

---

# Statistische Physik

Blatt 12

---

WS 2020/21

**Abgabe:** Montag, **08.02.2021**, 10:00 Uhr

**Besprechung:** Dienstag, 09.02.2021

**Webseite:** [www.thp.uni-koeln.de/trebst/Lectures/2020-StatPhys.shtml](http://www.thp.uni-koeln.de/trebst/Lectures/2020-StatPhys.shtml)

## Aufgabe 41: Van-der-Waals Gas (8 Punkte)

Die Van-der-Waals-Gleichung zur Beschreibung realer Gase lautet

$$\left(p + \frac{a}{v^2}\right)(v - b) = k_B T, \quad (1)$$

wobei  $v = V/N$  und  $a$  und  $b$  positive Konstanten sind.

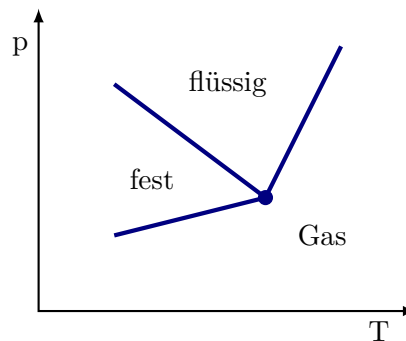
- Diskutieren Sie kurz die Bedeutung der Parameter  $a$  und  $b$ .
- Wie ist der kritische Punkt  $(p_c, T_c, v_c)$  definiert? Was ergibt sich für das Verhältnis  $\frac{p_c v_c}{k_B T_c}$ ?
- Zeigen Sie die Relation

$$\left(\frac{\partial T}{\partial V}\right)_E = \frac{1}{C_V} \left(p - T \left(\frac{\partial p}{\partial T}\right)_V\right). \quad (2)$$

- Zeigen Sie, dass sich ein Van-der-Waals Gas bei freier Expansion abkühlt. Ziehen Sie einen Vergleich zum idealen Gas.
- Wie ändert sich die Energie des Gases bei isothermer Expansion?
- Zeigen Sie, dass die Wärmekapazität  $C_V$  ausschließlich von der Temperatur  $T$  abhängt und unabhängig von  $v$  ist.
- Berechnen Sie die innere Energie  $E(N, T, V)$  als Funktion von  $C_V, N, T, V, a$  und  $b$ . Nehmen Sie an, dass  $C_V$  eine Konstante ist. Ziehen Sie einen Vergleich zum idealen Gas.
- Berechnen Sie die Entropie  $S(N, T, V)$  als Funktion von  $C_V, N, T, V, a$  und  $b$ . Nehmen Sie wieder an, dass  $C_V$  eine Konstante ist. Vergleichen Sie erneut mit dem idealen Gas.

## Aufgabe 42: Jerktonium (Bonusaufgabe) (2 Punkte)

Forscher der “University of Woolamaloo” haben angeblich das Druck-Temperatur-Phasendiagramm einer neuen Substanz, die sie “Jerktonium” getauft haben, gemessen. Das Resultat in der Nähe des Tripelpunktes ist nebenstehend skizziert. Wenn diese Ergebnisse stimmen sollten, dann hätte “Jerktonium” eine sehr ungewöhnliche Eigenschaft, sowie eine Eigenschaft, die gegen die Gesetze der Thermodynamik verstoßen würde. Um welche beiden Eigenschaften handelt es sich? *Hinweis: Benutzen Sie  $V_{\text{Gas}} \gg V_{\text{fest}}, V_{\text{flüssig}}$  und die Clausius-Clapeyron-Gleichung.*



## Aufgabe 43: Ising-Modell (7 Punkte)

In dieser Aufgabe beschäftigen wir uns mit einem einfachen Modell zur Beschreibung von Ferromagnetismus, dem **Ising-Modell**, das von Wilhelm Lenz eingeführt, und von seinem Doktoranden Ernst Ising (gebürtiger Kölner) **zuerst untersucht** wurde. Das Ising-Modell zählt zu den meistuntersuchten physikalischen Modellen und wird deshalb auch als “Drosophila” der statistischen Physik bezeichnet. In den Naturwissenschaften gibt es von Magnetismus über **Neurowissenschaften** bis **Ökologie** Anwendungen auf allen Größenskalen. Es wird aber auch in unzähligen weiteren Forschungszweigen eingesetzt, u.a. in **Ökonomie** und **Sozialwissenschaften**.

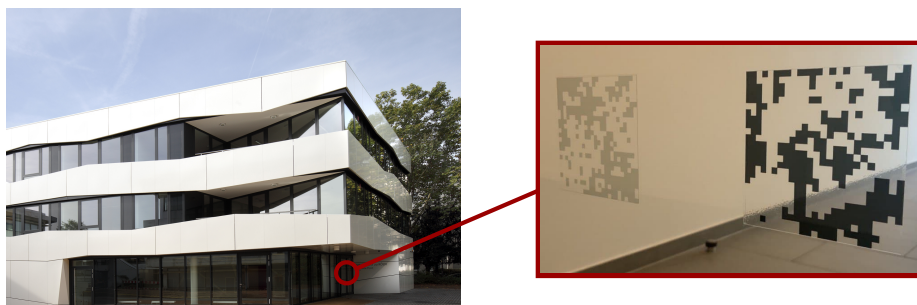


Abbildung 1: Die am ITP Gebäude angebrachten Verzierungen sind keine QR Codes, sondern erinnern an Ernst Ising. Ihre genaue Bedeutung wird im Laufe dieser Aufgabe entschlüsselt.

Grundlage ist ein System von Spins  $\sigma$  auf einem Gitter, deren Wechselwirkungen durch den Hamilton-Operator

$$H = -J \sum_{\langle i,j \rangle} \sigma_i \sigma_j \quad (3)$$

beschrieben werden. Die Spins können die Werte  $\pm 1$  annehmen und die Notation  $\langle i, j \rangle$  bedeutet, dass nur Spins auf direkt benachbarten Gitterplätzen  $i$  und  $j$  zur Summe beitragen sollen. Wenn wie die Kopplungskonstante  $J$  positiv wählen, werden parallel ausgerichtete Spins bevorzugt und wir erhalten **ferromagnetische Wechselwirkungen**.

Wir haben ein **Notebook** für Sie vorbereitet, auf dem Sie sich mit dem zweidimensionalen Ising-Modell beschäftigen sollen. Laden Sie das **Notebook** herunter und bearbeiten Sie die Aufgabenteile (a) bis (e).