Institut für Theoretische Physik
Universität zu Köln

Prof. Dr. S. Trebst
Christoph Berke

Probeklausur – Statistische Physik

WS 2020/21

Besprechung: Freitag, 19.02.2021, 9:00 Uhr, Zoom-Link

Aufgabe	1	2	3	4	5	6	7	Σ
Punkte								

Vorbemerkungen

- Sie haben für diese Klausur **3 Stunden** Zeit.
- Falls Sie die **9 LP Variante** der Klausur schreiben, bearbeiten Sie bitte **alle Aufgaben**.
- Falls Sie die **6 LP Variante** der Klausur schreiben, bearbeiten Sie bitte **nur die Aufgaben 1 bis 5**.
- Zugelassene Hilfsmittel: Ein Din-A4 Blatt, beidseitig beschrieben.
- Fangen Sie bitte jede Aufgabe auf einem neuen, separaten Blatt an.
- **Schreiben Sie auf jedes neue Blatt deutlich Ihre Matrikelnummer.**

Viel Erfolg!

1. Konzeptionelle Fragen (23 Punkte)

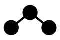
a) Wie hängen Temperatur und Entropie miteinander zusammen?

b) Betrachten Sie den "Tiny-Cube", einen "kleinen" Zauberwürfel mit 4 Feldern pro Seitenfläche, den wir in der Vorlesung und Übung kennengelernt haben. Wieviele Konfigurationen hat dieser Würfel?

c) Betrachten wir einen Set von N=1024 Zufallszahlen x_i, welche unabhängig voneinander aus einer beliebigen Wahrscheinlichkeitsverteilung mit Mittelwert $\langle x \rangle$ und Varianz Δx^2 gezogen werden. Es sei nun $Y = \frac{1}{N}\sum_i^N x_i$. Was wissen Sie über die Verteilung dieser Summe Y?

d) Benennen sie das statistische Gewicht einer Konfiguration mit N Teilchen und einer Gesamtenergie E im großkanonischen Ensemble.

e) Skizzieren Sie die Maxwell-Verteilung der Geschwindigkeiten eines idealen Gases.

f) Betrachten Sie dieses dreiatomige Molekül:  Der Abstand der Moleküle und der eingeschlossene Winkel sind fest. Wie lautet die Wärmekapazität eines Gases N solcher Moleküle nach dem klassischen Gleichverteilungssatz?

g) Sind die innere Energie in der Form $E(T, V, N)$ und die freie Energie in der Form $F(T, V, N)$ thermodynamische Potentiale?

h) Was besagt der 3. Hauptsatz der Thermodynamik?

i) Geben Sie je zwei Beispiele für eine intensive und eine extensive Größe.

j) Wir betrachten das Alphabet $\{a, b, c\}$ mit den Häufigkeiten $p_a = \frac{1}{2}$, $p_b = \frac{1}{3}$ und $p_c = \frac{1}{6}$. Was ist die durchschnittliche Länge einer kodierten Nachricht aus N Buchstaben, wenn die Kodierung $a = 0$, $b = 01$, $c = 11$ genutzt wird?

2. Entartetes Fermigas (10 Punkte)

Für die Energie des entarteten Fermigases gilt

$$E = a\frac{N^{5/3}}{V^{2/3}} + b\frac{S^2}{V^{2/3}N^{1/2}}, \tag{1}$$

wobei wie gewöhnlich N der Teilchenzahl, V dem Gasvolumen und S der Entropie entspricht.

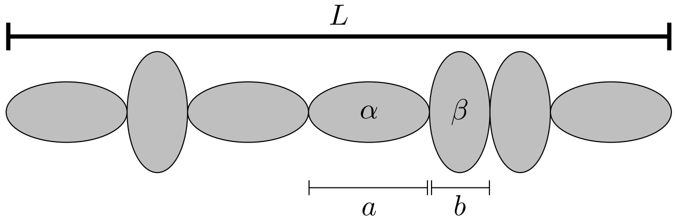
a) Führen Sie eine Legendre-Transformation durch, um die freie Energie $F(T, V, N)$ des Gases zu bestimmen.

b) Bestimmen Sie mit Ihrem Ergebnis aus (a) den Druck $p = p(T, V, N)$.

c) Leiten Sie aus Ihrem Ergebnis aus (b) die Abhängigkeit der Energie E vom Druck p und dem Volumen V her, d.h. $E(p, V)$.

3. Molekülkette (10 Punkte)

Wir betrachten eine sehr lange, eindimensionale Kette aus N ovalen Molekülen. Jedes Molekül kann in zwei verschiedenen Konfigurationen α und β vorliegen. Die Konfigurationen haben die Länge a bzw. b (siehe Abbildung).



a) Zeigen Sie, dass die Anzahl der Moleküle im Zustand α, bzw. β durch $n_\alpha = (L-bN)/(a-b)$, bzw. $n_\beta = (L-aN)/(b-a)$ gegeben ist.

b) Zeigen Sie, dass die Entropie der Kette $S(L)$ in Abhängigkeit von der Gesamtlänge L gegeben ist durch

$$S(L) = k_B \left(N \ln N - n_\alpha \ln n_\alpha - n_\beta \ln n_\beta\right). \tag{2}$$

Hinweis: Nutzen Sie die Stirling-Formel $\ln k! \approx k \ln k - k$. *Sie können ignorieren, dass die Anzahl der Moleküle in den Konfigurationen nur natürliche Zahlen annehmen kann.*

Das Verhältnis aus der Spannungskraft f am Ende der Kette, die nötig ist um die Kette auf der Länge L festzuhalten, und der Temperatur T lässt sich mittels $f/T = \mathrm{d}S/\,\mathrm{d}L$ berechnen (mechanisches Gleichgewicht, vgl. Gas im Kolben mit $p \to f$, $V \to L$).

c) Zeigen Sie, dass sich für f/T der folgende Ausdruck ergibt:

$$\frac{f}{T} = -\frac{k_B}{a-b} \ln\left(-\frac{L-bN}{L-aN}\right). \tag{3}$$

d) Bei welcher Länge L_0 verschwindet die Spannkraft?

4. Rotation um feste Achse (12 Punkte)

Ein starrer Körper drehe sich um eine feste Achse und befinde sich im Kontakt mit einem Wärmereservoir der Temperatur T. Der Hamiltonoperator lautet

$$\hat{H} = \frac{1}{2I}\hat{L}_z^2, \tag{4}$$

mit dem Trägheitsmoment I und der z-Komponente des Drehimpulsoperators $\hat{L}_z$. Die Energieeigenwerte sind $E_n = \frac{\hbar^2 n^2}{2I}$, wobei $n = 0, \pm 1, \pm 2, \cdots \in \mathbb{Z}$.

a) Finden Sie einen Ausdruck für die Zustandssumme Z.
Hinweis: Sie sollen die dort auftauchende Summe nicht auswerten.

b) Werten Sie Z durch den Übergang $\sum_{n_i} \to \int_{-\infty}^{\infty} \mathrm{d}n_i$ aus. Für welche Temperaturen ist der Übergang erlaubt?

c) Berechnen Sie mit Ihrem Ergebnis aus (b) den Erwartungswert der Energie $\langle E \rangle$ und die Wärmekapazität C_V.

d) Berechnen Sie $\langle E \rangle$ und die Wärmekapazität C_V im Grenzfall tiefer Temperaturen, in dem Sie Z in der Form $Z = 1 + \sum_{n_i=1}^{\infty} \ldots$ schreiben und nur den größten Summanden berücksichtigen. *Hinweis: Benutzen Sie* $\ln(1 + x) \approx x$ *für* $x \ll 1$.

e) Skizzieren Sie die Temperaturabhängigkeit der Wärmekapazität.

5. Brayton-Kreisprozess (15 Punkte)

Der Brayton-Kreisprozess besteht aus den folgenden vier Schritten:

- $1 \to 2$: Adiabatische Kompression.
- $2 \to 3$: Isobare Wärmezufuhr.
- $3 \to 4$: Adiabatische Expansion.
- $4 \to 1$: Isobare Wärmeabfuhr.

Das Arbeitsmedium sei ein ideales Gas mit konstanter, temperaturunabhängiger spezifischer Wärme C_p.

a) Skizzieren Sie den Kreisprozess in einem p-V- und einem T-S-Diagramm. Zeichnen Sie in beiden Fällen ein, wo die Wärme Q_{zu} zugeführt und die Wärme Q_{ab} abgeführt wird.

b) Der Wirkungsgrad η ist das Verhältnis von geleisteter Arbeit W zur zugeführten Wärme Q_{zu}. Berechnen Sie η als Funktion der Temperaturen T_1 bis T_4.

c) Zeigen Sie, dass der Wirkungsgrad des Brayton-Prozesses als

$$\eta = 1 - \frac{1}{r^{(\gamma-1)/\gamma}} \tag{5}$$

geschrieben werden kann, wobei $r = p_2/p_1$ das Druckverhältnis ist.

Hinweis: Betrachten Sie die Enthalpie $\mathrm{d}H = \mathrm{d}Q + V\,\mathrm{d}p$ *und benutzen Sie, dass bei isobarer Wärmezufuhr gilt* $\mathrm{d}H = C_p\,\mathrm{d}T$.

Ende der 6 LP Klausur

Folgende Aufgaben bitte nur für die **9 LP Variante** bearbeiten!

6. Konzeptionelle Fragen (Teil II) (15 Punkte)

a) Wie ist die freie Energie definiert? Welchen Wettstreit beschreiben die beiden Terme?

b) Was versteht man unter einem kritischen Endpunkt?

c) Worin unterscheiden sich Fermionen und Bosonen?

d) Phasenübergänge sind durch Unstetigkeiten in den Ableitungen thermodynamischer Potentiale charakterisiert. Begründen Sie mit der Zustandssumme $Z = \sum_i \exp(-\beta E_i)$, warum Phasenübergänge nur im thermodynamischen Limes existieren.

e) Geben Sie je ein Beispiel für einen Phasenübergang 1. Ordnung und einen kontinuierlichen Phasenübergang. Geben Sie in letzterem Fall auch den Ordnungsparameter an.

f) Gibt es Phasenübergänge auch in Systemen ohne Wechselwirkung?

7. Ising Ferromagnet (15 Punkte)

Hinweis zu dieser Aufgabe: Da Teilergebnisse angegeben sind, können Sie einzelne Aufgabenteile auch dann bearbeiten, wenn Sie die Aufgabenteile davor nicht lösen konnten, oder aus Zeitgründen weggelassen haben.

Wir betrachten einen Ising Ferromagneten aus N klassischen Spins, $\sigma_i = \pm 1$, auf einem zweidimensionalen Quadratgitter. Das System wird durch die Hamiltonfunktion

$$H = -\sum_{i=1}^{N} \sigma_i \left(\frac{J}{2} \sum_{j \in \mathcal{U}(i)} \sigma_j \right) , \tag{6}$$

beschrieben, wobei $\mathcal{U}(i)$ die 4 Nachbarn von Spin σ_i bezeichnen.

Die Entropie pro Spin $s = S/N$ des Ferromagneten ist gegeben durch

$$-\frac{s}{k_B} = \left(\frac{1+m}{2}\right) \ln\left(\frac{1+m}{2}\right) + \left(\frac{1-m}{2}\right) \ln\left(\frac{1-m}{2}\right) , \tag{7}$$

wobei m die Magnetisierung pro Spin $m = \langle M \rangle / N$ des Ferromagneten ist. Sei $N_\uparrow$ bzw. $N_\downarrow$ die Zahl der nach oben bzw. nach unten zeigenden Spins, dann gilt $m = \langle M \rangle / N = \langle N_\uparrow - N_\downarrow \rangle / N$.

In der Molekularfeldnäherung (*mean field theory*) machen wir den Ansatz, dass wir den Klammerausdruck in (6) als effektives Feld $h = \left(\frac{J}{2} \sum_{j \in \mathcal{U}(i)} \sigma_j \right)$ interpretieren und durch seinen Mittelwert $\langle h \rangle = 2Jm$ ersetzen.

a) Zeigen Sie, dass in dieser Näherung die Energie pro Spin $e = \langle E \rangle / N$ des Ferromagneten gegeben ist durch

$$e = -2Jm^2 \, . \tag{8}$$

Der Ferromagnet befinde sich nun im Kontakt mit einem Wärmebad der Temperatur T. Es stellt sich nun diejenige Magnetisierung $\overline{m}$ ein, welche die freie Energie pro Spin $f(m;T) = e(m) - Ts(m)$ minimiert.

b) Entwickeln Sie $f(m;T)$ bis zur 4.Ordnung in m um $m = 0$. Ergebnis:

$$f(m;T) = \left(-2J + \frac{k_B T}{2}\right) m^2 + \frac{k_B T}{12} m^4 \tag{9}$$

Hinweis: $\ln(1+x) \approx x - x^2/2 + x^3/3 - x^4/4$

c) Woran erkennen wir den Phasenübergang, d.h. was ändert sich qualitativ an $f(m;T)$ als Funktion von T? Skizzieren Sie als Erklärung $f(m;T)$ qualitativ für zwei Temperaturen $T_1 > T_c > T_2$. Bestimmen Sie anschließend die kritische Temperatur T_c aus (9).

d) Wir definieren $\Delta T = (T - T_c)/T_c$. Zeigen Sie, dass für $\Delta T < 0$ in den Minima der freien Energie pro Spin $f(m;T)$

$$\overline{m} = \sqrt{3\left|\frac{\Delta T}{1 + \Delta T}\right|} \tag{10}$$

gilt.