumens V. Die Einteilchen-Energiedispersionen lauten $\epsilon = |\vec{p}|^2/2m = p^2/2m$, wobei die Impulse wie üblich quantisiert sind: $\vec{p} = 2\pi\hbar\vec{n}/L$, mit $\vec{n} \in \mathbb{Z}$.

a) Bonusaufgabe: Zeigen Sie, dass die Zustandsdichte $D(\epsilon)$ gegeben ist durch

$$D(\epsilon) \equiv \sum_{i=1}^{N_{\text{Zustände}}} \delta(\epsilon - \epsilon(\vec{p})) = \frac{2\pi V}{h^3}(2m)^{3/2}\sqrt{\epsilon}. \tag{1}$$

b) Wie lautet die mittlere Besetzung $n_\epsilon(\mu, T)$ eines Einteilchenzustandes?

c) Fertigen Sie eine Skizze von n_ϵ für fixierte Temperatur T und fixiertes chemisches Potential $\mu < 0$ an. Zeichnen Sie auch $D(\epsilon)$ aus a) und eine Vertikale bei $\epsilon = \mu$ ein.

Argumentieren Sie anhand der Skizze und der Formeln, dass $\mu \leq 0$ sein muss, damit n_ϵ positiv ist. Was bedeutet das für die Fugazität $z = e^{\beta\mu}$?
Hinweis: Falls Sie Julia oder ähnliches verwenden, wählen Sie z.B. $\mu = -0.5$ *und* $T = 2$ *und setzen Sie alle Konstanten (z.B.* V, h, m, k_B*) auf 1.*

d) Zeigen Sie, dass die Teilchendichte $n = N/V$ als

$$n = \frac{1}{(2\pi\hbar)^3} \int d^3p \; n_{\epsilon(\vec{p})} = \frac{(2\pi m k_B T)^{3/2}}{h^3} g_{3/2}(z) \tag{2}$$

geschrieben werden kann, wobei

$$g_{3/2}(z) = \frac{2}{\sqrt{\pi}} \int_0^\infty dx \frac{\sqrt{x}}{e^x z^{-1} - 1} \tag{3}$$

eine verallgemeinerte Zeta-Funktion, $z = e^{\beta\mu}$ die Fugazität und $x = \beta\epsilon$ ist.

e) Die Funktion $g_{3/2}(z)$ wächst monoton als Funktion der Fugazität. Nutzen Sie diese Eigenschaft, um anhand des Ausdrucks für die Teilchendichte n zu zeigen, dass das chemische Potential $\mu(T)$ für abnehmende Temperatur größer werden muss und, am Übergang in die Bose-Einstein kondensierte Phase, gegen die obere Schranke aus c) läuft.

f) Setzen Sie $z \approx 1$ und berechnen Sie mittels Gleichung (2) die kritische Temperatur T_c als Funktion der Teilchendichte n. Verwenden Sie dabei, dass $g_{3/2}(1) \approx 2.612$.

g) Wir wollen nun einen Ausdruck für die Besetzung des Grundzustands ($n_{\epsilon=0}$) als Funktion der Temperatur herleiten. Für $T \geq T_c$ sind nur höhere Zustände besetzt (n_{ex}) und es gilt nach (2), dass $n_{ex} = n = h^{-3}(2\pi m k_B T)^{3/2} g_{3/2}(z)$. Direkt am Übergang $T = T_c$ ist der Grundzustand noch quasi unbesetzt und es gilt $n_{ex} \approx n = h^{-3}(2\pi m k_B T_c)^{3/2} g_{3/2}(1)$. Zeigen Sie, dass daraus

$$\frac{n_{\epsilon=0}}{n} = 1 - \frac{n_{ex}}{n} = 1 - \left(\frac{T}{T_c}\right)^{3/2} \quad \text{für } T \leq T_c \tag{4}$$

folgt. Skizzieren Sie $n_{\epsilon=0}(T)$ für $0 \leq T \leq 2T_c$.

h) Angenommen unser befreundeter Experimentalphysiker kann leider die kritische Temperatur T_c mit seinem experimentellen Aufbau nicht erreichen, da die Kühlleistung nicht ausreicht. Er möchte aber unbedingt ein Bose-Einstein Kondensat studieren. Was könnten Sie ihm basierend auf ihren Ergebnissen aus f) alternativ vorschlagen?

Aufgabe 22: Teilchenstatistik (3 Punkte)

Gegeben sei ein System zweier identischer Teilchen die drei Energieniveaus $\epsilon_n = n\epsilon$, $n = 0, 1, 2$, besetzen können. Der Grundzustand $\epsilon = 0$ sei zweifach entartet. Das System ist im thermischen Gleichgewicht bei Temperatur T. Bestimmen Sie die Zustandssumme und die Energie des Systems für jeden der folgenden Fälle. Skizzieren Sie jeweils explizit alle möglichen Konfigurationen des Systems.

a) Die Teilchen folgen der Fermi-Verteilung.

b) Die Teilchen folgen der Bose-Verteilung.

c) Die (jetzt unterscheidbaren) Teilchen folgen der Maxwell-Boltzmann-Verteilung.